Rugalmas és képlékeny alakváltozások

Feszítsünk l hosszú fémszálat különböző erővel, és mérjük a hosszváltozását, ami tapasztalat szerint nem 0. Azt találjuk, hogy $\Delta l \sim \frac{F \cdot l}{A}$. Legyen a Young modulus: $\Delta l = \frac{1}{E}\frac{F \cdot l}{A}$. Átrendezve: $\frac{\Delta l}{l}E = \frac{F}{A}$, majd bevezetve az ε relatív megnyúlást, illetve σ feszültséget, kapjuk, hogy $\sigma = E\varepsilon$. Ez a törvény csak kis megnyúlás esetén igaz, ez a Hooke-törvény egyszerű esetben. Ha tovább nyújtjuk az anyagot, elérünk az ún. folyáshatárig (0.), mikor σ csak kicsit nő tovább a relatív megnyúlással. A folyáshatárig az alakváltozás rugalmas, mert a terhelőerőt elvéve a test visszanyeri eredeti alakját. A folyáshatáron felül a test maradandó alakváltozást szenved, de elvéve a terhelőerőt (1.) a görbe meredeksége az eredetivel megegyező lesz a tehermentesítő szakaszban, és a terhelő szakaszban egyaránt, és ezúttal már kicsit tovább lesz terhelhető a minta. (De csak kicsit.) Szilárd testek esetén a továbbiakban a rugalmas alakváltozás tartományával foglalkozunk.

A feszítésben tárolt energia: $W = \int_0^{\Delta l} F(\Delta l)d(\Delta l) = \frac{EA}{l}\int_0^{\Delta l} \Delta l d(\Delta l) = \frac{EA}{l}\frac{(\Delta l)^2}{2} := \frac{1}{2}D\Delta l^2$, ahol D a fémszál/rugóra jellemző, ún direkciós állandó.

Speciális alakváltozások

Vannak a hétköznapokban gyakran előforduló alakváltozások, melyek jellemzésére 1-1 szám elegendő, vagy fontosságuk és könnyen tárgyalhatóságuk miatt itt szerepelnek.

- Térfogati deformáció: vegyük körül a testet folyadékkal (pl vízzel), majd kezdjük nyomni azt hidraulika segítségével. Ekkor az alakváltozás térfogat mentén történik. Tapasztalat: $\Delta V \sim V\Delta p$, ahol V a minta térfogata a Δp nyomásváltozás előtt. Legyen a kompresszió modulus definíciója alapján $\Delta V = -\kappa V p$, vagyis $\kappa = -\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta p}$.
- Nyírás: test két párhuzamos lapjára fejtsünk ki a lapokkal párhuzamos, egymással ellentétes irányú, azonos nagyságú erőt. Téglatest esetén azt tapasztaljuk, hogy a deformációs szögre (ha elég kicsi): $\gamma \sim \frac{F}{A}$, ahol F az alkalmazott erők nagyságának összege, A a terhelt egyik lap felülete. Legyen a nyírási modulus definíció szerint az, mellyel $\gamma = \frac{1}{G}\frac{F}{A}$. Az anyagban nyírási feszültség ébred, melyre $\tau A = F \Rightarrow \tau = G\gamma$. Ez analóg $\sigma = E\varepsilon$ képlettel.
- Csavarás: csavarjunk el egy hengert egy picit! A henger egy belső, r sugarú részét vizsgáljuk! Geometriából kiindulva: $\gamma = \frac{r\phi}{l} = \frac{1}{G}\frac{dF}{dA}$, ahol dF a dA nagyságú felületre kifejtett erő (a számolást a rajzzal ellentétben egyenletes, síkkal való csavarással végzem). Átrendezve, r-rel beszorozva $G\frac{r^2\phi}{l}dA = rdF = dM \Rightarrow M = \int_0^R G\frac{r^2\phi}{l}dA = \frac{G}{l}\int_0^R G\frac{r^2\phi}{l}d\alpha r dr = \frac{2\pi R^4\phi}{4l}$.
- Hajlítás: vízszintes rúd lehajlik saját súlya alatt, vagy végére akasztott súly hatására. Az eredetileg vízszintes rétegei az anyagnak elmozdulnak egymáshoz képest. Az alul levő részek

összenyomódnak, a fent levők megnyúlnak. (Ezek mértéke anyagi minőség kérdése.) Egy sávban ezért nem történik deformáció. Ha eltekintünk a hossztengelyre merőleges keresztmetszet-változástól, akkor a probléma két dimenziós, az említett sávot neutrális görbének nevezzük. Geometrizálással kifejezhető a később tárgyalt deformációs tenzor, melyből a feszültségtenzor számolható, melyből felírhatjuk a statikára vonatkozó feltételt a rúdra. Hasonló problémák a különböző helyeken alátámaszott és húzott rudak, melyek ezzel a problémával ekvivalensek, csupán a határfeltételekben különböznek (a végeken pl feszültség tenzor 0 vagy az elmozdulás 0).

Deformáció jellemzése, feszültség és deformációs tenzor

Tekintsük az ábrát! Az $\mathbf{r}$ helyű pont szomszédja $\Delta\mathbf{r}$ -rel odébb van. A rendszert eltorzítjuk kicsit egy $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ deformációs térrel. Láthatjuk, hogy $\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}+\mathbf{u}(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})-\mathbf{u}(\mathbf{r})-\mathbf{r}=\Delta\mathbf{s}$, vagyis

$\Delta\mathbf{s}-\Delta\mathbf{r}=\mathbf{u}(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})-\mathbf{u}(\mathbf{r})\xrightarrow{\lim \Delta\mathbf{r}\to 0}\Delta\mathbf{s}-\Delta\mathbf{r}=\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{r}}\Delta\mathbf{r}:=\underline{\underline{\beta}}\Delta\mathbf{r}$, ahol $\underline{\underline{\beta}}$ a disztorzió, kiírva:

$\underline{\underline{\beta}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial r_1} & \frac{\partial u_1}{\partial r_2} & \frac{\partial u_1}{\partial r_3}\\ \frac{\partial u_2}{\partial r_1} & \frac{\partial u_2}{\partial r_2} & \frac{\partial u_2}{\partial r_3}\\ \frac{\partial u_3}{\partial r_1} & \frac{\partial u_3}{\partial r_2} & \frac{\partial u_3}{\partial r_3}\end{pmatrix}$. Ekkor $\Delta\mathbf{s}=\left(\underline{\underline{1}}+\underline{\underline{\beta}}\right)\Delta\mathbf{r}$. Kíváncsiak vagyunk, hogy a távolságváltozás relatíven mekkora, vagyis $\frac{|\Delta\mathbf{s}|-|\Delta\mathbf{r}|}{|\Delta\mathbf{r}|}$ értéke mennyi?

$\frac{|\Delta\mathbf{s}|-|\Delta\mathbf{r}|}{|\Delta\mathbf{r}|}=\frac{\sqrt{(\beta_{ij}+\delta_{ij})r_j(\beta_{ik}+\delta_{ik})r_k}-|\Delta\mathbf{r}|}{|\Delta\mathbf{r}|}=\sqrt{\frac{(\beta_{ij}+\delta_{ij})r_j(\beta_{ik}+\delta_{ik})r_k}{|\Delta\mathbf{r}|^2}}-1$. Gyök alatt:

$(\beta_{ij}+\delta_{ij})r_j(\beta_{ik}+\delta_{ik})r_k=\beta_{ij}\beta_{ik}+\beta_{jk}+\beta_{kj}+\delta_{kj}$, ezek közül az első tagot elhanyagoljuk, mert $\underline{\underline{\beta}}$ kicsi. Beírva, elvégezve a szorzást $\frac{|\Delta\mathbf{s}|-|\Delta\mathbf{r}|}{|\Delta\mathbf{r}|}=\sqrt{(\beta_{jk}+\beta_{kj})\frac{r_j r_k}{|\Delta\mathbf{r}|^2}+\frac{r_k r_k}{|\Delta\mathbf{r}|^2}}-1$. A gyök alatti második tag 1, így gyök alatt 1 + kicsi szám van, melyre a Taylor-sorfejtés szerint $\sqrt{1+x}\approx 1+x/2$, így az 1 pont kiesik, $\frac{|\Delta\mathbf{s}|-|\Delta\mathbf{r}|}{|\Delta\mathbf{r}|}=\frac{(\beta_{jk}+\beta_{kj})}{2}\frac{r_j r_k}{|\Delta\mathbf{r}|^2}=\mathbf{n}\underline{\underline{\varepsilon}}\mathbf{n}$, ahol a bevezetett tenzor neve a deformációs tenzor.

A szilárd anyag belsejében általánosan egy $d\mathbf{A}$ felület, és a rá ható $d\mathbf{F}$ erő nem feltétlen párhuzamos egymással, de elég kis mennyiségek esetén a kapcsolat lineáris, így mátrixszal reprezentálható: $\underline{\underline{\sigma}}d\mathbf{A}=d\mathbf{F}$, ahol $\underline{\underline{\sigma}}$ a feszültség tenzor, így egy anyagdarabkára ható erő: $\mathbf{F}=\int_V \mathbf{f}dV+\int_{\partial V}\underline{\underline{\sigma}}d\mathbf{A}$, ahol $\mathbf{f}$ az erősűrűség. $\underline{\underline{\sigma}}$ legtöbb esetben szimmetrikus. Segítségével általánosítható a Hooke-törvény: fejtsük sorba σ_{ij} -t ε_{kl} szerint! $\sigma_{ij}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)=\sigma_{ij}(0)+\left.\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}}\right|_0\varepsilon_{kl}$, melyet átrendezve, definíció szerint legyen $\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$, ahol mint látjuk, C egy 4 indexes mennyiség, valami ilyesmivel lehetne jelölni: $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$. C-nek $3^4 = 81$ komponense van, de mivel a mátrixok szimmetrikusak, meg egyéb szimmetriák is csökkentik C-nek a független komponenseinek számát, végül addig tudjuk redukálni, míg végül $\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda Sp\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\cdot\underline{\underline{1}}$.

Hullám terjedése deformálható testekben

Először írjuk fel a kontinuumok mozgásegyenletét! $\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f}dV + \int_{\partial V} \underline{\underline{\sigma}}d\mathbf{A}$, illetve $\mathbf{F} = \int_V \rho\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}dV$, ahol ρ a sűrűség (a második egyenlet a Newton II alakja kontinuumra). Ezekből $\int_V \mathbf{f}dV + \int_{\partial V}\underline{\underline{\sigma}}d\mathbf{A} - \int_V \rho\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}dV = 0 \Rightarrow \int_V \mathbf{f}dV + \int_V div\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)dV - \int_V \rho\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}dV = 0$. Ez minden térfogatra igaz, így $\rho\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \mathbf{f} + div\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)$. $\underline{\underline{\sigma}}$-t átírva $\underline{\underline{\varepsilon}}$-ra, majd azt $\mathbf{u}$-k deriváltjaira, majd a *div*-et kifejtve kapjuk, hogy $\mathbf{f} = 0$ esetén $\rho\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = ...\Delta\mathbf{u} + ...\nabla\left(\nabla\mathbf{u}\right)$. További vektoranalitikai ügyeskedésre van szükség: véve az egyenlet rotációját, illetve divergenciáját, kapjuk, hogy $\rho\frac{d^2\left(\nabla\times\mathbf{u}\right)}{dt^2} = ...\Delta\left(\nabla\times\mathbf{u}\right)$, illetve $\rho\frac{d^2\left(\nabla\mathbf{u}\right)}{dt^2} = ...\Delta\left(\nabla\mathbf{u}\right)$, amik már hullámegyenletek $\nabla\mathbf{u}$-ra és $\nabla\times\mathbf{u}$-ra, ezek adják a longitudinális és transzverzális hullámokat.

Doppler effektus

A hullám terjedésének sebessége a közeghez viszonyított. Ha a hullám forrása vagy a megfigyelő mozog, az így érzékelt hullámhossz és frekvencia megváltozik. Ha a forrás mozog, akkor 1 periódusra vizsgálva látjuk, hogy a hullámhossz megváltozik $v\cdot T$ hosszúsággal, amennyit a kibocsátó megtett, vagyis $\lambda' = \lambda \pm vT \Rightarrow f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda \pm v/f} = f\frac{c}{c \pm v}$. Mozgó megfigyelő esetén úgy érzékelődik, mintha a hullám gyorsabban terjedne, így $f' = f\frac{c \pm v}{c}$. Ez a jelenség áll amögött, hogy a közeledő szirénázó autó hangja magasabb, mint a távolodóé.

Folyadékok tulajdonságai, hidrosztatika, felhajtó erő

A folyadékok tárgyalása történhet az Euler és Lagrange-képpel. Előbbi során a sebesség és gyorsulás mezőket adjuk meg a hely függvényében (mint ahogy a nyomást is), vagyis tér mennyiségekkel dolgozunk. Utóbbi képben 1-1 részecske pályáját követjük nyomon az erőtörvények alapján. Előbbi alkalmazása sok tekintetben termékenyebbnek bizonyult, ezt nézzük a továbbiakban.

A kontinuumok mozgásegyenlete igaz itt is, de nem abban a formában, mint ahogy felírtuk, mert most az elmozdulás az idővel nagyon naggyá is válhat. A helyes egyenletet akkor kapjuk, ha $\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}$ helyére $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$-t írunk. $\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} + div\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)$, csak $\underline{\underline{\sigma}}$-t megfelelő módon kell felírni. Ideális folyadékban nem lépnek fel nyírófeszültségek, melyek a mátrix offdiagonális elemeit adnák, így az konstansszor az egységmátrix: $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$, de ekkor már $\underline{\underline{\varepsilon}}$ értelmezése nehézkes, ugyanis nem Lagrange-képben vagyunk. Belátható, hogy a konstans a klasszikusan definiált nyomás. Ezt népiesen úgy mondjuk, hogy a nyomás gyengítetlenül tovaterjed (ennek a mondatnak az értelmezése Groma tanárúrnak komoly problémát jelent). Ekkor $div\underline{\underline{\sigma}} = -gradp$. Ha $\mathbf{f} = \rho\mathbf{g} = -\rho gradU$, akkor statika esetén

$0 = \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\rho\nabla U - \nabla p$. Ha ρ konstans, azaz a folyadék összenyomhatatlan (márpedig legyen), akkor bevihető a gradiens alá, és $0 = -\nabla(\rho U) - \nabla p \Rightarrow \rho U + p = áll$, vagyis a nyomás az ekvipotenciális felületek mentén állandó. Ebből következik az a népi megfigyelés, hogy a víz felülete vízszintes.

Ha a folyadékba testet teszünk, akkor a rá ható erő by def: $\mathbf{F} = \int_{\partial V} \underline{\underline{\sigma}} d\mathbf{A}$, ahol V a minta térfogata. Az előzőek alapján, statika esetén $\mathbf{F} = -\int_V \mathbf{f} dV = -\rho\mathbf{g}V$, ez Archimedes-törvénye.

Felületi feszültség, Laplace-törvények

Egy pohár vízben a vízmolekulák csaknem azonos módon érzik magukat, vízzel vannak körülvéve majdnem mindenhol. A pohár szélén és tetején üveggel és levegővel érintkezik, ez más, mint a víz. Az üveggel való érintkezés során a kapilláris emelkedés jelenség figyelhető meg, a levegővel való érintkezésénél pedig a felületi feszültség.

A tapasztalat azt mutatja, hogyha szappanhártyát feszítünk ki egy téglalapban, akkor annak oldalára az oldal hosszúságával arányos erő hat, $F := 2\alpha l$, ahol α a felületi feszültség mérőszáma.

Laplace 1 törvénye a görbületi nyomást fejezi ki. Kis matekozással kifejezhető, hogy $\frac{dF}{dA} = p = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$, ahol R-ek a görbült felület (szappanhártya) görbületi sugarai (1D-s vonalnak 1 görbületi sugara van, egy 2D-snek már kettő).

Laplace második törvénye a nedvesítést írja le, vagyis hogy milyen az alakja egy vízcseppnek pl a poháron. Ehhez fel kell írni a statika feltételét abban a pontban, ahol a folyadék érintkezik az üveggel és a levegővel egyszerre. Itt a felületi erők összege 0.

Áramlások jellemzése, Bernoulli egyenlet, tökéletes folyadék áramlása, Euler-egyenlet

Egy áramlás lehet súrlódásos vagy attól mentes. Akkor súrlódásos, ha az egyes folyadékrészek között nyírófeszültség léphet fel, vagyis ha két, egymás mellett elhaladó folyadékrészecske a haladási iránnyal megegyező irányú erőt tud kifejteni. A súrlódásmentes, összenyomhatatlan folyadék az ideális folyadék. A folyadékok a valóságban különböző, kis mértékben összenyomhatóak, de a kontinuitási egyenlet általánosan is igaz.

Egy áramlás örvényes, ha a sebességtér rotációja nem 0. Egy áramlás stacionárius, ha a nyomás, sűrűség és sebességtér időtől független.

A Bernulli-egyenlet a munkatétel ideális folyadékokra. Egy csőben odébb mozduló folyadék-tömegre felírjuk a munkatételt és az energia-megmaradást, valamint az összenyomhatatlanság feltételét. $W_{nyomás} = p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t$, ahol egyes indexű a folyadék-tömeg eleje, és 2-es a vége (amerre halad a folyadék). Munkát végezhet még a gravitációs tér is, így $\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W_{nyomás} + W_{grav}$. Mivel a folyadék összenyomhatatlan: $A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$, felhasználva még, hogy $m = V\rho$, adódik, hogy $p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = állandó$. Ennek egy alkalmazási példája: vízzel (ami azért nem ideális folyadék) töltött medencében két üveglap közé vízsugarat nyomatva a két lap egymás felé szeretne elmozdulni. Hasonló dolog elmondható gázra is, csak akkor a sűrűség, nyomás és térfogat között fel kell írni a kapcsolatokat (állapotegyenlet).

Az Euler-egyenlet az ideális, összenyomhatatlan folyadék mozgásegyenlete. A kontinuumokra vonatkozó egyenletben szereplő feszültségtenzorról feltesszük, hogy konstansszor (-*p*) az egységmátrix, így $\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \nabla p$. átírva a sebesség időderiváltját: $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)(\mathbf{v}) = \mathbf{f} - \nabla p$, ahol **f** származhat pl a gravitációs térből, $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$.

Viszkózus folyadék áramlása, örvények, turbulencia

Tapasztalat, hogy a folyadékok javarésze súrlódásos, így párhuzamosan haladó folyadékrétegek között erő lép fel. Húzzunk egy papírlapot a víz tetején, a függőleges koordináta legyen *y*, ekkor tapasztalat, hogy $F = \eta A \frac{dv}{dy}$, ahol *A* a papír felülete, *v* a folyadékrészek sebessége, és η a dinamikai viszkozitás. A súrlódásos folyadékok mozgásegyenlete a Navier-Stokes egyenlet, mely: $\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)(\mathbf{v})\right) = \mathbf{f} - \nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + (\eta + \eta')\nabla(\nabla \mathbf{v})$. Ennek megoldása roppant nehéz, numerikus szimulációkkal szokás nekilátni.

A folyadékban örvények keletkezhetnek és halhatnak meg. Örvények súrlódó folyadékban pont két réteg egymáson való elmozdulásának következményeként léphet fel. Örvények alakulnak ki evezéskor a vízben is. Ha távolról egyenletes áramlás jön, és egy henger alakú, tengelyével az áramlási sebességre merőleges hengert teszünk a folyadék útjába, kis sebességek esetén még nem alakulnak ki örvények, a megoldás időben állandó lesz, ez a lamináris áramlás. Nagyobb sebességek esetén örvények válnak le a henger mögött, periodikusan, ez a Kármán-féle örvénysor. A periodikusan leváló örvények katasztrófákat okozhatnak, mint a Takoma hídnál. Még nagyobb sebességek esetén a megoldás a henger mögötti térben kb kaotikus lesz, egy adott sávban az áramlási tér a henger mögött véletlenszerű tulajdonságokat mutat, kaotikus lesz, ez a turbulencia.

A katasztrófák elkerülése végett az áramlásokat fontos tanulmányozni, hídnál érdemes modellt építeni. De hogy tudjuk, hogy az egyes paramétereket hogy kell beállítani a modellben ahhoz, hogy a valóságot jól lekicsinyítsük, az áramlásokat jól kell tudnunk hasonlítani egymáshoz. Bevezetve jellemző távolság, sebesség és sűrűség paramétereket, ezekkel a NS egyenlet dimenziótlanítható, a dimenziós mennyiségeket csoportba gyűjtve, az áramlásokat számokkal jellemezhetjük, ilyen a

Reynolds szám. Két áramlás akkor lesz hasonló, ha az áramlás ezen számbeli mutatói (két féle) közel egyenlők.