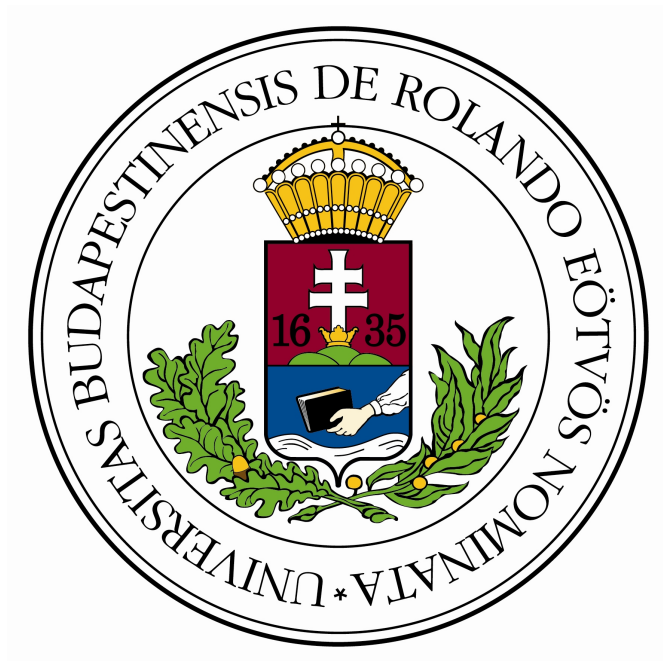


SZAKDOLGOZAT

Bozonikus Húrelmélet Vizsgálata



VARGA BONBIEN

*Fizika BSc., fizikus szakirány
III. évfolyam*

2010. Május

Témavezető:

PROF. HORVÁTH ZALÁN
ELTE, Elméleti Fizikai Tanszék

Tartalomjegyzék

Bevezetés	iii
1. A klasszikus relativisztikus húr vizsgálata	1
1.1. A Nambu-Goto hatás	1
1.2. A mozgásegyenletek	2
1.3. A Nambu-Goto hatás szimmetriái	4
1.3.1. Eltolási szimmetria	4
1.3.2. Lorentz szimmetria	5
1.3.3. Újrparaméterezési invariancia	6
1.4. Fénykúp koordináták és a paraméterezés rögzítése	6
1.5. A mozgásegyenletek megoldása zárt húrokra fénykúp-mértékben	9
2. A kvantumos relativisztikus húr vizsgálata	15
2.1. Zárt hurok kanonikus kvantálása	15
2.1.1. Oscillátor algebra	16
2.1.2. Virasoro operátorok	19
2.1.3. 0 indexű Virasoro operátor	21
2.2. A Lorentz kovariancia következményei	23
2.3. A kvantumos zárt húr állapottere és spektruma	25
3. Zárt húr kompaktifikációja T^{22} tóruszra	31
3.1. A zárt húr kompaktifikációja	31
3.2. A kompaktifikált zárt húr állapottere és spektruma	35
3.3. A zérus tömegű állapotok	37
3.4. Összefoglalás és kitekintés	42
Köszönetnyilvánítás	43
Irodalomjegyzék	44

Bevezetés

*”etad-yanini bhutani
sarvanity upadharaya
aham krtsnasya jagatah
prabhavah pralayas tatha”
(Bhagavad Gita, 7.6)*

Az elméleti fizikai kutatások egyik legfőbb célja az eddig ismert kölcsönhatások és fizikai jelenségek tárgyalása egyetlen elméleti kereten belül. Ezt szokás ”Világelméletnek”(Theory of Everything)” nevezni. Az első példa a kölcsönhatások egyesítésére Maxwell elektrodinamikája, amely egy keretbe foglalta az elektromos és mágneses jelenségeket [15]. Azonban az évek folyamán kiderült, hogy a mikroszkópikus jelenségek leírására nem alkalmasak a klasszikus elméletek, és az 1920-as évektől kezdődően világossá vált, hogy kvantumelméletekre van szükség. Ebből következően ez az egyesített világelmélet szükségszerűen egy kvantumelmélet kell, hogy legyen. Mindezt szem előtt tartva sikerült az elektrodinamikából kvantumelméletet formálni és ezt a gyenge kölcsönhatás elméletével egyesíteni az ú.n. Weinber-Salam (WS) modell keretein belül. Az erős kölcsönhatás kvantumelmélete a kvantumszíndinamika. Utóbbi még nem sikerült egyesíteni a WS modellel. A negyedik, gravitációs kölcsönhatásra érdekes módon nem működnek a kvantálási módszerek. A teljes egységesítéshez viszont szükség van kvantumgravitációra (Egy érthető bevezető ebbe a problémakörbe [8]). Erre több versengő elmélet létezik, közülük az egyik a húrelmélet. Ennek megfelelően a húrelmélet az elméleti fizika legjobban kutatott tárgyai közé tartozik. Többek között azért is mert nem csak a kvantumgravitáció egy lehetséges elmélete, hanem egységesen egy keretben tárgyalja a többi kölcsönhatást is [11].

Jelen dolgozatban a legegyszerűbb ú.n. bozonikus húrelmélettel foglalkozunk. Ezt tulajdonképpen nevezhetjük egy ”játék modellnek”, amely segítségével megismerkedhetünk a húrelmélet szemléletével és matematikai módszereinek egy részével. A valóság leírásához közelebb állnak a szuperhúr modellek, ezekről azonban nem fogunk szót ejteni. Célunk a bozonikus hűrok áttekintése klasszikus és kvantumoz szinten, alapvető tulajdonságaiknak a megismerése és alkalmazásuk egy egyszerű problémára. Érdekes módon a kezdeti általános tárgyalásból a fizikai konzisztencia igencsak lehatárolja az elméletet (A dolgozat során a hűrok közötti kölcsönhatásokra nem térünk ki, azért húr alatt a továbbiakban mindig a ’szabad’ hűrt kell érteni). Többek között látni fogjuk, hogy a téridő dimenziója rögzülni kényszerül. Ez azon-

ban nem a valóságban megszokott 4 téridő dimenzió lesz, hanem 26 (szuperhúrok esetén 10). A problémát úgy fogjuk kezelni, hogy egy sok dimenziós tóruszra kompaktifikáljuk a húrt. Természetesen nyilvánvaló lesz, hogy ez a kompaktifikáció nem használható a valóság fenomenologikus vizsgálatára, márcsak azért sem mert maga a bozonikus húrelmélet egy próba modell. Így ez csupán egy ismerkedés lesz az egyébként igen hatékony kompaktifikáció módszereivel.

A dolgozatban az elmélet alapoktól történő felépítésére törekedtem. Ehhez a húrelmélet klasszikus irodalmát használtam. Az egység és jelölési konvenciókban valamint az elmélet felépítéséhez leginkább a [1] könyvet követtem. A könyv különösen jó, szemléletes bevezetést adott a húrelmélet tárgyaiba. E mellett leginkább a [2] és [3] könyveket használtam. További ötletet és mélyebb áttekintést nyújtott [4]. A Gauge elmélethez valamint kompaktifikációkhoz a [9] és [12] adtak remek bevezetőt.

A dolgozat felépítése a következő: Az első fejezetben a klasszikus relativisztikus húrok dinamikáját tárgyaljuk, kiindulunk a hatásból, levezetjük a mozgásegyenleteket, szót ejtünk a szimmetriákról végül bevezetjük a fénykúp-mértéket és zárt húrokra megoldjuk a mozgásegyenleteket. A második fejezetben kidolgozzuk a kvantumelméletet zárt húrokra, szót ejtünk a normál renddezési gondokról, és meghatározzuk a Lorentz invariancia fennállásának a feltételét, amiből megkapjuk az elmélet kritikus téridődimenzióját. Végül pedig vizsgáljuk a zárt húr spektrumát és azonosítjuk a zérus tömegű állapotokat. A harmadik, utolsó fejezetben, a zárt húrt kompaktifikáljuk egy 22 dimenziós tóruszra, megadjuk a spektrumot és beletekintünk a zérus tömegű állapotokba. Látni fogjuk, hogy egy bizonyos kompaktifikációs sugárnál további zérus tömegű állapotok lépnek fel.

1. fejezet

A klasszikus relativisztikus húr vizsgálata

Ebben a fejezetben áttekintjük a klasszikus relativisztikus húr alapvető tulajdonságait. A dinamikát hatáselvből kiindulva tárgyaljuk. A hatás szimmetriáinak a felhasználásával levezetjük az egyszerű mozgásegyenleteket, majd a fejezet utolsó szakaszában megoldjuk őket. A dolgozat során végig természetes egységekben fogunk dolgozni, azaz most rögzítjük $\hbar = 1$ és $c = 1$.

1.1. A Nambu-Goto hatás

A fizikai problémák legegyszerűbben hatáselveken keresztül tárgyalhatók. Éppen ezért célszerű megfogalmaznunk egy hatáselvet a relativisztikus húrra, amelyből könnyen származtathatjuk a mozgásegyenleteit és vizsgálhatjuk a dinamikáját. Ez lesz a Nambu-Goto hatás.

A relativisztikus húrra vonatkozó hatást érdemes a relativisztikus (szabad) részecske hatásának általánosítás-aként keresni. Ezt szem előtt tartva elevenítsük fel a relativisztikus (szabad) részecske hatását:

$$S_r = -m \int ds \tag{1.1}$$

ahol ds a részecske világvonal ívelemének a hossza.

Az (1.1) hatás szemmel láthatóan Lorentz invariáns, ugyanis az ívelem hossza egy Lorentz invariáns mennyiség. Próbáljunk általánosítani!

Mivel a húr egy 1 dimenziós objektum, ezért a mozgása egy 2 dimenziós felület mentén történik a téridőben. Nevezzük ezt a felületet a pontrészecske analógiájára, 'világfelületnek'.

A részecske esetén a hatásban a világvonal ívelemére integráltunk, a húr esetén

integráljunk tehát a világfelület felületelemére. A 2 dimenziós felületeket két mennyiséggel tudjuk paraméterezni. Legyenek ezek a paraméterek az irodalmi jelöléseknek megfelelően τ és σ . Nem mondtunk még semmit a téridő dimenziójáról. Legyen a téridő D dimenziós, ebből $d = D - 1$ a tér dimenzió.

Jelöljük a (τ, σ) paramétertér egy pontját a D dimenziós téridőbe képező függvényeket $X^\mu(\tau, \sigma)$ -val. Ezek a függvények adják meg a húr a téridőben és a paraméterteret a világfelületre képezik.

A felületelem kiszámítását az alap vektoranalízis tanulmányainkból ismerhetjük:

$$dA = \sqrt{\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\nu}{\partial \sigma}\right)} \quad (1.2)$$

A Minkowski metrikát $(-1, 1, 1, 1 \dots 1)$ szignatúrájának választottuk valamint az Einstein összegzési konvenciót használjuk.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$X'_\mu \equiv \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \quad \dot{X}_\mu \equiv \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau} \quad (1.3)$$

$$\gamma_{ab} = \begin{pmatrix} \dot{X} \cdot \dot{X} & \dot{X} \cdot X' \\ \dot{X} \cdot X' & X' \cdot X' \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Ahol (1.4)-ben a pont szorzat alatt a Minkowski skalár szorzatot értjük.

Az (1.2) felületelemet átírva a fent bevezetett jelölésekkel a Nambu-Goto hatás:

$$S_{\text{NG}} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det(\gamma_{ab})} \quad (1.5)$$

Itt α' az ún. Regge lejtő paraméter. Ez a húr nyugalmi feszültségét jellemzi.

(1.5)-ből leolvashatjuk a Lagrange-sűrűséget:

$$L(\dot{X}, X') = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \sqrt{-\det(\gamma_{ab})} \quad (1.6)$$

Láthatóan (1.5)-ben csak Lorentz skalárok fordulnak elő így maga a Nambu-Goto hatás is Lorentz skalár.

1.2. A mozgásegyenletek

Az előző szakaszban bevezetett (1.5) hatás variációjának zérussá tételével meg tudjuk adni a mozgásegyenleteket.

$$\delta S_{NG} = \int d\tau d\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} \delta \dot{X}^\mu + \frac{\partial L}{\partial X^{\mu'}} \delta X^{\mu'} \right) = \quad (1.7)$$

$$= \int d\tau d\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} \frac{\partial}{\partial \tau} (\delta X^\mu) + \frac{\partial L}{\partial X^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial \sigma} (\delta X^\mu) \right) \quad (1.8)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$P_\mu^\tau = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{-\det(\gamma_{ab})}} \quad (1.9)$$

$$P_\mu^\sigma = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^{\mu'}} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X'_\mu}{\sqrt{-\det(\gamma_{ab})}} \quad (1.10)$$

Elvégezve a parciális integrálást:

$$\delta S_{NG} = \int d\sigma [P_\mu^\sigma \delta X^\mu]_{\tau_1}^{\tau_2} + \int d\tau [P_\mu^\tau \delta X^\mu]_{\sigma_1}^{\sigma_2} - \int d\sigma d\tau \left(\frac{\partial P_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial P_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) \delta X^\mu \quad (1.11)$$

Ahol σ_i a húr végpontjainak megfelelő paraméter értékek a paramétertartományban.

Az (1.11) egyenletet zérussá téve megkapjuk a mozgásegyenletet:

$$\frac{\partial P_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial P_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0 \quad (1.12)$$

Emellett még határfeltételeket kapunk. Az (1.11) egyenlet jobboldali első tagját eleve tekintsük zérusnak. Ezt megtehetjük, ugyanis a τ paraméter a világfelületi időt jellemzi. Úgy variálunk tehát, hogy a kezdeti és végállapotot rögzítjük.

A másik határfeltételt többféleképpen tudjuk kielégíteni. Az egyik lehetőség az, hogy a húrt zártnak tekintjük. Ekkor ez a tag automatikusan eltűnik, így teljesül a határfeltétel. A másik lehetőség, hogy nyíltnek tekintjük. Ekkor rögzíthetjük a végpontjait, vagy a P_μ^σ kanonikus impulzussűrűséget tesszük nullává a végpontjain. Mivel mi most szabad húrokat vizsgálunk, ezért az utóbbi határfeltételt fogjuk teljesíteni. Az első határfeltételt úgy valósíthatjuk meg, hogy a végpontokat ún. D-bránokra erősítjük, és ezek kollektív dinamikáját vizsgáljuk. A D-bránok vizsgálatára azonban most nem fogunk kitérni.

A hatás variációja tehát a mozgásegyenlet mellett zárt húrokra mindig eltűnik, nyílt húrok esetén pedig a mozgásegyenlet mellett az alábbi határfeltétel szükséges:

$$P_\mu^\sigma|_{\sigma_1}^{\sigma_2} = 0 \quad (1.13)$$

Láthatjuk, hogy az (1.9) és (1.10) kifejezéseket az (1.11) mozgásegyenletbe helyettesítve igen bonyolult, megoldhatatlannak látszó egyenleteket kapunk. A következő szakaszban azonban látni fogjuk, hogy az egyenletek lényegesen leegyszerűsíthetők a hatás szimmetriáinak a felhasználásával.

1.3. A Nambu-Goto hatás szimmetriái

Az előző szakaszban láthattuk, hogy a mozgásegyenletek igen bonyolultak. A helyzetünk könnyítése érdekében, térjünk vissza az (1.5) Nambu-Goto hatáshoz és vizsgáljuk meg a szimmetriáit. Látni fogjuk, hogy a szimmetriák felhasználásával a mozgásegyenletek nagyon lefognak egyszerűsödni.

Elevenítsük fel a hatást:

$$S_{NG} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det(\gamma_{ab})} \quad (1.14)$$

A szimmetriák kezeléséhez ismerünk egy nagyon jó eszközt, a Noether tételt. E szerint, ha létezik egy olyan transzformáció amely a mozgásegyenleteket invariánsan hagyja, akkor ehhez a transzformációhoz tartozik egy megmaradó áram, a Noether áram. Az ilyen transzformációk azok, amelyek következtében a hatás legfeljebb egy felületi taggal változik, azaz a Lagrange sűrűség legfeljebb egy teljes deriválttal. Az alábbiakban megvizsgálunk néhány ilyen transzformációt és a Noether eljárás szerint a j_μ^k megmaradó áramokat a következőképpen tudjuk megadni:

$$\varepsilon^\mu j_\mu^a = \frac{\partial L}{\partial(\partial_a X^\mu)} \delta X^\mu \quad (1.15)$$

Ahol ε^μ konstans, a világfelületi indexek.

Láthatóan (1.15)-re:

$$\partial_a j_\mu^a = 0 \quad (1.16)$$

kontinuitási egyenlet teljesül.

1.3.1. Eltolási szimmetria

A Lagrange sűrűségben csak a koordináták deriváltjai szerepelnek, ezért az invariants lesz a konstans téridő eltolásokra. Adjuk meg a Noether áramot! A transzformáció: $\delta X^\mu = \varepsilon^\mu$. Az (1.15) egyenlet alapján a Noether áram:

$$j^{\alpha\mu} = P^{\alpha\mu} \quad (1.17)$$

Ahol $P^{\tau\mu}$ és $P^{\sigma\mu}$ az (1.9) illetve (1.10) egyenletekben bevezetett mennyiségek. Ezeket tehát a téridőeltolások generálják ezért értelemszerűen nevezhetjük őket kanonikus impulzussűrűségnek. A hozzájuk tartozó kontinuitási egyenlet éppen a mozgásegyenleteket adja.

Képezzük most a Noether töltést:

$$p^\mu = \int_0^{\sigma_1} d\sigma P^{\tau\mu} \quad (1.18)$$

Ahol $\sigma_1 = \pi$ nyílt valamint $\sigma = 2\pi$ zárt húrok esetén. Vegyük ennek a τ szerinti deriváltját:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{\partial P^{\tau\mu}}{\partial \tau} = -P^{\sigma\mu} \Big|_0^{\sigma_1} = 0 \quad (1.19)$$

ahol felhasználtuk az (1.12) mozgásegyenletet továbbá az utolsó egyenlőség zárt húrok esetén természetes, nyílt húrok esetén pedig az (1.13) határfeltételből következik.

Tehát az téridőeltolásokhoz tartozó Noether töltés, amit impulzusnak nevezünk, egy megmaradó mennyiség a világfelületen.

1.3.2. Lorentz szimmetria

Nyilvánvaló szimmetria továbbá a Lorentz szimmetria, sőt a fentiekkel együtt lathatóan a konstans téridő eltolásokra is invariáns, vagyis a Poincare invariancia is teljesül. Ismert, hogy az infinitezimális Lorentz transzformációkat az alábbi módon adhatjuk meg:

$$\delta X^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} X_\nu \quad (1.20)$$

Ahol $\varepsilon^{\mu\nu}$ antiszimmetrikus. Hasonlóan az előzőekhez az (1.15) összefüggés alapján felírhatjuk a Noether áramot amely $\varepsilon^{\mu\nu}$ antiszimmetrikusságát felhasználva és néhány konstans tagtól eltekintve, az alábbi alakra hozható:

$$j_{\mu\nu}^a = X_\mu P_\nu^a - X_\nu P_\mu^a \quad (1.21)$$

A Lorentz töltés:

$$J_{\mu\nu} = \int_0^{\sigma_1} (X_\mu P_\nu^\tau - X_\nu P_\mu^\tau) d\sigma \quad (1.22)$$

az impulzushoz hasonlóan erről is belátható, hogy megmaradó mennyiség a világfelületen.

1.3.3. Újraparaméterezési invariancia

Gondolkodjunk el azon, hogy mi történne akkor, ha a világfelület egy másik paraméterezését vizsgálnánk. A fizikának nyilván nem kéne változnia. Vizsgáljuk meg ezért a Nambu-Goto hatás viselkedését a paraméterezés változtatására!

$$(\tau, \sigma) \rightarrow (\tilde{\tau}, \tilde{\sigma}) \quad (1.23)$$

Legyen J a transzformáció Jacobi determinánsa. Az integrálási mérték transzformációja:

$$d\tilde{\sigma}d\tilde{\tau} = |J|d\sigma d\tau \quad (1.24)$$

Ismerjük a metrika transzformációs tulajdonságait:

$$\gamma_{ab}(\xi) = \tilde{\gamma}_{kl}(\tilde{\xi}) \frac{\partial \tilde{\xi}^k}{\partial \xi^a} \frac{\partial \tilde{\xi}^l}{\partial \xi^b} \quad (1.25)$$

Vegyük mindkét oldal determinánsát:

$$\det \gamma_{ab} = \det (\tilde{\gamma}_{ab}) J^2 \implies \sqrt{-\det (\gamma_{ab})} = \sqrt{-\det (\tilde{\gamma}_{ab})} |J| \quad (1.26)$$

Vagyis a Nambu-Goto hatás:

$$\int d\tilde{\tau}d\tilde{\sigma} \sqrt{-\det (\tilde{\gamma}_{ab})} = \int d\tau d\sigma |J| \sqrt{-\det \gamma_{ab}} \frac{1}{|J|} = \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det \gamma_{ab}} \quad (1.27)$$

Azt kaptuk tehát amit vártunk, a hatás invariáns az újraparaméterezésekre. Ebből következően akármilyen paraméterezését választhatjuk a világfelületnek. Olyat fogunk választani amellyel a mozgásegyenletek lényegesen leegyszerűsödnek. Természetesen a leegyszerűsödött mozgásegyenletek mellé a paraméterezés rögzítéséből adódó kényszereket fogunk majd kapni.

1.4. Fénykúp koordináták és a paraméterezés rögzítése

A kvantálás egyszerű elvégzése érdekében érdemes áttérni új téridő koordinátákra. Ezeket fénykúp koordinátáknak fogjuk hívni!

Legyen a^μ tetszőleges vektor. Definiáljuk a következőket:

$$a^+ = \frac{a^0 + a^1}{\sqrt{2}} \quad a^- = \frac{a^0 - a^1}{\sqrt{2}} \quad (1.28)$$

tehát az első két koordinátát cseréljük le újakra. Az a^μ vektor tehát $a^\mu = (a^+, a^-, a^2, a^3 \dots a^{D-1})$. Definiáljuk még az alsó indexes fénykúpkoordinátákat:

$$a_+ = -a^- \quad a_- = -a^+ \quad (1.29)$$

Könnyen belátható, hogy két a^μ, b^μ vektor skaláris szorzata a fénykúpkoordinátákkal kifejezve az alábbi:

$$a^\mu b_\mu = -a^+ b^- - a^- b^+ + a^I b^I \quad (1.30)$$

ahol $I = 2, 3, \dots, D-1$, és természetesen erre összegzés van. Megmutatható továbbá, hogy a fénykúp indexek ugyanúgy viselkednek mint a hagyományos Lorentz indexek, ezért minden Lorentz indexes kifejezés módosítás nélkül átvihető fénykúpos indexekre.

Most rátérhetünk a paraméterezés rögzítésére. Először adjuk meg a τ paraméterezést! Használjuk az imént bevezetett fénykúpindexeket és definiáljuk a fénykúp mértéket a τ paraméterre a következő módon (a fénykúp mértéket a bozonikus hurok kvantálására vezették be [6]):

$$X^+ = \beta p^+ \alpha' \tau \quad (1.31)$$

ahol $\beta = 2$ nyílt hurok, és $\beta = 1$ zárt hurok esetén. Erre azért van szükség, hogy könnyen kezelhessük a nyílt és zárt hurok különböző paramétertartományát. Továbbá az előző szakaszban láttuk, hogy p^+ egy megmaradó mennyiség a világfelületen, α' dimenziós okokat szolgál.

Hátra van még a σ paraméterezés rögzítése. Ehhez először vizsgáljuk meg az (1.9) $P^{\tau\mu}$ kanonikus impulzussűrűség transzformációs tulajdonságát a σ paraméterre.

Először is az $X^\mu(\tau, \sigma) = \tilde{X}^\mu(\tau, \tilde{\sigma})$. Vagyis a húrkoordináták skalárként transzformálódnak. A számlálóban tehát a σ szerinti deriválások miatt kapunk egy $(d\sigma/d\tilde{\sigma})^2$ faktort, a nevezőből pedig a determináns előbb látott transzformációs tulajdonsága alapján egy ugyancsak egy $d\sigma/d\tilde{\sigma}$. Összességében marad tehát:

$$\tilde{P}^{\tau\mu}(\tau, \tilde{\sigma}) = \frac{d\sigma}{d\tilde{\sigma}} P^{\tau\mu}(\tau, \sigma) \implies \tilde{P}^{\tau+}(\tau, \tilde{\sigma}) = \frac{d\sigma}{d\tilde{\sigma}} P^{\tau+}(\tau, \sigma) \quad (1.32)$$

Ez azt jelenti, hogy ha van egy húr amelynek paraméterezése σ és megadok egy másik $\tilde{\sigma}$ paraméterezést, akkor ezt választhatom olyannak, hogy a $d\sigma/d\tilde{\sigma}$ faktor éppen kiejtse $P^{\tau+}(\tau, \sigma)$ -nak a σ függését. Ezután egy átskálázással a $\tilde{\sigma}$ paramétertartományát is megválaszthatjuk a σ függetlenség megtartásával. Vagyis ezután $P^{\tau+}(\tau, \sigma) = \phi(\tau)$ csak a τ -tól fog függeni [1].

Ezzel a kitétellel rögzítettük a σ paraméterezést. Nézzük a következményeit. Először is belátjuk, hogy ez esetben $P^{\tau+}(\tau, \sigma)$ a σ mellett τ -tól sem függ!

Integráljuk a húrra:

$$\int_0^{\sigma_1} d\sigma P^{\tau+}(\tau, \sigma) = p^+ \quad (1.33)$$

$$\int_0^{\sigma_1} d\sigma P^{\tau+}(\tau, \sigma) = \int_0^{\sigma_1} d\sigma \phi(\tau) = \phi(\tau) \sigma_1 = p^+ \quad (1.34)$$

Tehát $\phi(\tau) = p^+/\sigma_1$.

p^+ -ről viszont tudjuk, hogy konstans, ezért $\phi(\tau)$ is egy konstans azaz $P^{\tau+}(\tau, \sigma)$ τ -tól sem függ! Legyen továbbá $\sigma_1 = 2\pi/\beta$.

A következő módon rögzítjük tehát a fénykúp mértékbeli σ paraméterezést:

$$P^{\tau+} = \frac{\beta}{2\pi} p^+ \quad (1.35)$$

Vizsgáljuk most meg ennek a következményeit! Először is az (1.12) mozgásegyenlet szerint:

$$\frac{\partial P^{\tau+}}{\partial \tau} + \frac{\partial P^{\sigma+}}{\partial \sigma} = 0 \quad (1.36)$$

A rögzített paraméterezésben a baloldal első tagja nulla. Ez azt jelenti, hogy a második tagnak is nullának kell lennie:

$$\frac{\partial P^{\sigma+}}{\partial \sigma} = 0 \quad (1.37)$$

vagyis $P^{\sigma+}$ független σ -tól. Tehát, ha a húr egy pontjában zérus, akkor minden pontban zérus lesz. Az általunk vizsgált nyílt húrok esetén ez az (1.13) határfeltétel következtében $P^{\sigma+}$ a húr végpontjaiban zérus lesz, ezáltal a fenti egyenlet szerint minden pontban eltűnik.

Zárt húrok esetén kicsit más a helyzet. Nem rögzítettük még teljesen a paraméterezést, ugyanis nem egyértelmű a $\sigma = 0$ pont megválasztása különböző τ értékek esetén. Nézzünk egy rögzített τ -t. Ez egy húrt ad meg. Válasszuk ki ezen a húron a $\sigma = 0$ pontot tetszőlegesen. A többi τ esetén pedig úgy, hogy $P^{\sigma+} = 0$ teljesüljön.

Tehát $P^{\sigma+} = 0$ nyílt és zárt húrok esetén. Ezt írjuk be az (1.10) egyenletbe és használjuk fel az (1.31) feltételt :

$$P^{\sigma+} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X')\dot{X}^+ - (\dot{X})^2 X'^+}{\sqrt{-\det(\gamma_{ab})}} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X')\beta p^+\alpha'}{\sqrt{-\det(\gamma_{ab})}} = 0 \quad (1.38)$$

Vagyis:

$$\dot{X} \cdot X' = 0 \quad (1.39)$$

A fenti kifejezést az (1.9) egyenletbe írva és az (1.35) feltételt használva egyszerű számolással a következő adódik:

$$(X')^2 + (\dot{X})^2 = 0 \quad (1.40)$$

Ezt a két feltételt egy közös egyenletbe írhatjuk:

$$(X' \pm \dot{X})^2 = 0 \quad (1.41)$$

A paraméterezés rögzítésével tehát kényszereket kaptunk a húrkoordinátákra, amelyeket a mozgásegyenletek tanulmányozásánál figyelembe kell vennünk. Kezdetről fogva az volt a célunk, hogy az igen bonyolult mozgásegyenleteket leegyszerűsítsük. Az imént kiválasztottunk egy paraméterezést. Nézzük meg milyenek lesznek a mozgásegyenletek! Először az (1.39) és (1.40) feltételek felhasználásával egyszerűsítsük az (1.9) valamint (1.10) kanonikus impulzussűrűségeket. Rögtön adódik, hogy

$$P^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu, \quad P^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X^{\mu'} \quad (1.42)$$

Ahonnán az (1.12) mozgásegyenletek:

$$\ddot{X}^\mu = X^{\mu''} \quad (1.43)$$

Ennél egyszerűbbek már nem is lehetnének a mozgásegyenletek. Láthatóan sima hullámegyenleteket kaptunk, amelyek megoldása egyszerű és közismert. Az egyenletek mellett vannak a kényszerfeltételeink, nyílt húrok esetén a határfeltételek, zárt húrok esetén pedig a periodicitási feltételek.

1.5. A mozgásegyenletek megoldása zárt húrokra fénykúp-mértékben

Az előző szakaszban rögzítettük a paraméterezést és jelentősen leegyszerűsödtek a mozgásegyenletek. Kaptunk viszont kényszereket a mozgásegyenletek mellé.

$$\ddot{X}_\mu = X_\mu'' \quad (1.44)$$

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0 \quad (1.45)$$

Oldjuk most meg a kényszerekkel kiegészített mozgásegyenleteket zárt húrokra!

A D’alembert megoldás:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}(X_L^\mu(\tau + \sigma) + X_R^\mu(\tau - \sigma)) \quad (1.46)$$

$X_L(u)$ a balra terjedő hullámokat írja le, míg $X_R(v)$ a jobbra terjedő hullámokat.

A zárt húr paraméter tartományát a $[0, 2\pi]$ intervallumra rögzítettük. Tehát a következő periodicitási feltételt kapjuk (ezzel az azonosítással definiáljuk a zárt húrokat):

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) \quad (1.47)$$

Ezzel a teljes megoldás:

$$X_L^\mu(\tau + \sigma) + X_R^\mu(\tau - \sigma) = X_L^\mu(\tau + \sigma + 2\pi) + X_R^\mu(\tau - \sigma - 2\pi) \quad (1.48)$$

bevezetve az $u = \tau + \sigma$ és $v = \tau - \sigma$ változókat a fenti egyenletet átrendezve:

$$X_L(u + 2\pi) - X_L(u) = X_R(v) - X_R(v - 2\pi) \quad (1.49)$$

a fenti egyenlet egyes oldalait pl. u szerint deriválva láthatjuk, hogy a jobboldal nulla lesz ezáltal az $X_L(u)$ függvény deriváltja 2π -vel periodikus. Hasonlóan az $X_R(v)$ függvény deriváltja is 2π -vel periodikus. Ez azt jelenti, hogy Fourier-sorba fejthetjük őket:

$$X_L^{\mu'}(\tau, \sigma) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)} \quad (1.50)$$

$$X_R^{\mu'}(\tau, \sigma) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} \quad (1.51)$$

Az egyenleteket integrálva:

$$X_L^\mu(\tau, \sigma) = x_{L0}^\mu + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \bar{\alpha}_0^\mu(\tau + \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \bar{\alpha}_n^\mu \frac{e^{-in(\tau+\sigma)}}{n} \quad (1.52)$$

$$X_R^\mu(\tau, \sigma) = x_{R0}^\mu + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \alpha_0^\mu(\tau - \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^\mu \frac{e^{-in(\tau-\sigma)}}{n} \quad (1.53)$$

Használjuk fel a periodicitási feltételt. Láthatóan az integrálási állandók és az exponenciális tagok kiesnek és a nulla indexű Fourier együtthatókra kapunk egy feltételt:

$$\bar{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu \quad (1.54)$$

Ezt felhasználva a teljes megoldás:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{x_{L0}^\mu + x_{R0}^\mu}{2} + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} (\bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma} + \alpha_n^\mu e^{in\sigma}) \frac{e^{-in\tau}}{n} \quad (1.55)$$

Deriváljuk a fenti megoldást τ szerint és számoljuk ki a p^μ impulzust:

$$p^\mu = \int_0^{2\pi} d\sigma P^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma \dot{X}^\mu = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \alpha_0^\mu \quad (1.56)$$

Láthatóan az α_0^μ Fourier komponensek a p^μ impulzust adják meg. Az integrálási konstansokat egymásba olvashatjuk, ezt a konstans jelöljük x_0^μ -vel. Ezzel tehát a teljes megoldás:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} (\bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma} + \alpha_n^\mu e^{in\sigma}) \frac{e^{-in\tau}}{n} \quad (1.57)$$

Írjuk fel a fenti teljes megoldást fénykúp koordinátákban! A $+$ komponenst már ismerjük, ugyanis az (1.31) feltételben ezzel rögzítettük a fénykúp mértéket:

$$X^+ = p^+ \alpha' \tau = \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^+ \tau \quad (1.58)$$

Összevetve (1.57)-tel: $x_0^+ = 0$ és $\alpha_n^+ = \bar{\alpha}_n^+ = 0$ ha $n \neq 0$.

A másik két komponens:

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^-\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} (\bar{\alpha}_n^- e^{-in\sigma} + \alpha_n^- e^{in\sigma}) \frac{e^{-in\tau}}{n} \quad (1.59)$$

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} (\bar{\alpha}_n^I e^{-in\sigma} + \alpha_n^I e^{in\sigma}) \frac{e^{-in\tau}}{n} \quad (1.60)$$

Érdekes összefüggést kapunk ha, megvizsgáljuk az (1.45) kényszerfeltételt fénykúp koordinátákban! Az (1.30) szorzási szabály szerint:

$$(\dot{X} \pm X')^2 = -2(\dot{X}^+ \pm X^{+'})(\dot{X}^- \pm X^{-'}) + (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2 = 0 \quad (1.61)$$

Felhasználva (1.31)-et:

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{2\alpha' p^+} (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2 \quad (1.62)$$

Természetesen ez csak akkor értelmes ha $p^+ \neq 0$. Ha megengednénk a zérus értéket az azt jelentené, hogy a p^1 impulzusnak kéne egyeznie az energia minusz egyszeresével, ez pedig csak akkor fordulhatna elő ha egy tömeg nélküli részecske mozogna a $-x^1$ irányba. Általában nem ez a helyzet ezért feltehetjük, hogy $p^+ \neq 0$. Viszont ha $p^+ = 0$ előfordul akkor nem alkalmazhatjuk a fénykúp mértéket.

Az (1.62) összefüggésre ránézve láthatjuk, hogy ha ismerjük az X^I koordinátákat valamint a p^+ impulzust, akkor megadhatjuk az X^- koordináták deriváltjait. Továbbá ha ismerjük X^- -t egy adott x_0^- pontban akkor a deriváltak felhasználásával egy tetszőleges pontban is megadhatók. Azonban mi most zárt húrokat vizsgálunk, ezért van még egy konzisztencia feltétel. Tegyük fel ugyanis, hogy integráljuk a deriváltakat és megkapjuk az X^- értékét. A konzisztencia érdekében teljesülnie kell annak, hogy a világfelület egy tetszőleges zárt kontúrja mentén, például egy állandó τ mentén integrálva zérust kapjunk. Ez nem feltétlenül garantált, ezért külön megszorításként elő kell írunk:

$$\int_0^{2\pi} d\sigma \frac{\partial X^-}{\partial \sigma} = 0 \quad (1.63)$$

Összefoglalva, a teljes mozgást megtudjuk adni a következő mennyiségekkel: x_0^-, p^+, X^I .

Felvetődik a kérdés, hogyan néz ki az (1.62) egyenlőség a Fourier komponensek szintjén? Az (1.55) megoldás alapján egyszerű számolással adódik:

$$\dot{X}^\mu + X^{\mu'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)} \quad (1.64)$$

$$\dot{X}^\mu - X^{\mu'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} \quad (1.65)$$

Először írjuk csak be a fenti (1.64) összefüggést (1.62)-be, és vizsgáljuk ezt az esetet:

$$\sqrt{2\alpha'} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{\alpha}_k^- e^{-ik(\tau+\sigma)} = \frac{1}{2p^+\alpha'} 2\alpha' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\alpha}_n^I e^{-in(\tau+\sigma)} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \bar{\alpha}_l^I e^{-il(\tau+\sigma)} \quad (1.66)$$

Bevezetve a jobb oldalon a $k = l + n$ indexet majd rendezve és a megfelelő tagokat a két oldalon egyenlővé téve:

$$\bar{\alpha}_k^- = \frac{1}{p^+ \sqrt{2\alpha'}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\alpha}_{k-n}^I \bar{\alpha}_n^I \quad (1.67)$$

Vezessük be a következő mennyiséget:

$$\bar{L}_k = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\alpha}_{k-n}^I \bar{\alpha}_n^I \quad (1.68)$$

Nevezzük ezt Virasoro módusnak. (1.67) így:

$$\sqrt{2\alpha'} \bar{\alpha}_k^- = \frac{2}{p^+} \bar{L}_k \quad (1.69)$$

Ugyanezt elvégezhetjük az (1.65) vonás nélküli Fourier-módusokra, és hasonló eredményeket kapunk. Nézzük részletesebben a $k = 0$ esetet. Erre kaptuk az (1.54) feltételt. A Virasoro módusokra ez fenti egyenlet alapján a következőt jelenti:

$$\bar{L}_0 = L_0 \quad (1.70)$$

A kvantálásnál ennek fontos következményei lesznek.

Végül határozzuk meg a tömeg-négyzetet!

$$M^2 = -p^\mu p_\mu = 2p^+ p^- - p^I p^I = \frac{2}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{\alpha}_{-n}^I \bar{\alpha}_n^I + \alpha_{-n}^I \alpha_n^I) - p^I p^I = \frac{2}{\alpha'} (\bar{L}_0 + L_0) - p^I p^I \quad (1.71)$$

Ezzel tehát megoldottuk a klasszikus zárt hurok problémáját a fénykúp mérték formalizmusban, és részleteiben elemeztük. Összefoglalva tehát a zárt húr teljes mozgását megadhatjuk az x_0^-, p^+ valamint X^I ismeretében. Fourier módusokkal kifejezve x_0^-, α_0^+ és x_0^I továbbá $\bar{\alpha}_n^I, \alpha_n^I$ ahol n egész szám.

2. fejezet

A kvantumoz relativisztikus húr vizsgálata

Az előző fejezetben a klasszikus húrt vizsgáltuk. A hangsúlyt leginkább a zárt húrra fektettük és meg is oldottuk a mozgásegyenleteit a bevezetett fénykúp mértékben. A most következő fejezetekben aratjuk le a mértékválasztás babérjait. Először kvantálni fogjuk a zárt húrokat, majd a kvantálás fizikai elvekkel való konzisztenciájából vonunk le fontos következtetéseket. Végül részletesebben vizsgáljuk a zárt húr spektrumát.

2.1. Zárt hurok kanonikus kvantálása

Először is meg kell adnunk a dinamikai változóinkat amelyekből felépítjük a kvantumelméletet. Az előző fejezetben láttuk, hogy az X^I , p^+ valamint x_0^- változók meghatározzák a húr mozgását. Az $X^I(\tau, \sigma)$ változó kanonikusan konjugált impulzusa $P^{\tau I}(\tau, \sigma)$, az x_0^- változóé p^+ . Látni fogjuk, hogy ez egy jó választás lesz.

A klasszikus Poisson zárójelek ez alapján:

$$\{P^{\tau I}(\tau, \sigma), X^J(\tau, \sigma')\} = \eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma') \quad (2.1)$$

$$\{P^{\tau I}(\tau, \sigma), P^{\tau J}(\tau, \sigma')\} = \{X^I(\tau, \sigma), X^J(\tau, \sigma')\} = 0 \quad (2.2)$$

A fentiek mintájára legyen:

$$\{p^+, x_0^-\} = \eta^{+-} = -1 \quad (2.3)$$

Az összes többi kommutátor zérus.

A kanonikus kvantálás ismert módszere szerint a kvantumelmélet operátorainak kommutátorait úgy kapjuk, hogy a Poisson zárójeleket egy i szorzóval látjuk el. Vagyis a kvantumelméletünk kommutátorai:

$$[P^{I}(\tau, \sigma), X^J(\tau, \sigma')] = -i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma') \quad (2.4)$$

$$[P^{\tau I}(\tau, \sigma), P^{\tau J}(\tau, \sigma')] = [X^I(\tau, \sigma), X^J(\tau, \sigma')] = 0 \quad (2.5)$$

Valamint:

$$[p^+, x_0^-] = -i\eta^{+-} = i \quad (2.6)$$

A további kommutátorok pedig mind eltűnnek.

Ezek a zárójelekben lévő mennyiségek már természetesen mind operátorok.

2.1.1. Oscillátor algebra

Határozzuk meg, hogy a klasszikus Fourier módusoknak megfelelő operátoroknak, mik lesznek a kommutációs relációi. Azt szeretnénk, hogy a húrkoordináta és impulzussűrűség operátorokra ugyanaz a kifejtés legyen érvényes, mint a klasszikus esetben. Milyen Hamilton operátor fogja ezt a feltételt teljesíteni?

Definiáljuk a p^- operátort a klasszikusnak megfelelően. Ekkor p^- fogja generálni az X^+ operátor transzlációját (Ezt az operátort az (1.31) mértékfeltétellel definiáljuk). Vagyis a τ transzláció:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial X^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial X^+} = \alpha' p^+ \frac{\partial}{\partial X^+} \quad (2.7)$$

Tehát a Hamilton operátor:

$$H = \alpha' p^+ p^- \quad (2.8)$$

A Heisenberg egyenlet segítségével belátható, hogy ezzel a Hamilton operátorral Heisenberg képből az operátoraink a klasszikus elmélet egyenleteit teljesítik, ezért a kifejtések áthozhatók a kvantumelméletbe.

Elevenítsük fel az (1.64) valamint (1.65) egyenleteket a transzverzális koordinátákra :

$$\dot{X}^I + X^{I'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\alpha}_n^I e^{-in(\tau+\sigma)} \quad (2.9)$$

$$\dot{X}^I - X^{I'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^I e^{-in(\tau-\sigma)} \quad (2.10)$$

A kifejtési módusok kommutátorait a fenti összefüggésekből számoljuk. Ehhez, először határozzuk meg a baloldalon látható koordináták deriváltjainak kommutátorait!

$$\left[\left(\dot{X}^I + X^{I'} \right) (\tau, \sigma), \left(\dot{X}^J + X^{J'} \right) (\tau, \sigma') \right] = \left[\dot{X}^I(\tau, \sigma), X^{J'}(\tau, \sigma') \right] + \left[\dot{X}^I(\tau, \sigma), X^{J'}(\tau, \sigma') \right] \quad (2.11)$$

Ahol felhasználtuk a (2.5) kommutátorokat.

Használjuk fel (2.4) relációkat a :

$$\left[\dot{X}^I(\tau, \sigma), X^J(\tau, \sigma') \right] = -i2\pi\alpha'\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma') \quad (2.12)$$

Deriváljunk σ' szerint:

$$\left[\dot{X}^I(\tau, \sigma), X^{J'}(\tau, \sigma') \right] = -i2\pi\alpha'\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') \quad (2.13)$$

Ahonnán:

$$\left[\dot{X}^I(\tau, \sigma), X^{J'}(\tau, \sigma') \right] + \left[\dot{X}^I(\tau, \sigma), X^{J'}(\tau, \sigma') \right] = \quad (2.14)$$

$$-i2\pi\alpha'\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') + i2\pi\alpha'\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma' - \sigma) \quad (2.15)$$

Felhasználva, hogy:

$$\frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma' - \sigma) = -\frac{d}{d\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') \quad (2.16)$$

Összevonhatunk, és az alábbi kapjuk végeredményként:

$$\left[\left(\dot{X}^I + X^{I'} \right) (\tau, \sigma), \left(\dot{X}^J + X^{J'} \right) (\tau, \sigma') \right] = -i4\pi\alpha'\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') \quad (2.17)$$

Hasonló számolás elvégezhető, a deriváltak különbségeire. Tehát a keresett kommutátoraink:

$$\left[\left(\dot{X}^I \pm X^{I'} \right) (\tau, \sigma), \left(\dot{X}^J \pm X^{J'} \right) (\tau, \sigma') \right] = \mp i 4 \pi \alpha' \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') \quad (2.18)$$

Ha a kommutátor egyik argumentumában felcseréljük az előjeleket láthatóan zérust kell kapnunk.

Vizsgáljuk először a felső előjelet. Írjuk be a módusos kifejtést:

$$\sum_{n'=-\infty}^{\infty} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} e^{-i(n'+k')\tau} e^{-in'\sigma} e^{-ik'\sigma'} [\bar{\alpha}_{n'}^I, \bar{\alpha}_{k'}^J] = -i 2 \pi \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') \quad (2.19)$$

Most hattassuk mindkét oldalra a következő integráloperátorokat:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{in\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{ik\sigma'} \quad (2.20)$$

A baloldalon az integrálás rögtön elvégezhető és Kronecker deltákat kapunk, amelyekkel mindkét összegzés is elvégezhető:

$$e^{-i(n+k)\tau} [\bar{\alpha}_n^I, \bar{\alpha}_k^J] = -i 2 \pi \eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{in\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{ik\sigma'} \frac{d}{d\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') \quad (2.21)$$

Ahonnán:

$$e^{-i(n+k)\tau} [\bar{\alpha}_n^I, \bar{\alpha}_k^J] = -\eta^{IJ} k \delta_{n+k,0} \quad (2.22)$$

Látható, hogy $n + k \neq 0$ esetén eltűnik a kommutátorunk, vagyis a baloldali exponenciális tagnak nem lesz jelentősége. Ezzel a módusok kommutátora:

$$[\bar{\alpha}_n^I, \bar{\alpha}_k^J] = \eta^{IJ} n \delta_{n+k,0} \quad (2.23)$$

Ugyanez elvégezhető a vonás-nélküli módus operátorokra és beláthatjuk, hogy ugyanezeket a kommutációs relációkat fogjuk kapni:

$$[\alpha_n^I, \alpha_k^J] = \eta^{IJ} n \delta_{n+k,0} \quad (2.24)$$

Definiáljuk most a következő operátorokat:

$$\bar{a}_n^I = \frac{1}{\sqrt{n}} \bar{\alpha}_n^I \quad \bar{a}_n^{I\dagger} = \frac{1}{\sqrt{n}} \bar{\alpha}_{-n}^I \quad n > 0 \quad (2.25)$$

Ezeket a klasszikus elméletünk motiválta, ugyanis ott láthattuk, hogy $X^\mu(\tau, \sigma)$ valóságának a feltétele az, hogy $\bar{\alpha}_n^\mu = (\alpha_{-n}^\mu)^*$. A konjugálás a kvantumelméletben az adjungálás műveletének felel meg, ezért a fenti definícióban, $\bar{a}_n^{I\dagger}$ az $\bar{a}_n^I$ operátor adjungáltját jelenti. Természetesen a fenti definícióból $\bar{\alpha}_n^I = \bar{\alpha}_{-n}^{I\dagger}$ is következik. Most a kvantumelméletben ez, a vonás nélküli operátorok hasonló tulajdonságával együtt a $X^I(\tau, \sigma)$ Hermitikusságát garantálja.

Számoljuk ki ezek kommutációs relációit. Beírva a definíciókat a módusokra kapott összefüggésbe:

$$[\bar{a}_n^I, \bar{a}_k^{J\dagger}] = \eta^{IJ} \delta_{n,k} \quad (2.26)$$

valamint:

$$[\bar{a}_n^I, \bar{a}_k^J] = [\bar{a}_n^{I\dagger}, \bar{a}_k^{J\dagger}] = 0 \quad (2.27)$$

Továbbá $[\bar{a}_n^I, a_k^J] = 0$.

A fenti kommutációs relációkban felismerhetjük az oscillátor algebrát [5]. Valóban az $(\bar{a}_n^I, \bar{a}_k^{I\dagger})$ operátorok a kvantumos harmónikus oscillátor keltő- és eltüntető- operátorainak megfelelő algebrát teljesítik.

A módusok nyelvén ez azt jelenti, hogy $\bar{\alpha}_n^I$ -k eltüntető operátorok továbbá $\bar{\alpha}_{-n}^I$ keltő operátorok. Hasonlóan a vonás nélküli operátorokra.

2.1.2. Virasoro operátorok

Eddig a transzverzális módusokat vizsgáltuk. Nézzük meg mi a helyzet a $\bar{\alpha}_n^-$ operátorokkal! Ezeket a klasszikus elméletben a transzverzális módusok szorzataiként adtuk meg, és bevezettük a Virasoro módusokat. Elemezzük most részletesebben a klasszikus Virasoro módusoknak megfelelő kvantumos Virasoro operátorokat! A klasszikus elméletünkben az (1.68) képlettel definiáltuk a Virasoro módusokat:

$$\bar{L}_k = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\alpha}_{k-n}^I \bar{\alpha}_n^I \quad (2.28)$$

Ahogy ránézünk, már rögtön láthatjuk, hogy a kvantumelméletben előfordulhatnak problémák a fenti definícióval. (2.28)-ban ugyanis nem kommutáló operátorok szorzata

szerepel. A klasszikus elméletben ez nem jelentette gondot, de itt nem lehetünk biztosak abban, hogy valóban ez a helyes sorrendje az operátoroknak. A kommutációs relációk alapján láthatjuk, hogy az oscillátorok csak $k = 0$ esetén nem kommutálnak, ezért az egyetlen kérdéses Virasoro operátor az $\bar{L}_0$ operátor. Ezt a következő szakaszban részletezzük. Most foglalkozzunk a $k \neq 0$ esettel.

Számoljuk ki először a Virasoro operátorok és az oscillátorok kommutátorait (természetesen most a nulla indexű Virasoro operátorokkal még nem foglalkozunk):

$$[\bar{L}_n, \bar{\alpha}_m^J] = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\bar{\alpha}_{n-k}^I \bar{\alpha}_k^I, \bar{\alpha}_m^J] = \quad (2.29)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\bar{\alpha}_{n-k}^I [\bar{\alpha}_k^I, \bar{\alpha}_m^J] + [\bar{\alpha}_{n-k}^I, \bar{\alpha}_m^I] \bar{\alpha}_k^J) \quad (2.30)$$

Felhasználva az oscillátorok kommutációs relációit a következőt kapjuk:

$$[\bar{L}_n, \bar{\alpha}_m^J] = -m \bar{\alpha}_{m+n}^J \quad (2.31)$$

Ugyanezek érvényesek a vonás nélküli operátorokra.

Most már megtudjuk határozni két Virasoro operátor kommutátorát:

$$[\bar{L}_m, \bar{L}_n] = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\bar{\alpha}_{m-k}^I \bar{\alpha}_k^I, \bar{L}_n] \quad (2.32)$$

Ahol $m, n \neq 0$ továbbá legyen $m + n \neq 0$. Felhasználva a fenti kommutátort, majd átrendezve az összegzést:

$$[\bar{L}_m, \bar{L}_n] = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k - n) \bar{\alpha}_{m+n-k}^I \bar{\alpha}_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (m - k) \bar{\alpha}_{m+n-k}^I \bar{\alpha}_k^I = \quad (2.33)$$

$$= (m - n) \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (m - k) \bar{\alpha}_{m+n-k}^I \bar{\alpha}_k^I \quad (2.34)$$

Tehát:

$$[\bar{L}_m, \bar{L}_n] = (m - n) \bar{L}_{m+n} \quad (2.35)$$

Azt kaptuk, hogy két Virasoro operátor kommutátora is Virasoro operátor. Ez azt jelenti, hogy a fenti kommutációs reláció egy Lie-algebrát definiál. Ezt a szakirodalomban centrális kiegészítés nélküli Virasoro algebrának, vagy Witt-algebrának

nevezik.

Hasonló számolás végezhető a vonás nélküli operátorokra ugyanezen eredményekkel. Itt érdemes megemlíteni, hogy a nyílt hurok kvantálása során ugyancsak a Virasoro algebrába ütközünk, a különbség csak az, hogy az (1.12) peremfeltétel összekapcsolja a vonásos és vonás nélküli módusokat, így "csak" egy Virasoro algebrát kapunk, és nem lesz két külön másolat a jobbra és balra terjedő módusokra.

Érdemes továbbá megvizsgálni ezen Virasoro operátorok hatását a húrkoordinátákra. Könnyen belátható, hogy a Virasoro operátorok a világfelület újraparaméterezéseit generálják [1](269. oldal).

2.1.3. 0 indexű Virasoro operátor

Az előző szakaszban láttuk, hogy problémákba ütköztünk a 0 indexű Virasoro operátorral. Ez az operátor nagyon fontos lesz a későbbiekben ezért egy külön szakaszban tárgyaljuk. Elevenítsük fel a definíciókat a Virasoro operátorokra:

$$\bar{L}_k = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\alpha}_{k-n}^I \bar{\alpha}_n^I \quad (2.36)$$

A probléma az, hogy az oscillátorok nem kommutálnak minden esetben. Pontosabban csak $k = 0$ esetén nem kommutálnak. Nem biztos tehát, hogy a kvantumos operátorban a klasszikus definíció alapján adott szorzat lesz a megfelelő. Vagyis a rendezéssel van gondunk. A kvantumelméletben csak olyan operátorokat tudunk értelmezni, amelyeknek jól definiált hatása van a rendszer vákuumállapotára. Ezek szerint az eltüntető operátoroknak a keltő operátoroktól jobbra kell előfordulnia. Ezt nevezik normál rendezésnek. A keltő operátoraink $\bar{\alpha}_{-n}^I$ az eltüntető operátoraink $\bar{\alpha}_n^I$. Bontsuk fel a fenti összeget:

$$\bar{L}_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\alpha}_{-n}^I \bar{\alpha}_n^I = \quad (2.37)$$

$$= \frac{1}{2} \bar{\alpha}_0^I \bar{\alpha}_0^I + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{-n}^I \bar{\alpha}_n^I + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_n^I \bar{\alpha}_{-n}^I \quad (2.38)$$

A jobboldal harmadik tagja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_n^I \bar{\alpha}_{-n}^I = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{-n}^I \bar{\alpha}_n^I + \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{\alpha}_{-n}^I, \bar{\alpha}_n^I] \quad (2.39)$$

A kommutátor felhasználásával a Virasoro operátor:

$$\bar{L}_0 = \frac{1}{2}\bar{\alpha}_0^I\bar{\alpha}_0^I + \sum_{n=1}^{\infty}\bar{\alpha}_{-n}^I\bar{\alpha}_n^I + \frac{D-2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n \quad (2.40)$$

A jobboldali harmadik konstans tag nem konvergál. Mondanánk ezt elsőre. Kérdés persze, hogyan értelmezzük azt az összegzést.

A Virasoro operátort definiáljuk e konstans tag nélkül. Viszont az eddigi klasszikus eredményeket úgy módosítsuk a kvantumelméletben, hogy a Virasoro operátorhoz adjunk hozzá egy a konstanst. Tehát:

$$\bar{L}_0 = \frac{1}{2}\bar{\alpha}_0^I\bar{\alpha}_0^I + \sum_{n=1}^{\infty}\bar{\alpha}_{-n}^I\bar{\alpha}_n^I \quad (2.41)$$

A klasszikus (1.69) egyenlet viszont az alábbira módosul a kvantumelméletben:

$$\sqrt{2\alpha'}\bar{\alpha}_0^- = \frac{2}{p^+}(\bar{L}_0 + a) \quad (2.42)$$

Ugyanez érvényes a vonás nélküli operátorokra.

Vagyis a Hamilton operátor a következőképpen módosul:

$$H = L_0 + \bar{L}_0 + 2a \quad (2.43)$$

A (1.71) klasszikus tömegnek megfelelő tömeg-négyzet operátor pedig az alábbi lesz:

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'}(L_0 + \bar{L}_0 + 2a) - p^I p^I \quad (2.44)$$

Az előző szakaszban láttuk, hogy a Virasoro operátorok a világfelület újraparaméterezéseit generálják. Belátható a nulla indexű Virasoro operátorokról is, hogy egy újraparaméterezést generálnak, méghozzá a τ paraméterét [1]. Ez konzisztens a fenti eredménnyel, ahol ezek adják meg a Hamilton operátort, ugyanis a Hamilton operátor generálja az τ paraméter változását.

Az előző szakaszban közölt számoláshoz hasonlóan meghatározhatjuk most már a 0 indexű Virasoro operátorral kiegészítve a kommutációs relációkat. A következőt kapjuk [2]:

$$[\bar{L}_m, \bar{L}_n] = (m-n)\bar{L}_{m+n} + \frac{D-2}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0} \quad (2.45)$$

Megjelent egy újabb tag amely mindennel kommutál. Ezt nevezik az algebra centrális töltésének, magát a fenti algebrát, pedig centrálisan kiegészített Virasoro algebrának. Erre a kommutációs relációra a későbbiekben szükségünk lesz.

Felmerül a kérdés, hogy mi lehet az előzőekben bevezetett a konstans? Rögtön tudunk rá egy érdekes választ adni a fenti összeg értelmezésével. Viszont a következő szakaszban látni fogjuk, hogy a kvantumelmélet Lorentz kovarianciája rögzíti a konstans értékét.

Értelmezhetjük a fenti összeget a következőképpen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}} = \zeta(-1) \quad (2.46)$$

Ahol $\zeta(z)$ a Riemann-zeta függvény. Persze a Riemann zéta függvény csak akkor van értelmezve ha z valós része nagyobb 1-nél, de analitikus folytatással egyértelműen kiterjeszthető az értelmezési tartománya és azt kapjuk, hogy $\zeta(-1) = -1/12$. Ebben az értelmezésben tehát:

$$a = -\frac{D-2}{24} \quad (2.47)$$

(Ez a zéta-regularizáció) Látni fogjuk, hogy valóban ezt az értéket veszi fel az a konstans.

2.2. A Lorentz kovariancia következményei

Az előző szakaszban részletesen foglalkoztunk a zárt húr kvantumelméletének operátoraival. Azt szeretnénk, hogy ez a kvantumelmélet konzisztens legyen az eddigi fizikai elméletekkel, többek között a relativitáselmélettel. Azaz biztosítani szeretnénk az elmélet Lorentz kovarianciáját. A Lorentz kovariancia szembeszökőségét a bevezetett fénykúp mértékkel elfedtük, ezért ellenőriznünk kell a fennállását. Be kell vezetünk tehát olyan fénykúpos Lorentz generátorokat amelyek teljesítik a Lorentz algebrát.

Legyenek $J^{\mu\nu}$ kovariáns Lorentz generátorok. Ekkor ezek a következő algebrát kell, hogy teljesítsék [5]:

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\kappa}] = i\eta^{\mu\rho} J^{\nu\kappa} - i\eta^{\nu\rho} J^{\mu\kappa} + i\eta^{\mu\kappa} J^{\rho\kappa} - i\eta^{\nu\kappa} J^{\rho\mu} \quad (2.48)$$

Tekintsük a klasszikus kovariáns Lorentz töltéseket:

$$J_{\mu\nu} = \int_0^{2\pi} (X_\mu P_\nu^\tau - X_\nu P_\mu^\tau) d\sigma \quad (2.49)$$

Ide írjuk be a módus kifejtést, és végezzük el az integrálást:

$$J^{\mu\nu} = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} (x_0^\mu \alpha_0^\nu - x_0^\nu \alpha_0^\mu) + \frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\bar{\alpha}_{-n}^\mu \bar{\alpha}_n^\nu - \bar{\alpha}_{-n}^\nu \bar{\alpha}_n^\mu) + \frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu) \quad (2.50)$$

A fenti klasszikus alakból próbáljuk megkonstruálni a kvantumos fénykúpos Lorentz generátorokat. Először is, mint már említettük maga a mértékfeltétel nem Lorentz invariáns, ez azt jelenti, hogy bizonyos Lorentz transzformációk az X^+ -t más operátorokba transzformálják. Láthatjuk, hogy egyedül a J^{+-} és J^{I-} generátorok módosíthatnak a mértékfeltételen [3]. Különösen az utóbbi generátor érdekel minket.

A J^{I-} generátor természetesen nem lesz a fenti klasszikus generátor fénykúpkoordinátás alakja az oscillátorokkal mint operátorokkal. Viszont nézzük meg mit kapunk, ha átírjuk fénykúpkoordinátákba:

$$\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} (x_0^I \alpha_0^- - x_0^- \alpha_0^I) + \frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\bar{\alpha}_{-n}^I \bar{\alpha}_n^- - \bar{\alpha}_{-n}^- \bar{\alpha}_n^I) + \frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^I \alpha_n^- - \alpha_{-n}^- \alpha_n^I) \quad (2.51)$$

Rögtön látszik, hogy a fenti operátor nem Hermitikus. Ugyanis az x_0^I valamint α_0^- operátorok nem kommutálnak egymással (utóbbi a p^- -szal arányos ami pedig arányos a transzverzális impulzussűrűségekkel). A szorzat szimmetrizálásával ez kiküszöbölhető. Azt is láttuk, hogy rendezési okok miatt, a kvantumos esetben a 0 indexű Virasoro operátorhoz bevezettünk egy a konstanst. Ezt azt eredményezi, hogy módosítjuk a negatív oscillátorok definícióját a (2.42) egyenlet szerint, a kvantumos esetben. További rendezési gondok láthatóan nincsenek a fenti operátorban. Posztuláljuk tehát a fénykúpos Lorentz generátort [1]:

$$\begin{aligned} J^{I-} = & -\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} x_0^- \alpha_0^I + \frac{1}{\alpha' p^+} (x_0^I (L_0 + a) + (L_0 + a) x_0^I) - \\ & - \frac{i}{p^+ \sqrt{2\alpha'}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\bar{\alpha}_{-n}^I \bar{L}_n - \bar{L}_{-n} \bar{\alpha}_n^I) + \\ & - \frac{i}{p^+ \sqrt{2\alpha'}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^I L_n - L_{-n} \alpha_n^I) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Ahhoz, hogy a (2.47) Lorentz algebra teljesüljön, a fenti generátornak a következő kommutációs relációt kell kielégítenie:

$$[J^{I-}, J^{K-}] = 0 \quad (2.53)$$

A kommutációs reláció kiszámításához fel kell használnunk az eddigi kommutációs relációkat többek között a Virasoro operátorok albegraját. Hosszas számolás után a következő eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned} [J^{I-}, J^{K-}] = & \\ = -\frac{1}{2\alpha'p^{+2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \left(a + \frac{D-2}{24} \right) + n \left(1 - \frac{D-2}{24} \right) \right) (\bar{\alpha}_{-n}^I \bar{\alpha}_n^K - \bar{\alpha}_{-n}^K \bar{\alpha}_n^I) - & \\ -\frac{1}{2\alpha'p^{+2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \left(a + \frac{D-2}{24} \right) + n \left(1 - \frac{D-2}{24} \right) \right) (\alpha_{-n}^I \alpha_n^K - \alpha_{-n}^K \alpha_n^I) & \end{aligned} \quad (2.54)$$

Ennek kell eltűnnie. Ez láthatóan akkor lesz nulla ha a zárójelben levő mennyiség eltűnik minden n természetes számra:

$$\frac{1}{n} \left(a + \frac{D-2}{24} \right) + n \left(1 - \frac{D-2}{24} \right) = 0 \quad (2.55)$$

Egy másodfokú 'polinomot' kaptunk. Akkor lesz ez zérus, ha az együtthatók külön-külön zérusok. A másodfokú tag együtthatója akkor tűnik el, ha $D = 26$. Ezt beírva a másik együtthatóba és nullával egyenlővé téve megkapjuk az a konstans is: $a = -1$. Visszatekintve (2.46)-ra ez már ismerősnek tűnik.

Nagyon érdekes eredményt kaptunk. A kvantumelméletünk Lorentz invarianciája rögzítette a téridő dimenzióját. A zárt hurok csak $D = 26$ téridő dimenzióban létezhetnek.

2.3. A kvantumos zárt húr állapottere és spektruma

Elérkeztünk a kvantumelméletünk állapotterének konstruálásához. Definiáljuk először az alapállapotot. Tudjuk, hogy egy kvantumelmélet állapotait az operátorok egy olyan halmaza adja amelyek közül mindegyik kommutál mindegyikkel. Ezen operátorok sajátértékei fogják az állapotokat jellemezni. A mi elméletünkben egy jó választás ilyen operátorokra a p^+ és a p^I operátorok [1]. Képezzük a $|p^+, p^2, p^3, \dots, p^{25}\rangle$ állapotot. Az egyszerűség kedvéért vezessük be a $(p^2, p^3, \dots, p^{25}) = \vec{p}_t$ rövidítést. Az imént definiált állapotot nevezzük el alapállapotnak:

$$|p^+, \vec{p}_t\rangle \quad (2.56)$$

Ez az állapot tehát a p^+ valamint p^I operátorok sajátállapota rendre p^+ valamint p^I sajátértékkel.

Ezután a zárt húr különböző állapotait a már bevezetett (2.25) oscillátorok segítségével tudjuk megadni. Legyen a (2.56) alapállapot az eltüntető operátorok vákuumállapota:

$$a_n^I |p^+, \vec{p}_t\rangle = 0 \quad \bar{a}_n^I |p^+, \vec{p}_t\rangle = 0 \quad (2.57)$$

Ahol $n > 0$ egész szám.

Az állapotokat úgy kapjuk meg ha a keltő operátorokkal hatunk az alapállapotra. A keltő operátoraink: $a_1^{2\dagger}, \dots, a_1^{25\dagger}; a_2^{2\dagger}, \dots, a_2^{25\dagger}; \dots$ hasonlóan a vonásos keltő operátorokra. Jelölje $\lambda_{n,I}$ és $\bar{\lambda}_{n,I}$ azt, hogy hányszor hattatunk az alapállapotra az $a_n^{I\dagger}$ valamint $\bar{a}_n^{I\dagger}$ keltő operátorokkal. Ekkor a legáltalánosabb állapot:

$$|\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (a_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} \right] \times \left[\prod_{k=1}^{\infty} \prod_{J=2}^{25} (\bar{a}_k^{J\dagger})^{\bar{\lambda}_{k,J}} \right] |p^+, \vec{p}_t\rangle \quad (2.58)$$

A számolások folyamán és a (1.71) klasszikus tömeg-négyzetben is előfordulnak az oscillátorok szorzatainak összegei. Defináljuk az ezen összegekből képezett operátorokat a következő módon:

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^I \alpha_n^I = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I \quad (2.59)$$

$$\bar{N} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{-n}^I \bar{\alpha}_n^I = \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{a}_n^{I\dagger} \bar{a}_n^I \quad (2.60)$$

A fenti $N, \bar{N}$ operátorokat számláló operátoroknak nevezzük. Az elnevezést az indokolja, hogy a hatásuk az (2.58) általános állapotra:

$$N |\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{25} n \lambda_{n,I} |\lambda, \bar{\lambda}\rangle \quad (2.61)$$

$$\bar{N} |\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{J=2}^{25} n \bar{\lambda}_{k,J} |\lambda, \bar{\lambda}\rangle \quad (2.62)$$

Vagyis a keltő operátorok módusainak az összegét adja sajátértékként.

Viszont, a fenti (2.58) általános állapotok nem mindegyike lesz valódi fizikai állapot. Van ugyanis egy feltételünk, méghozzá a (1.70) egyenlet. Az egyenlet

szerint $L_0 = \bar{L}_0$. Valóban ez a klasszikus elmélet következménye volt, de amint már kifejtettük a kvantumelméletben a 0 indexű Virasoro operátorokat egy konstanssal kell eltolni a konzisztencia érdekében. A konstans az egyenletben azonban semmit sem változtat. Természetesen itt a kvantumelméletben az operátorok egyenlőségét úgy definiáljuk, hogy hatásuk az állapotokra megegyezzek.

A Virasoro operátorok:

$$L_0 = \frac{1}{2}\alpha_0^I\alpha_0^I + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{-n}^I\alpha_n^I = \frac{1}{2}\alpha_0^I\alpha_0^I + N \quad (2.63)$$

$$\bar{L}_0 = \frac{1}{2}\alpha_0^I\alpha_0^I + \sum_{n=1}^{\infty}\bar{\alpha}_{-n}^I\bar{\alpha}_n^I = \frac{1}{2}\alpha_0^I\alpha_0^I + \bar{N} \quad (2.64)$$

az $L_0 = \bar{L}_0$ feltétel tehát az $N = \bar{N}$ feltétellel egyenértékű. Részletezve:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{I=2}^{25}n\lambda_{n,I} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{J=2}^{25}k\bar{\lambda}_{k,J} \quad (2.65)$$

A (2.58) általános állapotokból ez a feltétel választja ki a valódi fizikai állapotokat. A tömeg-spektrum a (2.44) egyenlet szerint az imént bevezett számláló operátorokkal kifejezve:

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'}(N + \bar{N} - 2) \quad (2.66)$$

Most már mindenünk megvan ahhoz, hogy megvizsgáljuk az első néhány állapotát a zárt húrnak. Kezdjük az $N = \bar{N} = 0$ esettel. Ez megfelel a (2.56) vákuumállapotnak. A tömeg-négyzet:

$$M^2|p^+, \vec{p}_t\rangle = -\frac{4}{\alpha'}|p^+, \vec{p}_t\rangle \quad (2.67)$$

Érdekes módon a tömeg-négyzet operátor sajátértéke negatív. A fenti állapotot tachion állapotnak hívják. Klasszikusan gondolkodva a tachionnak tehát a fénynél gyorsabban kéne haladnia. A negatív tömeg-négyzet egy instabilitást jelent az elméletben. Nyílt hurok tárgyalásában is megjelenik a tachion állapot, ezek viselkedése azonban sokkal jobban ismert. A fenti zárt húros tachionok szerepe még a mai napig nincs tisztázva.

Viszsgáljuk tovább a zárt húr állapotait. A következő eset $N = \bar{N} = 1$. Itt felhasználtuk a számláló operátorokra vonatkozó feltételt. A feltétel szerint az alapállapotra két keltő operátorral kell hatnunk a konzisztencia érdekében. Az egyik

vonásos a másik vonás nélküli operátor, és $N = \bar{N}$ teljesítésének érdekében a módus számuk is 1 kell legyen. Az állapotaink tehát:

$$a_1^I \bar{a}_1^J |p^+, \vec{p}_t\rangle \quad (2.68)$$

Az I, J transzverzális indexek akármilyen értéket felvehetnek 2 és 25 között, ezért az általános állapot a fentiek lineáris kombinációja:

$$\sum_{I=2}^{25} \sum_{J=2}^{25} R_{IJ} a_1^I \bar{a}_1^J |p^+, \vec{p}_t\rangle \quad (2.69)$$

Közismert tétel, hogy egy tetszőleges négyzetes mátrix felbontható egy A_{IJ} antiszimmetrikus, S_{IJ} spurtalan szimmetrikus és egy $S\delta_{IJ}$ spur tag összegére. Végezzük el ezt a dekompozíciót az R_{IJ} mátrixunkra:

$$R_{IJ} = A_{IJ} + S_{IJ} + S\delta_{IJ} \quad (2.70)$$

A (2.69) állapotokat lineárisan független állapotok három csoportjára bonthatjuk:

$$\sum_{I=2}^{25} \sum_{J=2}^{25} A_{IJ} a_1^I \bar{a}_1^J |p^+, \vec{p}_t\rangle \quad (2.71)$$

$$\sum_{I=2}^{25} \sum_{J=2}^{25} S_{IJ} a_1^I \bar{a}_1^J |p^+, \vec{p}_t\rangle \quad (2.72)$$

$$S a_1^I \bar{a}_1^J |p^+, \vec{p}_t\rangle \quad (2.73)$$

A (2.71) állapotok az u.n. Kalb-Ramond mező állapotainak felelnek meg. Ez egy két indexes antiszimmetrikus tenzormező, és tulajdonképpen a Maxwell mező tenzoros általánosításának tekinthető. A Maxwell mező amint tudjuk az elektromos töltéshez csatolódik, ezzel analóg módon a Kalb-Ramond mező az ú.n. húrtöltéshez csatolódik. A hurok ezért húrtöltéssel rendelkezik [1]. Ezzel most bővebben nem foglalkozunk.

Nézzük a (2.73) állapotokat. Ezeknek láthatóan nincsenek szabad indexei, tehát egy tömeg nélküli skalármező állapotainak feleltethető meg, az ú.n. Dilaton mezőnek. A Dilaton mező érdekes tulajdonsága, hogy meghatározza a húrkölcsönhatások erősségét [2]. A Dilaton mező viselkedése igen bonyolult ezért itt nem tárgyaljuk bővebben.

Végül maradtak a (2.72) állapotok. Ezek az állapotok hihetetlen módon graviton állapotoknak feleltethetőek meg. A megfeleltetéshez a linearizált Einstein egyenleteket kell vizsgálnunk. Azaz ha a metrika helyfüggő részét perturbációnak tekintjük: $g^{\mu\nu}(x) = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}$, akkor a forrásmentes Einstein egyenletek a hullámegyenletekké

egyszerűsödnek. A mérték invarianciát kihasználva, ami ebben az esetben újraparaméterezési invariancia bevezethetünk fénykúp mértéket. Az újraparaméterezési invarianciát igazából azzal magyarázhatjuk, hogy a jelenségeknek függetleneknek kell lenniük attól, hogy hogyan paramétereztük a téridőt. Fénykúp mértékben a $h^{\mu\nu}$ tisztán transzverzális h^{IJ} része spurtalan lesz, és csak ez fogja nem-triviálisan teljesíteni a hullámegyenletet. Így a skálármezőkhöz hasonlóan elvégezhetjük a kvantálást, bevezetve keltő és eltüntető operátorokat I, J indexekkel, majd a szokásos módon tudunk definiálni egy részecske állapotokat. A gravitonok polarizációs tenzora örökli a spurtalanságot [1]. Tehát a linearizált Einstein egyenletekből származtatott graviton állapotok megfelelnek a (2.72) zárt húr állapotoknak. Érdekes módon a gravitáció megjelent a húrelméletben.

Ehhez kapcsolódóan idéznék egy mondatot a húrelmélet egyik atyától J.H. Schwarztól. Folyton azt halljuk, hogy a húrelmélet kísérletileg nem ellenőrizhető és még nem jósolt meg semmit. J. H. Schwarz erre azt mondta, "dehogynem, megjósolta a gravitációt!" [1](11. oldal). Valóban amint láttuk csak a zárt húrokat vizsgáltuk, gravitációról szó sem volt, és egyszer csak megjelent.

Ezzel befejeztük a zárt hurok kvantumelméletének a vizsgálatát. Fontos eredményeket kaptunk. Láttuk, hogy a Lorentz invariancia rögzítette a téridő dimenzió számát $D = 26$ -ra, továbbá megjelentek graviton állapotok. Arról azonban, egyenlőre semmit sem tudunk mondani, hogy ez hogyan kapcsolódik a valósághoz, és mi miért csak 4 téridő dimenziót látunk, és nem többet, mondjuk 26-ot? A kérdésre az egyik megoldás az ún. kompaktifikáció, amely során bizonyos dimenziókat 'kicsiknek' tételezünk fel és ezért nem látjuk őket. A dolgozat következő, utolsó fejezetében ezt fogjuk vizsgálni.

3. fejezet

Zárt húr kompaktifikációja T^{22} tóruszra

Az előző szakaszban láttuk, hogy a zárt hurok csak 26 dimenziós téridőben létezhetnek. Ez jóval több az általunk érzékelt 4 dimenziónál. Ebben a fejezetben a közismert kompaktifikáció módszerét alkalmazzuk és a 26 dimenzióból 22-t kompaktifikálunk egy 22-tóruszra. Először ejtünk néhány szót a kompaktifikációról, majd elvégezzük konkrétan zárt hurokra, végül pedig a spektrumot fogjuk vizsgálni.

3.1. A zárt húr kompaktifikációja

A kompaktifikáció ötletét először Kaluza és Klein vetették fel az 1920-as években [13], [14]. Céljük a gravitáció és elektromágneses kölcsönhatások egyesítése volt. Az általános relativitáselméletet kiterjesztették 5 dimenziós téridőre és kompaktifikálták az egyik tér dimenziót. Ekkor kaptak egy négy dimenziós gravitációs mezőt amelyhez csatolva volt egy Maxwell mező és egy skalár. A lényeg az, hogy az extra tér-dimenziókat kompakt halmazoknak tekintjük. Tehát például, ha egy részecske elindul az egyik kompakt dimenzió mentén akkor előbb-utóbb visszaér ugyanoda. Ezt a távolságot, amit a részecske megtesz nevezhetjük a kompakt dimenzió hosszának. Lehetséges, hogy ez a hossz csak igen kicsiny és ezért nem észlelhetjük. Mindenesetre ez egy lehetséges megoldásnak tűnik az elméletből adódó extra-tér-dimenziók kezelésére.

Amit mi fogunk csinálni az a Kaluza-Klein (KK) módszer általánosítása több kompakt dimenzióra. Pontosabban, amint már említettük 22 dimenzióra (ehhez, érdekes áttekintést nyújtott [7]). A kompaktifikációt a legegyszerűbb módon fogjuk elvégezni, minden extra tér-dimenziót egy-egy körre fogunk kompaktifikálni. Vagyis a kompakt halmazunk egy 22-tórusz: $\underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_{22}$.

A húrkoordinátáinkat osszuk tehát két csoportra. Az első csoport a nem kompaktifikált koordináták X^+, X^-, X^2, X^3 . A transzverzális indexeit kis latin betűkkel

fogjuk jelölni. A második csoport a $X^4, X^5, \dots, X^{25}$ kompaktifikált koordináták. Ezek indexeit nagy latin betűkkel fogjuk jelölni. Mindkét index csoport végig felsőindexként fog szerepelni.

Nézzük egy kicsit közelebbről a tóruszunkat. Tekintsük a $\mathbb{R}^{22}$ teret és vegyünk egy e_i^I bázisát ($I = 4, \dots, 25$ és $i = 1, \dots, 22$). Itt i a bázisindex. Képezzük a báziselemek lineáris kombinációt:

$$\sum_{i=1}^{22} 2\pi R_i m_i e_i^I \quad (3.1)$$

Ahol m_i egész számok, R_i valós számok. A fenti összeg egy rácsot definiál. Jelöljük ezt a rácsot Γ -val. Ismert ekkor, hogy $\mathbb{R}^{22}/\Gamma$ hányados tér éppen egy 22-tórusz lesz és a Γ rács definíciója alapján a körök sugarai éppen az R_i -k lesznek. Azt mondtuk, hogy az X^I koordináták a tóruszon laknak ezért teljesíteniük kell a következő feltételt [3]:

$$X^I(\tau, \sigma + 2\pi) = X^I(\tau, \sigma) + \sum_{i=1}^{22} 2\pi R_i m_i e_i^I \quad (3.2)$$

Az m_i egész számnak itt az a szemléletes jelentése, hogy a zárt húr hányszor tekeredik fel egy adott kompakt dimenzióra. Hogyan fog ez a feltétel megjelenni a húrkoordináták kifejtésében? Bontsuk szét a szokásos módon:

$$X^I(\tau, \sigma) = X_L^I(\tau + \sigma) + X_R^I(\tau - \sigma) = X_L^I(u) + X_R^I(v) \quad (3.3)$$

Ami megváltozott a korábbiakhoz képest, az a periodicitási feltétel. Itt ugyanis hozzáadódik egy plusz tag:

$$X_L^I(u + 2\pi) - X_L^I = X_R^I(v) - X_R^I(v - 2\pi) + \sum_{i=1}^{22} 2\pi R_i m_i e_i^I \quad (3.4)$$

A fenti összefüggés deriváltját véve, láthatóan a deriváltakra ugyanúgy érvényes a Fourier kifejtés mint korábban. Idézzük fel az 1. fejezet (1.52) egyenleteit a megfelelő koordinátákkal kifejezve:

$$X_L^I(\tau, \sigma) = x_{L0}^I + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \bar{\alpha}_0^I u + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \bar{\alpha}_n^I \frac{e^{-inu}}{n} \quad (3.5)$$

$$X_R^I(\tau, \sigma) = x_{R0}^I + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \alpha_0^I v + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^I \frac{e^{-inv}}{n} \quad (3.6)$$

Írjuk be a fenti egyenleteket a (3.4) feltételbe és rendezzük egy kicsit át:

$$\bar{\alpha}_0^I - \alpha_0^I = \sqrt{2\alpha'} \sum_{i=1}^{22} \frac{R_i m_i}{\alpha'} e_i^I \quad (3.7)$$

A fenti eredmény különbözik az előző fejezetekben kapott eredményektől. A kompaktifikált koordináták zérus Fourier módusai nem egyeznek meg. A jelölések rövidítése érdekében vezessük be a következő mennyiséget:

$$w^I = \sum_{i=1}^{22} \frac{R_i m_i}{\alpha'} e_i^I \quad (3.8)$$

A (3.7) feltétel így az alábbi egyszerű alakot veszi fel:

$$\bar{\alpha}_0^I - \alpha_0^I = \sqrt{2\alpha'} w^I \quad (3.9)$$

Az impulzus is hasonló alakot fog felvenni. Valóban, a kompaktifikáció miatt nem vehet fel tetszőleges értékeket. Amint azt láttuk az impulzus generálja a téridőeltolásokat. Az eltolási operátor $e^{-ip^I x^I}$. Az azonosítás miatt, ha egy bizonyos értékkel eltoljuk az x^I koordinátát, vissza kell jussunk a kiindulási helyzetbe. A feltételt a szokásos módon az alábbi egyenlettel tudjuk megadni:

$$p^I \sum_{i=1}^{22} 2\pi R_i m_i e_i^I = 2\pi n \quad (3.10)$$

Ahol $n \in \mathbb{Z}$. Vagyis a feltétel szerint $p^I R_i e_i^I \in \mathbb{Z}$ minden i -re. Ezek szerint a p^I impulzusok is rácsot alkotnak. Nevezzük ezt a Γ rács duális rácsának, és jelöljük $\tilde{\Gamma}$ -val. A duális rács egy bázisát jelöljük e_i^{*I} -vel és válasszuk úgy, hogy:

$$e_i^{*I} e_j^I = \delta_{ij} \quad (3.11)$$

Ahol I -re természetesen automatikus összegzés van. Ezek szerint az impulzusok a duális bázissal az alábbi módon fejezhetők ki:

$$p^I = \sum_{i=1}^{22} \frac{n_i}{R_i} e_i^{*I} \quad (3.12)$$

Itt $n_i \in \mathbb{Z}$ minden i -re.

Most pedig vizsgáljuk meg, milyen kapcsolat áll fenn az impulzus és a zérusmódusok között:

$$p^I = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} (\dot{X}_L + \dot{X}_R) d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} (\bar{\alpha}_0^I + \alpha_0^I) \quad (3.13)$$

Ahol felhasználtuk a (3.5) egyenleteket. Az impulzusra adódik, hogy:

$$\bar{\alpha}_0^I + \alpha_0^I = \sqrt{2\alpha'} p^I \quad (3.14)$$

Ennek az alakja igencsak hasonlít a (3.9) összefüggésre, jó döntés volt tehát a w^I mennyiség bevezetése. Fejezzük ki a (3.9) valamint (3.7) egyenletekből a zérusmódusokat a p^I, w^I mennyiségekkel, és írjuk vissza a (3.5) egyenletekbe. Utóbbiakat összeadva adódnak a kompaktifikált húrkoordináták:

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \alpha' p^I \tau + \alpha' w^I \sigma + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} (\bar{\alpha}_n^I e^{-in\sigma} + \alpha_n^I e^{in\sigma}) \frac{e^{-in\tau}}{n} \quad (3.15)$$

Ejtsünk néhány szót a kommutációs relációkról! A kompaktifikált koordinátákra legyen ugyanaz a kommutációs reláció, ami a többire, pontosabban a (2.1) reláció a további relációkkal együtt. Ha képezzük a fenti X^I deriváltjait, és összeadjuk majd kivonjuk őket, pontosan a (2.9) valamint (2.10) egyenleteket kapjuk. Az lesz a különbség, hogy az I koordináta index 2-től indul és a zérus módusok különbözőek lesznek. Továbbá ezek miatt a (2.18) kommutátorok is érvényesek lesznek most is, amiből pedig az következik, hogy a kompaktifikált koordináták oscillátorai is ugyanolyan kommutációs relációkat teljesítenek mint korábban. Azaz:

$$[\alpha_n^I, \alpha_k^J] = \eta^{IJ} n \delta_{n+k,0} \quad (3.16)$$

$$[\bar{\alpha}_n^I, \bar{\alpha}_k^J] = \eta^{IJ} n \delta_{n+k,0} \quad (3.17)$$

$$[\bar{a}_n^I, a_k^J] = 0 \quad (3.18)$$

A kompaktifikáció során csak a transzverzális koordináták közül kompaktifikáltunk, ezért a $+$ valamint $-$ fénykúp koordináták változatlanok maradtak. A 2. fejezetben vizsgált zárt húr esetén azt a feltételt kaptuk, hogy $L_0 = \bar{L}_0$. A 0 indexű Virasoro operátorról tudjuk, hogy $-$ indexű oscillátorok határozzuk meg. Mivel ezen oscillátorok változatlanok maradtak a kompaktifikáció során, ezért a $L_0 = \bar{L}_0$ feltétel továbbra is fenn áll. Adjuk meg tehát a Virasoro operátorokat (2.41) alapján:

$$\bar{L}_0 = \frac{\alpha'}{4} p^i p^i + \frac{1}{2} \bar{\alpha}_0^I \bar{\alpha}_0^I + \bar{N} \quad (3.19)$$

$$L_0 = \frac{\alpha'}{4} p^i p^i + \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + N \quad (3.20)$$

Ahol i a nem-kompaktifikált koordinátákat jelöli. A kettő egyenletet kivonva egymásból zérust kell kapnunk:

$$\bar{L}_0 - L_0 = \frac{1}{2}(\bar{\alpha}_0^I \bar{\alpha}_0^I - \alpha_0^I \alpha_0^I) + \bar{N} - N = 0 \quad (3.21)$$

A (3.16) kommutációs relációkat felhasználva a fenti zárójelben szereplő kifejezés (3.14) és (3.9) összevonásával:

$$\bar{\alpha}_0^I \bar{\alpha}_0^I - \alpha_0^I \alpha_0^I = 2\alpha' w^I p^I \quad (3.22)$$

A (3.21) egyenletbe visszaírva kapunk egy feltételt a számláló operátorokra:

$$N - \bar{N} = \alpha' w^I p^I \quad (3.23)$$

Ez a feltétel fogja kiválasztani a valódi fizikai állapotokat az állapottéren.

3.2. A kompaktifikált zárt húr állapottere és spektruma

A spektrum meghatározásához szükségünk van az M^2 operátorra. Azt szeretnénk vizsgálni, hogy ha egy megfigyelő a 4 dimenziós nem kompaktifikált téridőben van, akkor ő milyen spektrumot fog látni. A tömeg-négyzet operátor tehát:

$$M^2 = -p^2 = 2p^+ p^- - p^i p^i = \frac{2}{\alpha'}(\bar{L}_0 + L_0 - 2) - p^i p^i \quad (3.24)$$

Ahol $i = 2, 3$. Beírva a Virasoro operátorokra kapott (3.19) összefüggéseket:

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}(\bar{\alpha}_0^I \bar{\alpha}_0^I + \alpha_0^I \alpha_0^I) + \frac{2}{\alpha'}(\bar{N} + N - 2) \quad (3.25)$$

Fejezzük ki ezt is a w^I és p^I mennyiségekkel! (3.14) és (3.9) alapján:

$$\bar{\alpha}_0^I \bar{\alpha}_0^I + \alpha_0^I \alpha_0^I = \alpha'(w^I w^I + p^I p^I) \quad (3.26)$$

Ahonnán a tömeg-négyzet operátor:

$$M^2 = w^I w^I + p^I p^I + \frac{2}{\alpha'}(\bar{N} + N - 2) \quad (3.27)$$

Ismerjük azonban w^I és p^I kifejtését az e_i^I valamint e_i^{*I} bázisokon. Írjuk ezeket be a fenti képletbe:

$$M^2 = \sum_{i=1}^{22} \sum_{j=1}^{22} \frac{n_i}{R_i} \frac{n_j}{R_j} e_i^{*I} e_j^{*I} + \sum_{i=1}^{22} \sum_{j=1}^{22} \frac{m_i m_j R_i R_j}{\alpha'^2} e_i^I e_j^I + \frac{2}{\alpha'} (\bar{N} + N - 2) \quad (3.28)$$

Most pedig válasszuk a bázisainkat ortonormáltaknak. Azaz:

$$e_i^{*I} e_j^{*I} = e_i^I e_j^I = \delta_{ij} \quad (3.29)$$

Ezt felhasználva a végső alakjára hozhatjuk a tömegnégyzet operátort:

$$M^2 = \sum_{i=1}^{22} \left(\frac{n_i^2}{R_i^2} + \frac{m_i^2 R_i^2}{\alpha'^2} \right) + \frac{2}{\alpha'} (\bar{N} + N - 2) \quad (3.30)$$

A (3.23) feltétel is átírható az alábbira:

$$N - \bar{N} = \sum_{i=1}^{22} n_i m_i \quad (3.31)$$

Érdekes eredményt kaptunk. Vegyük észre, hogy ha (3.30)-ben az alábbi cseréket hajtjuk végre: $R_i \rightarrow \alpha'/R_i$ és $n_i \rightarrow m_i$ akkor a spektrum nem változik semmit. Ezt a szimmetriát nevezik T-dualitásnak. Belátható továbbá, hogy ez nem csak a spektrum szimmetriája hanem a teljes elmélet egzakt szimmetriája [10]. Szemléletesen tehát ez azt jelenti, hogy egy külső megfigyelő nem fog különbséget látni a nagyon kicsi és nagyon nagy sugáron végzett kompaktifikációk között.

Az állapotok részletes vizsgálata előtt konstruáljuk meg az állapotteret. A 2. fejezet 2.3 szakaszához hasonló módon először határozzuk meg a vákuumállapotot. Egyszer jelölni fogják a nem-kompaktifikált koordinátákhoz tartozó impulzusok (p^+, p^2, p^3) , másrészt a kompaktifikált impulzusok és az állapot tekeredését jellemző mennyiség. Ezekről láttuk, hogy csak bizonyos értékeket vehetnek fel, és értékeiket $\{n_i\}$ valamint $\{m_i\}$ egész számokból álló halmazok adják meg, ahol $i = 1, \dots, 22$. Tehát a vákuumállapot:

$$|p^+, p_2, p_3; n_1, n_2, \dots, n_{22}; m_1, m_2, \dots, m_{22}\rangle \quad (3.32)$$

Természetesen nem az összes ilyen állapot megengedett, ugyanis van egy feltételünk a valódi állapotokra. Ha a fenti vákuumra hattatjuk az $N, \bar{N}$ számláló operátorokat, zérust kell kapnunk. Ennek megfelelően csak azok lesznek valódi vákuumállapotok amelyekre:

$$\sum_{i=1}^{22} n_i m_i = 0 \quad (3.33)$$

Most már megadhatjuk a kompaktifikált zárt húr legáltalánosabb állapotát:

$$\begin{aligned} & \left[\prod_{r=1}^{\infty} \prod_{i=2}^3 (a_r^{i\dagger})^{\lambda_{r,i}} \right] \times \left[\prod_{r'=1}^{\infty} \prod_{i'=2}^3 (\bar{a}_{r'}^{i'\dagger})^{\bar{\lambda}_{r',i'}} \right] \times \left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=4}^{25} (a_n^{I\dagger})^{\lambda^{n,I}} \right] \times \\ & \times \left[\prod_{n'=1}^{\infty} \prod_{I'=4}^{25} (\bar{a}_{n'}^{I'\dagger})^{\bar{\lambda}^{n',I'}} \right] |p^+, p^2, p^3; \{n_i\}; \{m_i\}\rangle \end{aligned} \quad (3.34)$$

A számláló operátorok hatása pedig:

$$N = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{i=2}^3 r \lambda_{r,i} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=4}^{25} n \lambda^{n,I} \quad (3.35)$$

$$\bar{N} = \sum_{r'=1}^{\infty} \sum_{i'=2}^3 r' \bar{\lambda}_{r',i'} + \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{I'=4}^{25} n' \bar{\lambda}^{n',I'} \quad (3.36)$$

A valódi fizikai állapotokat pedig a (3.31) feltétel választja ki.

3.3. A zérus tömegű állapotok

Az előbbiekben meghatároztuk a kompaktifikált zárt húr spektrumát és megkonstruáltuk a Fock terét. Láthatjuk, hogy ismét lesznek tömeg nélküli állapotok. A következőkben az igen bő spektrumból csak ezen állapotok vizsgálatára szorítkozunk.

Elevenítsük fel a tömeg-négyzet operátort és a fizikai állapotokat kiválasztó feltételt:

$$M^2 = \sum_{i=1}^{22} \left(\frac{n_i^2}{R_i^2} + \frac{m_i^2 R_i^2}{\alpha'^2} \right) + \frac{2}{\alpha'} (\bar{N} + N - 2) \quad (3.37)$$

$$N - \bar{N} = \sum_{i=1}^{22} n_i m_i \quad (3.38)$$

Keressük a nulla tömegű állapotokat.

Láthatóan, ha $n_i = m_i = 0$ minden i -re, akkor a tömegben csak a számláló operátorokat tartalmazó rész marad. Ezen n_i és m_i értékek mellett azonban a fenti feltétel szerint $N = \bar{N}$. A tömeg-négyzet operátor ekkor:

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'}(N - 1) \quad (3.39)$$

$N = \bar{N} = 1$ esetén tehát zérus lesz a tömeg. A számláló operátorok hatását (3.35) adja meg. A következő állapotok esetén kapjuk tehát a megfelelő hatást:

$$a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, p_2, p_3; \{0\}; \{0\}\rangle \quad (3.40)$$

$$a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{i\dagger} |p^+, p_2, p_3; \{0\}; \{0\}\rangle \quad (3.41)$$

$$a_1^{i\dagger} \bar{a}_1^{I\dagger} |p^+, p_2, p_3; \{0\}; \{0\}\rangle \quad (3.42)$$

$$a_1^{i\dagger} \bar{a}_1^{j\dagger} |p^+, p_2, p_3; \{0\}; \{0\}\rangle \quad (3.43)$$

Ahol $I = 4, \dots, 25$ és $i = 2, 3$.

Mely állapotokat látja egy megfigyelő a 4 dimenziós világban? Először is a (3.43) állapotokat. Amint az a korábbiakban szerepelt, ezek az állapotok megfelelnek graviton állapotoknak, Kalb-Ramond állapotoknak, és a dilaton mezőnek. Ezenkívül kapunk még 22+22 foton állapotot is. A mérték csoport így $\underbrace{U(1) \times U(1) \times U(1) \times \dots \times U(1)}_{44}$.

Mikor kaphatunk további zérus tömegű állapotokat? A (3.37) kifejezésben a jobboldali első tag nemnegatív. Csak akkor tűnik el, ha $n_i = m_i = 0$ minden i -re. Az előzőekben ezt az esetet vizsgáltuk. Ha az m_i és n_i nem ezen értékeket veszik fel, akkor a kifejezés biztosan pozitív. További zérus tömegű állapotokat tehát akkor kaphatunk, ha a jobboldali második tag negatív értéket vesz fel: $\bar{N} + N < 2$. Ez két esetben lehetséges $\bar{N} = 1, N = 0$ vagy $\bar{N} = 0, N = 1$ ($\bar{N} = N = 0$ esetén egyszerűen a vákuumállapotokat kapjuk, így ezek érdektelenek). Visszaírva ezeket a tömeg-négyzet operátorba a zérus tömeg feltétele:

$$\sum_{i=1}^{22} \left(\frac{n_i^2}{R_i^2} + \frac{m_i^2 R_i^2}{\alpha'^2} \right) = \frac{2}{\alpha'} \quad (3.44)$$

Ezenkívül van még a (3.38) megkötésünk a fizikai állapotokra:

$$\sum_{i=1}^{22} n_i m_i = \pm 1 \quad (3.45)$$

Tekintsük a fenti (3.44) kifejezést. Legyen $R_i^2 = a_i \alpha'$ (értelemszerűen $a_i > 0$ minden i -re). A fenti kifejezés így:

$$\sum_{i=1}^{22} \left(\frac{n_i^2}{a_i} + m_i^2 a_i \right) = 2 \quad (3.46)$$

Vegyünk tetszőleges (3.45) teljesítő n_i -ket és m_i -ket. A négyzetük mindig nagyobb mint 1 vagy egyenlő 1-gyel. Tehát ha összeadunk sokat mindegyiknek pozitív vagy zérus járuléka lesz az összeghez. Nézzük mondjuk az összeg k -adik tagját:

$$\frac{n_k^2}{a_k} + m_k^2 a_k \quad (3.47)$$

Ismerjük az alábbi egyenlőtlenséget:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad (x > 0) \quad (3.48)$$

A fenti összegben legalább egy m_i, n_i pár esetén mindkettőnek zérustól különbözőnek kell lennie a kiegészítő feltétel miatt. Legyen ez a pár a k -adik. (3.47)-re alkalmazva a fenti egyenlőtlenséget ez azt jelenti, hogy m_k, n_k -től függetlenül akkor van bármilyen lehetőség arra, hogy az összeg k -adik tagja 2 legyen ha $a_k = 1$. De az egész összegnek 2-nek kell lennie, így minden a_i -nek 1-nek kell lennie (k -t akárhogy választhatjuk). Ebben az esetben:

$$\sum_{i=1}^{22} (n_i^2 + m_i^2) = 2 \quad (3.49)$$

A kompaktifikációs sugár pedig $R_i^2 = \alpha'$. Érdekes módon csak egy bizonyos sugár esetén kaptunk további tömeg nélküli állapotokat. Ezt a bizonyos sugarat önduális sugárnak nevezzük.

A lehetséges n_i és m_i értékeket megkaphatjuk a fenti (3.49) és (3.45) kifejezésekből. Négy esetet különböztethetünk meg:

$$\begin{aligned}
n_i &= (1, 0, 0, \dots, 0) & m_i &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\
&(0, 1, 0, \dots, 0) & &(0, 1, 0, \dots, 0) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}
n_i &= (-1, 0, 0, \dots, 0) & m_i &= (-1, 0, 0, \dots, 0) \\
&(0, -1, 0, \dots, 0) & &(0, -1, 0, \dots, 0) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned}
n_i &= (1, 0, 0, \dots, 0) & m_i &= (-1, 0, 0, \dots, 0) \\
&(0, 1, 0, \dots, 0) & &(0, -1, 0, \dots, 0) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}
n_i &= (-1, 0, 0, \dots, 0) & m_i &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\
&(0, -1, 0, \dots, 0) & &(0, 1, 0, \dots, 0) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Minden esetben az 1 vagy -1 akárhol lehet de úgy, hogy n_i -ben és m_i -ben ugyanazon a helyen szerepeljen a feltételeknek megfelelően. Tehát mindegyik esetben 22 különböző elhelyezés lehetséges, vagyis összesen $4 \cdot 22$ azaz 88 különböző elhelyezés létezik.

Melyek lesznek a megfelelő állapotok? Az egyik esetben a számláló operátorok $\bar{N} = 1, N = 0$, a másik esetben $\bar{N} = 0, N = 1$. Következésképpen minden esetben egyetlen keltő operátor fog a vákuumállapotra hatni. Nézzük az állapotokat az első esetben:

$$\begin{aligned}
&\bar{a}_1^{i\dagger} |p^+, p^2, p^3; 1, 0, 0 \dots, 0; -1, 0, 0, 0 \dots, 0\rangle \\
&\bar{a}_1^{i\dagger} |p^+, p^2, p^3; 0, 1, 0 \dots, 0; 0, -1, 0, 0 \dots, 0\rangle \\
&\bar{a}_1^{i\dagger} |p^+, p^2, p^3; 0, 0, 1 \dots, 0; 0, 0, -1, 0 \dots, 0\rangle \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.54}$$

A másik lehetőség:

$$\begin{aligned}
&\bar{a}_1^{i\dagger}|p^+, p^2, p^3; -1, 0, 0 \dots, 0; 1, 0, 0, 0 \dots, 0\rangle \\
&\bar{a}_1^{i\dagger}|p^+, p^2, p^3; 0, -1, 0 \dots, 0; 0, 1, 0, 0 \dots, 0\rangle \\
&\bar{a}_1^{i\dagger}|p^+, p^2, p^3; 0, 0, -1 \dots, 0; 0, 0, 1, 0 \dots, 0\rangle \\
&\quad \vdots
\end{aligned} \tag{3.55}$$

A második esetben pedig a következő állapotok lehetségesek

$$\begin{aligned}
&a_1^{i\dagger}|p^+, p^2, p^3; 1, 0, 0 \dots, 0; 1, 0, 0, 0 \dots, 0\rangle \\
&a_1^{i\dagger}|p^+, p^2, p^3; 0, 1, 0 \dots, 0; 0, 1, 0, 0 \dots, 0\rangle \\
&a_1^{i\dagger}|p^+, p^2, p^3; 0, 0, 1 \dots, 0; 0, 0, 1, 0 \dots, 0\rangle \\
&\quad \vdots
\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}
&a_1^{i\dagger}|p^+, p^2, p^3; -1, 0, 0 \dots, 0; -1, 0, 0, 0 \dots, 0\rangle \\
&a_1^{i\dagger}|p^+, p^2, p^3; 0, -1, 0 \dots, 0; 0, -1, 0, 0 \dots, 0\rangle \\
&a_1^{i\dagger}|p^+, p^2, p^3; 0, 0, -1 \dots, 0; 0, 0, -1, 0 \dots, 0\rangle \\
&\quad \vdots
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Ezek azok az állapotok, amelyeket a maradék négy dimenziós világban látni fogunk. Összesen 44+44 állapotot kaptunk. Az érdekessége a fenti eredménynek az, hogy ezek tisztán húros zérus tömegű állapotok. Az előzőekben kapott (3.40)-(3.44) állapotok a kompaktifikációs sugártól függetlenek voltak. Ha viszont a kompaktifikációs sugarat egy bizonyos értékre választjuk, amint láttuk, újabb zérus tömegű állapotokat kapunk. Ez azt jelenti, hogy ennél a sugárnál fokozódik a mérték szimmetria és az előző $U(1)^{44}$ mérték csoport kibővül egy tágabb csoportra. Ezen tágabb mértékcsoportokat úgy tudnánk azonosítani, hogy megkeressük azon csoportokat, amelyek gyökei éppen a fenti állapotok töltései a Cartan részalgebrára nézve [3]. Az eddigi eredményekből azonban sejthető, hogy a kapott csoportok messze nem lesznek fenomenológiailag jelentősek. Az általunk készített modell ugyanis, szemmel láthatóan nem fogja a valóságot leírni (a fermionállapotoktól most eltekintünk). Először is, a sejtetett extra térdimenziókat egy tóruszra kompaktifikáltuk. A tórusz viszont túl sok szimmetriával rendelkezik. Ennek köszönhető az igen bő szimmetria amit kaptunk. A valósághoz közelebb álló kompaktifikációt kevesebb szimmetriával rendelkező felületen kéne végezni. A bozonokkal együtt fermionokat is leíró szuperhúrelméletek 10 dimenziósak. Komoly problémát jelent

viszont a megfelelő sokaság kiválasztása a kompaktifikációhoz. Ebben az esetben 6 dimenziót kell kompaktifikálnunk. A modellek alkotásához általában ún. Calabi-Yau sokaságokon végzik a kompaktifikációt [12]. Ennek az az előnye, hogy az eredeti szuperszimmetria egy részét megőrzi. Természetesen még további sokaságok is elképzelhetők, de a nagy kérdés persze az, hogy melyik lesz a legmegfelelőbb.

3.4. Összefoglalás és kitekintés

A dolgozat során tehát, megismerkedtünk a klasszikus hurok alapvető fogalmaival. Majd a hurok kvantumelméleti leírásával. Részletesen tárgyaltuk a bevezetett fénykúpmértékben a Lorentz invariancia szembeszökőségének az eltűnését, majd a Lorentz szimmetria fennállására feltételeket kaptunk amelyek rögzítették a téridő dimenzióját. Ezek után kompaktifikáltuk a zárt hűrt egy egyszerű felületre a tóruszra és megvizsgáltuk a zérus tömegű állapotokat. Azt találtuk, hogy egy bizonyos tórusz sugárnál megnő a zérus tömegű állapotok száma így valamilyen mérték szimmetriára tudunk következtetni. A mérték csoportot konkrétan nem határoztuk meg.

Végül azt tudom mondani, hogy a jövőben folytatnám eddigi munkámat. Ezen dolgozat megírása egy jó ismerkedés volt számomra a húrelmélet legalapvetőbb módszereivel és gondolatvilágával. Bővíteni és mélyíteni szeretném ismereteimet. Ezért a továbbiakban, többek között, ezen a területen szeretném végezni a kutatásaimat.

Köszönetnyilvánítás

Először is köszönetet szeretnék mondani Horváth Zalán Professzor Úrnak, amiért elvállalta a

témavezetésem, sok jó hasznos tanáccsal látott el, és segített a témában való elmélyüléshez. Kifejezetten élveztem a társaságát és a beszélgetéseinket.

Szeretném továbbá megköszönni a kedves szüleimnek, nagyszüleimnek és az egész családomnak a támogatást, amelyet nem csak most, hanem az egyetemi tanulmányaim során adtak.

Végül pedig iskolatársaimnak és sok jó barátomnak, akikkel megoszthattam és megvitathattam az ötleteimet.

Varga Bonbien

2010. Május 26.

Irodalomjegyzék

- [1] B. Zwiebach, *A First Course in String theory*. 2nd edition, ΨCambridge University Press, 2009.
- [2] K. Becker, M. Becker and J. H. Schwarz, *String Theory and M-theory, a modern introduction*. ΨCambridge University Press, 2007.
- [3] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory, volume 1, Introduction*. Ψ Cambridge University Press, 1987.
- [4] J. Polchinski, *String Theory, Vol. 1 : An Introduction to the Bosonic String*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1998.
- [5] M. Srednicki, *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1 edition, 2007
- [6] P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi, and C. B. Thorn, *Quantum dynamics of a massless relativistic string*, Nucl. Phys. B 56, 109. 1973.
- [7] J. Balog, P. Forgács, Z. Horváth and P. Vecsernyés, *Lattice classification of the four-dimensional heterotic strings*, Phys. Lett. B197, 395. 1987.
- [8] D. Wallace, *The quantization of gravity - an introduction*. arXiv:gr-qc/0004005v1
- [9] G. Svetlichny, *Preparation for Gauge Theory*. arXiv:math-ph/9902027v3, 1999
- [10] E. Alvarez, L. Alvarez-Gaume and Y. Lozano *An Introduction to T-Duality in String Theory*. ΨarXiv:hep-th/9410237v2, 1994
- [11] B. Greene, *The Elegant Universe: Superstrings, Hidden Dimensions, and the Quest for the Ultimate Theory*. Vintage Series, Random House Inc, ISBN 0-375-70811-1. 2000.
- [12] A. Font and S. Theisen *Introduction to String Compactification*. Lectures, matematicas.uniandes.edu.co/summer2003/courses/theisenfont.pdf, 2003.
- [13] T. Kaluza, *Zum Unitätsproblem in der Physik*. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.) 1921: 966972. 1921.

- [14] O. Klein, *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie*. Zeitschrift für Physik a Hadrons and Nuclei 37 (12): 895906. 1926.
- [15] J. C. Maxwell, *A dynamical theory of the electromagnetic field*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London 155: 459512. 1865.