1. fejezet

A klasszikus mechanika elvei

Virtuális munka elve, D'Alembert-elv, Hamilton-elv. Legkisebb hatás elve. Lagrange-féle elsőfajú és másodfajú mozgásegyenletek. Hamilton függvény, kanonikus egyenletek. Kanonikus transzformációk. Szimmetriák és megmaradási tételek.

1.1. A mechanika elvei

A klasszikus mechanika alapvető törvényeinek megfogalmazását Newton megtette. Azonban ugyanezek az elvek megfogalmazhatóak számos, a Newton-i axiómákkal ekvivalens, azonban matematikailag más alakban, ami sokszor szemléletesebb, illetve egyszerűbb tud lenni. Ezek a mechanika elvei, amelyek nem bizonyítható axiómák, ezek helyességét a tapasztalatok adják.

1.1.1. A virtuális munka elve

Vegyünk egy N anyagi pontból álló mechanikai rendszert, amelynek koordinátái x_i, y_i, z_i, a ható erőt pedig F_i jelöli. Legyen δr_i az i-edik anyagi pontnak a kényszerek által megengedett infinitezimális és virtuális elmozdulása. Itt a virtuális alatt azt értjük, hogy nem tartozik ezen elmozulásokhoz időtartam. A tárgyalt rendszer akkor lesz egyensúlyban, ha a ható erők virtuális munkája zérus:

$$\sum_i F_i \delta r_i = 0 \tag{1.1}$$

Szabad mozgás esetén minden δr_i tetszőleges, tehát az erővektoroknak kell zérusnak lenniük. Ha van N pontunk, akkor azokhoz $3N$ darab koordináta tartozik, és ennél kevesebb kényszerfeltétel lehet adott, különben nincs mozgás. Itt most feltesszük, hogy a kényszereink egy felületre korlátozzák a rendszert, és ezért alakjuk így írható:

$$\phi\left(r_1, r_2 ... r_N\right) = 0 \tag{1.2}$$

A kényszerfeltételek a virtuális elmozdulások alatt is kell, hogy teljesüljenek, ebből valamint egy infinitezimális elmozduláshoz tartozó Taylor-sorfejtésből belátható, hogy a kényszerfeltételek a következő általános alakba írhatóak:

$$\sum_i \nabla_i \phi_k \delta r_i = 0 \qquad k = 1, 2, ..., s < 3N \tag{1.3}$$

Ezeket a Lagrange-multiplikátorok módszerével vehetjük figyelembe: egy ismeretlen λ_k szorzóval hozzáadjuk őket a virtuális munka egyenlethez:

$$\sum_i \left(F_i + \sum_k \lambda_k \nabla_i \phi_k \right) \delta r_i = 0 \tag{1.4}$$

Most a szabad esettel szemben csak (3N-s) darab együttható lesz zérus, de a többinél a Lagrange-multiplikátorokat választjuk úgy, hogy a maradék együtthatók is eltűnjenek. Ekkor úgy tekinthetjük, mintha a virtuális elmozdulások függetlenek lennének, ezért az egyenlőség teljesüléséhez az erők összegének kell zérusnak lennie, ezért:

$$F_i + \sum_k \lambda_k \nabla_i \phi_k = 0 \tag{1.5}$$

A második tagot elnevezhetjük kényszererőknek, és ekkor a az egyensúly feltétele, hogy a szabad és kényszererők összege zérus legyen. A $\lambda_k \nabla_i \phi_k$-s definícióból az is látható, hogy felületen mozgásnál a kényszererő merőleges a felületre (mivel $\nabla_i \phi_k$ a felületi normális irányába mutat).

1.1.2. d'Alembert elv és a Lagrange-féle elsőfajú egyenletek

d'Alembert a virtuális munka elvéhez hasonló kifejezést vezetett be, de az nem csak az egyensúlyt írja le, hanem egyben mozgástörvény is:

$$\sum_i (F_i - \dot{p}_i)\, \delta r_i = 0 \tag{1.6}$$

A mechanikai rendszer az elv értelmében úgy mozog, hogy a fenti kifejezés minden időpillanatban teljesül. Szabad rendszerre ez a Newton mozgásegyenletet adja, hiszen tetszőleges δr_i-re el kell tűnnie a zárójelnek, azaz $F_i = \dot{p}_i$. Ha kényszerek is jelen vannak, akkor ismét a Lagrange-multiplikátoros átalakítást végezzük el:

$$\sum_i \left(F_i + \sum_k \lambda_k \nabla_i \phi_k - p_i \right) \delta r_i = 0 \tag{1.7}$$

A virtuális munka elvéhez hasonlóan itt is formálisan függetlenként kezelhetők a megváltozások, így

$$\dot{p}_i = F_i + \sum_k \lambda_k \nabla_i \phi_k \tag{1.8}$$

Ha feltesszük hogy a tömeg állandó, azaz:

$$\dot{p}_i = m_i \frac{d^2 r}{dt^2}_i \tag{1.9}$$

Akkor megkaphatjuk a Lagrange-féle elsőfajú egyenletek.

$$m_i \frac{d^2 r}{dt^2}_i = F_i + \sum_k \lambda_k \nabla_i \phi_k \tag{1.10}$$

Mivel ezek vektor egyenletek, így tulajdonképpen 3N darab egyenletünk van, és ezenkívül az s darab kényszeregyenlet.

1.1.3. Gauss-féle legkisebb kényszer elve

Bevezette a kényszer mértékét:

$$Z := \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{m_i} \left(m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - X_i \right)^2 \tag{1.11}$$

ahol X_i a szabad erő (a záró jelben az i-dik pont tömegpontnak a szabad mozgástól való eltérése szerepel). Gauss elve a következőt mondja: a kényszerek által megengedett gyorsulásváltozások közül a legkisebb valósul meg. A gyorsulást variálva, a következő alakra hozható:

$$2 \sum_{i=1}^{3N} \left(m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - X_i \right) \delta \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) = 0 \tag{1.12}$$

Ehhez hozzáadva a szokásos módon Lagrange multiplikátorral a kényszereket:

$$\sum_{i=1}^{3N}\left(m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}-X_i-\sum_k\lambda_k\nabla_i\phi_k\right)\delta\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\right) = 0$$

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=X_i+\sum_k\lambda_k\nabla_i\phi_k \tag{1.13}$$

Ezek a már korábban megismert Lagrange-féle elsőfajú egyenletek. Ezzel tulajdonképpen megmutattuk, hogy a Gauss-féle legkisebb kényszer elve a helyes mozgásegyenletekre vezet, tehát egyenértékű a Newton-féle megfogalmazással, vagy a D'Alambert-elvvel.

1.1.4. Általános koordináták

Az eddigi tárgyalásokban a kényszerek, mint független egyenletek voltak figyelembe véve. Ha azonban olyan koordinátákra térünk át, amelyek illeszkednek a kényszerekhez, akkor ezekben ezek a feltételek eltűnnek, így egyszerűbb alakot kapunk a mozgásegyenletekre. Az állítás az, hogy ilyen transzformációk léteznek, az ilyen áttéréssel kapott új koordinátákat általános koordinátáknak nevezzük, és q_k-val jelöljük, az általános sebességeket pedig $\dot{q}_k$ -val. Itt kell megjegyezni, hogy ezek nem feltétlen hosszúság illetve sebesség dimenziójú változók.

Lagrange-féle másodfajú mozgástörvény

Határozzuk meg a mozgásegyenleteket az általánosított koordináták mellett, ehhez induljunk ki a D'Alembert elvből:

$$\sum_i\left(m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}-X_i\right)\delta x_i=0 \tag{1.14}$$

Térjünk át általános koordinátákra:

$$\dot{x}_i = \sum_k\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial x_i}{\partial t} \tag{1.15}$$

$$\delta x_i = \sum_k\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k \tag{1.16}$$

A (1.16) kifejezés nem tartalmazza a δt variációt, mivel a virtuális elmozdulás csak q_k koordinátától függ. Így az általános koordinátákkal a következő alakra hozható a D'Alembert elvet leíró összefüggés:

$$\sum_k\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial K}{\partial q_k}-Q_k\right)\delta q_k=0 \tag{1.17}$$

ahol $K=\frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{x}_i^2$ kinetikus energia és $Q_k=\sum_i X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$ az úgynevezett általánosított erő komponens (általában nem erő dimenziójú, de a $W=\sum_k Q_k\delta q_k$ mindenképp munka dimenziójú).

Ha a ható erők konzervatívak, tehát:

$$X_i=-\nabla_i V \tag{1.18}$$

Akkor a (1.17) egyenlet a következő alakra hozható:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial K}{\partial q_k}-\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial(K-V)}{\partial q_k} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(K-V)}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial(K-V)}{\partial q_k} = 0 \tag{1.19}$$

Az utolsó lépés azért megtehető, mert V csak a helykoordinátáktól függ, és független a $\dot{q}_k$ általános sebesség komponenstől. A rendszer mozgási energiájának és a potenciálisnak a különbségét Lagrange függvénynek nevezzük így:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \tag{1.20}$$

A (1.20) egyenletet nevezzük Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenleteknek.

Hamilton-féle variációs elv és az Euler-Lagrange egyenletek

A Hamilton által kimondott variációs elv, az eddigieken azért mutat túl, mert nem csupán a mechanikai problémák általános megfogalmazásában használható, hanem az optika és a kvantummechanika törvényeit is egyszerűen meg lehet általa fogalmazni. Konzervatív rendszerre az állítás a következő:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = ext. \tag{1.21}$$

A variációszámításból adódnak a mozgásegyenletek:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \tag{1.22}$$

Ezek az Euler-Lagrange egyenletek (Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenletek).

Példa: Rugók mozgása. Legyen két tömegpontunk ami egy-egy rugóval a falhoz van rögzítve és egy rugóval pedig a két test van össze kötve. Legyen minden rugó egyforma ($D_i = D$). Ekkor a Lagrange függvény:

$$L = K - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \frac{1}{2}Dx_1^2 - \frac{1}{2}D\left(x_2 - x_1^2\right) + \frac{1}{2}Dx_2^2 \tag{1.23}$$

amiből a mozgás egyenletek:

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = Dx_2 - 2Dx_1 \tag{1.24}$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = Dx_1 \tag{1.25}$$

Ha a megoldás $x_i = a_i e^{i\omega t}$ alakba keressük, akkor egy sajátérték problémára vezet az egész feladat.

Kanonikus egyenletek, Hamilton-függvény

Az eddig használt Lagrange leírásban másodrendű differenciálegyenletet kaptunk. Az úgynevezett kanonikus egyenletek azzel szemben elsőrendű differenciálegyenleteket szolgáltatnak, amelyek a másodrendűekkel egyenértékűek, azonban kétszer annyi van belőlük. Bevezetjük a kanonikusan konjugált impulzust és a Hamilton-függvényt:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \qquad H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L \tag{1.26}$$

Az Euler-Lagrange egyenletek figyelembevételével, és a Hamilton-függvény teljes differenciájának felhasználásával

$$dH(p,q,t) = \frac{\partial H}{\partial q}dq + \frac{\partial H}{\partial p}dp + \frac{\partial H}{\partial t}dt \tag{1.27}$$

$$= d\left(\sum_k p_k \dot{q}_k - L\right) = pd\dot{q} + \dot{q}dp - \frac{\partial L}{\partial q}dq - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial t}dt \tag{1.28}$$

$$= \quad p d\dot{q} + \dot{q} dp - \dot{p} dq - p d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{1.29}$$

$$= \quad \dot{q} dp - \dot{p} dq - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{1.30}$$

$$\tag{1.31}$$

Tehát ebből leolvashatjuk a kanonikus egyenleteket:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \tag{1.32}$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \tag{1.33}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{1.34}$$

Ha a rendszer konzervatív, és az általánosított koordinátákra való áttérés idő független, akkor a Hamilton-függvény a mechanikai energiát adja. Ennek a formalizmusnak kiemelkedő szerepe van a kvantummechanika és a kvantumtérelméletek tárgyalásánál.

Ciklikus koordináták, kanonikus transzformáció

Ha a Hamilton-függvény nem függ valamely koordinátától, akkor az ahhoz a koordinátához tartozó konjugált impulzus állandó a kanonikus egyenletek miatt, és azonnal megoldást szolgáltat a mozgásegyenletre

$$q_k = \dot{q}_k t + c = \frac{\partial H}{\partial p_k} t + c \tag{1.35}$$

Az ilyen tulajdonságú koordinátát ciklikus koordinátának nevezzük. Értelemszerűen minél több ciklikus koordináták van, annál egyszerűbb megoldani az adott problémát. Ezért érdemes foglalkozni azokkal a transzformációkkal, amelyek változatlanul hagyják a kanonikus egyenleteket, de ciklikus koordinátákra térhetünk át segítségükkel. Ezek a transzformációk tehát olyan koordináták között visznek át, amelyek teljesítik a kanonikus egyenleteket továbbá a variációs elvnek is eleget tesznek (a kanonikus egyenletek is abból származtathatóak). Ezek alapján belátható, hogy a variált funkcionálban van egy szabadságunk egy tetszőleges függvény idő szerinti deriváltjának erejéig. Ezt a függvény nevezzük alkotó függvénynek, mert segítségével kifejezhetőek a transzformációs szabályok. Az alapján, hogy az alkotó függvényt melyik két változóval fejezzük ki a négy (régi és új koordináta, régi és új impulzus) közül, különböző összefüggéseket kapunk a koordináták és az alkotó függvény között, valamint megkapjuk a Hamilton-függvény transzformációját is.

Maupertuis-elv

A Maupertuis-elv energiamegmaradó rendszerekre vonatkozik, vagyis a Lagrange-függvény nem függ explicite az időtől. Az elv kimondja, hogy a rendszer által megtett út olyan, hogy a rövidített hatás

$$S = \int_p dq = min. \tag{1.36}$$

ahol az integrált a pályára vett vonalintegrálként kell érteni.

Liouville-tétel

A Hamilton-i mechanikai rendszerekre kimondható a Liouville-tétel, ami azt fogalmazza meg, hogy nem-disszipatív rendszerre a fázistérfogat állandó marad. Ha ϱ a fázistérbeli eloszlás függvény, és a rendszer d dimenziós:

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \varrho}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \tag{1.37}$$

mivel a fázistérben a pontok sebessége:

$$v = \frac{dR}{dt} = \sum(\dot{q}_i + \dot{p}_i) = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \tag{1.38}$$

a sebesség divergenciája:

$$\nabla\vec{v} = \sum_i \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i \partial p_i} \right) = 0 \tag{1.39}$$

Ez azért fontos egyenlet, mert nem csak egyensúlyi szituációkban használható, hanem sokrészecskés bonyolult dinamikai problémákra is, ezért alapvető fontosságú a statisztikus jelenségek tárgyalásában.

1.2. Szimmetriák és megmaradási tételek

1.2.1. Noether-tétel

Azt mondja ki, hogy minden folytonos szimmetriához tartozik egy megmaradó mennyiség. Tehát ha a rendszer Lagrange függvényének a szimmetriája:

$$q_i : q_i' = q_i + \varepsilon f_i(q, \dot{q}) \tag{1.40}$$

$$\dot{q}_i : \dot{q}_i' = \dot{q}_i + \varepsilon \dot{f}_i(q, \dot{q}) \tag{1.41}$$

akkor a következő mennyiség megmaradó:

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} f_i = \text{áll.} \tag{1.42}$$

mivel

$$L\left(q_i + \varepsilon f_i, \dot{q}_i + \varepsilon \dot{f}_i\right) - L(q_i, \dot{q}_i)\,(=0) = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\varepsilon f_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\varepsilon \dot{f}_i \right) = \varepsilon \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\varepsilon f_i \right) \tag{1.43}$$

A tér homogenitása és az impulzus megmaradás

Ha a rendszer eltolás szimmetrikus akkor egy tetszőleges irányba δr-rel való eltolásra L változatlan, és eltolás során a következőképpen transzformálódnak a vektorok:

$$r_i' = r_i + \delta r \tag{1.44}$$

Így a Noether-tétel (1.42) alapján:

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i p_i = p = \text{áll.} \tag{1.45}$$

A tér izotrópiája és az impulzusmomentum megmaradás

A szimmetria transzformáció eredménye a vektorokra:

$$r_i' = r_i + \delta r_i \qquad \delta r_i = \delta\varphi \vec{e} \times \vec{r} \tag{1.46}$$

$$p_i' = p_i + \delta p_i \qquad \delta p_i = \delta\varphi \vec{e} \times \vec{p} \tag{1.47}$$

A Noether-tétel (1.42) alapján:

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \times \vec{r} = \sum_i p_i \times \vec{r} = \sum_i N_i = N = \text{áll.} \tag{1.48}$$

Az idő homogenitása és az energia megmaradás

Ha a szimmetria műveletünk az időbeli eltolás, azaz

$$t' = t + t_0 \tag{1.49}$$

akkor Noether-tétel (1.42) alapján:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \textbf{áll.} \tag{1.50}$$

A Lagrange függvény általában nem függ explicite az időtől, így ez az állandó a nulla, így láthatjuk, hogy a rendszer energiája megmarad.