

Hullámterjedési jelenségek csatolt oszcillátor-rendszerekben

Diplomamunka

Szilvási Ádám
Fizika alapszak

Témavezető
Dávid Gyula
szakoktató
Atomfizikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

2010.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
1.1. Irodalmi áttekintés	1
1.2. A diplomamunka célkitűzései	2
2. Módszerek	3
2.1. Az eljárás ismertetése	3
2.2. Bevezető példa - a lineáris lánc	3
2.2.1. Mozgásegyenlet és diszperziós reláció	3
2.2.2. Kezdetiérték-probléma	4
2.2.3. Megoldás kiintegrálása	8
2.3. Megjegyzés	10
3. Eredmények	11
3.1. A háromszögrács viszonyai	11
3.2. A mozgásegyenlet	12
3.3. A dinamikai mátrix sajátérték-problémája	13
3.4. Kezdetiérték-feladat megoldása	14
3.5. A Green-függvény	18
4. Következtetések	19
4.1. Numerikus eredmények	19
4.2. További gondolatok	21

1. fejezet

Bevezetés

A rezgések és hullámok vizsgálata, a harmonikus oszcillátor a fizika minden területén előkerül. A csatolt oszcillátor-rendszer a klasszikus mechanika, elektrodinamika, kvantummechanika, szilárdtestfizika területein sűrűn alkalmazott modell. Amíg a szilárdtestfizikában a kristályos anyagok modellezésére használják, mint közelítés, addig a kvantum elektrodinamikában ez egzakt modellje az elektromágneses térnek.

A szilárdtestfizikában sokat vizsgált téma a lineáris lánc, mivel különböző kezdőfeltételekkel, kényszerrezgéssel, fél-végtelen, végtelen és véges láncokkal egzaktul megoldható feladat. Vizsgálat tárgyát képezik a magasabb dimenziós csatolt oszcillátor rendszerek is, elsősorban három dimenzióban, de nem kizárólag.

1.1. Irodalmi áttekintés

A szilárdtestfizikai csatolt oszcillátorok legalapvetőbb példája, a lineáris lánc minden bevezető szilárdtestfizikai tankönyvben szerepelnek [1, Kittel 4. fejezet] [2, Ashcroft és mtsai 22. fejezet], de aktív vizsgálat tárgyát képezik ma is. [3, Loucke, 1962] például kiszámolta a két végén rögzített lineáris lánc normál módusait, [4, Weinstock, 1970] és [5, Lee, 1972] félvégtelen láncon terjedő zavart vizsgált, majd [6, Lee és Wang] általános kezdőfeltétellel is megoldja a problémát. [7, Merchant és Brill, 1973] egy végtelen lineáris

láncot vizsgált, és hogy az impulzus hogyan marad meg, és hogy a $k = 0$ módus hordozza a rendszernek átadott teljes impulzust. [8, Munley, 1991] egy rekurzív formulát mutat be a feladat megoldásában használt $N \times N$ -es mátrix invertálására, és megoldja az általános problémát.

A mi számunkra érdekesebb viszont, hogy [9, Cserti és Tichy, 2004] a grafén fizikájának fókuszpontba kerülésével a kétdimenziós hatszögrács rezgési tulajdonságaival kezdtek foglalkozni. A módszert, aminek során megoldották a rendszer dinamikai mátrixának sajátértékproblémáját, és ezzel megkapták a diszperziós relációt és a rezgési módusokat, a cikk végén alkalmazzák két másik rácsra is, mégpedig ebből az egyik a háromszögrács. Egy rövid számolással megadják a diszperziós reláció algebrai alakját, valamint a numerikusan számolt értékét a Brillouin zónában, azonban a feladat kidolgozatlan marad.

1.2. A diplomamunka célkitűzései

A diplomamunka célja egy kétdimenziós egyenlő oldalú háromszögrács rezgéseit vizsgálni. Az m tömegű golyókat D rugóállandójú ideális rugók tartják össze. Csak az első szomszéd kölcsönhatásokat vesszük figyelembe, és csak kis kitéréseket, lineáris erőt és harmonikus rezgést feltételezünk. Speciális kezdőfeltételeket vizsgálunk: $t = 0$ pillanatban minden golyó az egyensúlyi helyzetében van, kivéve az origóban lévőt, és minden golyó kezdősebessége zérus. Ezekkel a kezdőfeltételekkel megkapjuk a rendszer Green-függvényét.

2. fejezet

Módszerek

2.1. Az eljárás ismertetése

A megoldáshoz először felírjuk a rendszer differenciálegyenletét, majd ennek Fourier-transzformálásával kapunk egy ezzel ekvivalens sajátérték-problémát. Ennek sajátértékei a rendszer diszperziós relációját adják meg.

Mi szeretnénk azonban továbbmenni a sajátérték-problémánál, és miután megkaptuk a diszperziós relációkat, megoldjuk a kezdetiérték-feladatot is speciális kezdőfeltételekkel, hogy megkapjuk belőle a rendszer Green-függvényét.

A következőkben bemutatom a módszert egy jól ismert, és kiintegrálható példán.

2.2. Bevezető példa - a lineáris lánc

2.2.1. Mozgásegyenlet és diszperziós reláció

Tekintsünk egy végtelen hosszú lineáris láncot. Legyenek a rugók ideálisak, a maximális megnyúlásuk legyen kicsi, hogy a másodrendű tagokat elhanyagolhassuk, valamint csak az első szomszédokat vizsgáljuk. Jelölje az $u_n(t)$ függvény az n . golyó kitérését az idő függvényében, legyen m a golyó tömege, és D a rugóállandó. A mozgásegyenlet a következő alakot ölti:

$$m\ddot{u}_n(t) = -D(2u_n(t) - u_{n+1}(t) - u_{n-1}(t)) \quad (2.1)$$

A golyók száma N , a rugók nyugalmi hossza a , és a -val való eltolásra az egész rendszer invariáns. Ekkor a megoldást a következő alakban kereshetjük:

$$u_n(t) = \sum_{k \in Bz} \alpha_k e^{i(kan - \omega(k)t)} \quad \alpha_k \in C \quad (2.2)$$

Helyettesítsük vissza a (2.2) megoldást (2.1) egyenletbe.

$$\begin{aligned} \sum_{k \in Bz} -m\omega^2 \alpha_k e^{i(kan - \omega(k)t)} &= \sum_{k \in Bz} -D(2 - e^{ika} - e^{-ika}) \alpha_k e^{i(kan - \omega(k)t)} \\ m\omega^2 &= D(2 - e^{ika} - e^{-ika}) = 2D(1 - \cos ka) \\ \omega^2 &= \frac{2D}{m}(1 - \cos ka) \\ \omega &= \sqrt{\frac{2D}{m}(1 - \cos ka)} \\ \omega(k) &= 2\sqrt{\frac{D}{m}} \left| \sin \frac{ka}{2} \right| \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\omega(k) = \omega(-k) \quad (2.4)$$

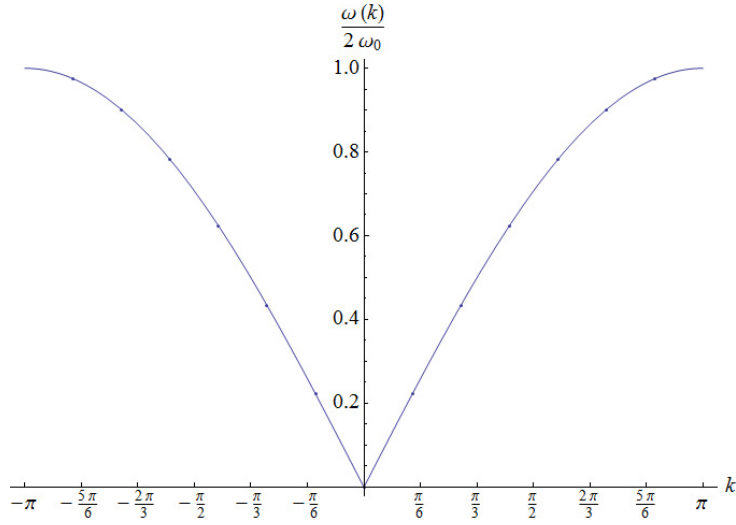
Ezzel megkaptuk a diszperziós relációt. Mivel a szilárdtestfizikában elsősorban a diszperziós relációra van szükség, a legtöbb irodalom eddig a levezetésig foglalkozik a lineáris lánc modelljével. A fenti levezetés megtalálható minden bevezető szintű tankönyvben, mint legegyszerűbb modellje a szilárd anyagnak. [1, p. 99-100]

2.2.2. Kezdetiérték-probléma

Mi azonban tovább megyünk, és megoldjuk a kezdetiérték-problémát. A rendszer Green-függvénye az egységnyi gerjesztésre adott válasz lesz. Ehhez a következő kezdőfeltételekkel oldjuk meg a feladatot:

$$u_n(t=0) = x_0 \cdot \delta_{n0} \quad (2.5)$$

$$\dot{u}_n(t=0) = 0 \quad \forall n \quad (2.6)$$



2.1. ábra. A lineáris lánc diszperziós relációja. A k értékei $1/a$ egységekben vannak megadva.

Az együtthatók illesztéséhez vennünk kell a megoldás valós részét.

$$\alpha_k = A_k + iB_k \quad A_k, B_k \in R$$

$$\Re\{u_n(t)\} = \sum_{k \in Bz} (A_k \cos(kan - \omega(k)t) - B_k \sin(kan - \omega(k)t)) \quad (2.7)$$

$$\dot{u}_n(t) = \sum_{k \in Bz} \omega(k) (A_k \sin(kan - \omega(k)t) + B_k \cos(kan - \omega(k)t)) \quad (2.8)$$

Ezeket a függvényeket illesztjük.

$$\sum_{k \in Bz} (A_k \cos(kan) - B_k \sin(kan)) = x_0 \cdot \delta_{n0} \quad (2.9)$$

$$\sum_{k \in Bz} \omega(k) (A_k \sin(kan) + B_k \cos(kan)) = 0 \quad (2.10)$$

Végezzük el először a sebesség illesztését. Ahhoz, hogy megkapjuk az együtthatókat, szorozzuk meg (2.10) mindkét oldalát $\cos(k'an)$ -nel, és össze-

gezzünk fel n -re.

$$\begin{aligned} \sum_n \sum_{k \in Bz} \omega(k) (A_k \sin(kan) + B_k \cos(kan)) \times \cos(k'an) &= \sum_n 0 \times \cos(k'an) \\ \sum_{k \in Bz} \omega(k) \left(A_k \sum_n \sin(kan) \cos(k'an) + B_k \sum_n \cos(kan) \cos(k'an) \right) &= 0 \end{aligned}$$

Felhasználva a (2.11) és (2.12) összefüggést, elvégezhetjük az összegzéseket:

$$\sum_n \sin(kan) \cos(k'an) = 0 \quad (2.11)$$

$$\sum_n \cos(kan) \cos(k'an) = N \frac{(\delta_{k-k'} + \delta_{k+k'})}{2} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k \in Bz} \omega(k) B_k N \frac{(\delta_{k+k'} + \delta_{k-k'})}{2} &= 0 \\ \frac{N}{2} (\omega(-k') B_{-k'} + \omega(k') B_{k'}) &= 0 \end{aligned}$$

Kihhasználva a diszperziós reláció párosságát (2.4), a fenti egyenlőségből a következő eredményt kapjuk a B_k -ra:

$$\begin{aligned} B_{-k'} + B_{k'} &= 0 \\ B_k &= -B_{-k} \quad \forall k \end{aligned} \quad (2.13)$$

Tehát a B_k páratlan a k -ban. Határozzuk meg A_k -t is ugyanilyen módszerrel, beszorozva a (2.10) egyenletet $\sin(k'an)$ -nel, és felösszegezve n -re:

$$\begin{aligned} \sum_n \sum_{k \in Bz} \omega(k) (A_k \sin(kan) + B_k \cos(kan)) \times \sin(k'an) &= \sum_n 0 \times \sin(k'an) \\ \sum_{k \in Bz} \omega(k) \left(A_k \sum_n \sin(kan) \sin(k'an) + B_k \sum_n \cos(kan) \sin(k'an) \right) &= 0 \end{aligned}$$

Az előbbihez hasonlóan felhasználva a (2.11) és (2.14) összefüggést, valamint

kihasználva (2.4) tulajdonságot, elvégezhetjük az összegzéseket:

$$\sum_n \sin(kan) \sin(k'an) = N \frac{(\delta_{k+k'} - \delta_{k-k'})}{2} \quad (2.14)$$

$$\sum_{k \in Bz} \omega(k) A_k N \frac{(\delta_{k+k'} - \delta_{k-k'})}{2} = 0$$

$$\frac{N}{2} \omega(k') (A_{-k'} - A_{k'}) = 0$$

$$A_k = A_{-k} \quad \forall k \quad (2.15)$$

Vagyis A_k k -ban páros.

A kezdeti helyek illesztését ugyanígy elvégezhetjük:

$$\begin{aligned} \sum_n \sum_{k \in Bz} (A_k \cos kan - B_k \sin kan) \times \sin k'an &= \sum_n x_0 \delta_{n0} \times \sin k'an \\ \sum_{k \in Bz} A_k \sum_n \cos kan \sin k'an - B_k \sum_n \sin kan \sin k'an &= x_0 \sum_n \delta_{n0} \sin k'an \end{aligned}$$

Újra felhasználva (2.11) és (2.14) összefüggést, valamint kihasználva a Kronecker delta tulajdonságait, elvégezhetjük az összegzéseket:

$$\sum_{k \in Bz} -B_k N \frac{(\delta_{k+k'} - \delta_{k-k'})}{2} = x_0 \underbrace{\sum_n \delta_{n0} \sin k'an}_0$$

$$\frac{N}{2} (-B_{-k'} + B_{k'}) = 0$$

$$B_k = B_{-k} \quad \forall k \quad (2.16)$$

Azt kaptuk, hogy B_k páros a k -ban. (2.16) és (2.13) egyszerre csak úgy teljesülhet, ha B_k azonosan nulla.

$$B_k \equiv 0 \quad \forall k \quad (2.17)$$

Végezzük el A_k illesztését is:

$$\begin{aligned} \sum_n \sum_{k \in Bz} (A_k \cos kan - B_k \sin kan) \times \cos k'an &= \sum_n x_0 \delta_{n0} \times \cos k'an \\ \sum_{k \in Bz} A_k \sum_n \cos kan \cos k'an - B_k \sum_n \sin kan \cos k'an &= x_0 \sum_n \delta_{n0} \cos k'an \end{aligned}$$

Végezzük el az összegzéseket a fenti módszerekkel:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in Bz} A_k N \frac{(\delta_{k+k'} + \delta_{k-k'})}{2} &= x_0 \underbrace{\sum_n \delta_{n0} \cos k'an}_1 \\ \frac{N}{2} (A_{-k'} + A_{k'}) &= x_0 \end{aligned}$$

Kihasználva, hogy (2.15) szerint A_k páros, megkapjuk A_k együtthatót:

$$\begin{aligned} NA_{k'} &= x_0 \\ A_k &= \frac{x_0}{N} \quad \forall k \end{aligned} \tag{2.18}$$

Vagyis A_k nem függ a k -től.

2.2.3. Megoldás kiintegrálása

Most visszaírhatjuk $u_n(t)$ -be a fent kapott együtthatókat:

$$u_n(t) = \sum_{k \in Bz} \frac{x_0}{N} \cos(kan - \omega(k)t) \tag{2.19}$$

Mivel a rendszerünk végtelen nagy a k értékei sűrűn helyezkednek el.

Végezzük el az összegzést úgy, hogy áttérünk integrálra [2, p. 37 2.29]:

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in Bz} &\rightarrow \frac{Na}{2\pi} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk \\
u_n(t) &= \frac{Na}{2\pi} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk \frac{x_0}{N} \cos(kan - \omega(k)t) \\
u_n(t) &= \frac{x_0 a}{2\pi} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk \cos\left(kan - 2\sqrt{\frac{D}{m}} \left| \sin \frac{ka}{2} \right| t\right) \quad (2.20)
\end{aligned}$$

Helyettesítsük a következőket:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \qquad \phi = \frac{ka}{2} \qquad d\phi = \frac{adk}{2} \qquad \frac{\pi}{a} \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Innen egy nagyon szép számolással ki lehet integrálni a Green-függvény egzakt alakját, amely csak az ilyen egyszerű esetekben lehetséges általában.

$$\begin{aligned}
u_n(t) &= \frac{x_0}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \cos(2n\phi - 2\omega_0 t |\sin \phi|) = \\
&= \frac{x_0}{\pi} \left(\underbrace{\int_{-\pi/2}^0 d\phi \cos(2n\phi - 2\omega_0 t \underbrace{|\sin \phi|}_{-\sin \phi})}_{\substack{\varphi = \phi + \pi \\ d\varphi = d\phi \\ -\pi/2 \rightarrow \pi/2 \\ 0 \rightarrow \pi}} + \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\int_0^{\pi/2} d\phi \cos(2n\phi - 2\omega_0 t \underbrace{|\sin \phi|}_{\sin \phi})}_{\varphi = \phi} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x_0}{\pi} \left(\int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \cos(2n(\varphi - \pi) + 2\omega_0 t \underbrace{\sin(\varphi - \pi)}_{-\sin \varphi}) + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\pi/2} d\varphi \cos(2n\varphi - 2\omega_0 t \sin \varphi) \right) = \\
&= \frac{x_0}{\pi} \left(\int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \underbrace{\cos(2n\varphi - 2\omega_0 t \sin \varphi - 2n\pi)}_{\cos(2n\varphi - 2\omega_0 t \sin \varphi)} + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\pi/2} d\varphi \cos(2n\varphi - 2\omega_0 t \sin \varphi) \right) = \\
&= \frac{x_0}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \cos(2n\varphi - 2\omega_0 t \sin \varphi) \equiv x_0 J_{2n}(2\omega_0 t)
\end{aligned}$$

Az utolsó lépésben alkalmaztuk a Bessel-függvény integrális definícióját. [10, p. 360 9.1.21] Ezzel megkaptuk a rendszer Green-függvényét:

$$u_n(t) = x_0 J_{2n}(2\omega_0 t) \quad (2.21)$$

2.3. Megjegyzés

Ez nem a feladat teljes megoldása. Ahhoz, hogy bármilyen kezdőfeltételt kezelni tudjunk, meg kell oldani ugyanezt a feladatot arra az esetre is, amikor minden részecske az egyensúlyi helyén van, és az origóban levő $t = 0$ időpontban kap egy impulzust, amivel egy v_0 kezdősebességre tesz szert. Ha ez a Green-függvény is megvan, a kettő lineárkombinációja segítségével már tetszőleges függvénnyel megadott kezdőfeltételhez illesztjük a megoldásunkat. Ez a feladat azonban jelen dolgozat keretein túlmutat.

A fejezetben bemutatott módszert alkalmaztam a kétdimenziós háromszögrácsban terjedő rezgések Green-függvényének megkeresésére.

3. fejezet

Eredmények

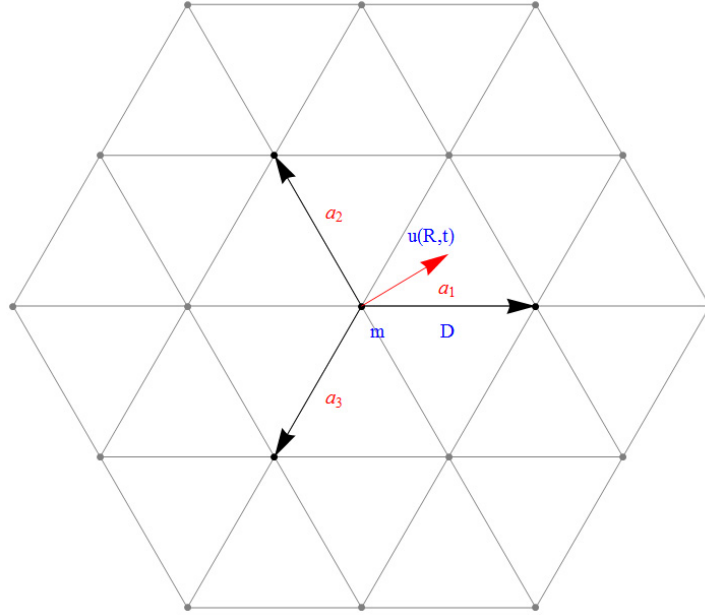
3.1. A háromszögrács viszonyai

Vizsgáljuk meg az előző fejezetben ismertetett módszer segítségével az egyenő oldalú háromszögrácsot.

Egyenlő oldalú háromszögekből álló kétdimenziós rács viszonyait a következőképpen írhatjuk le derékszögű koordináta rendszerben, egy golyó nyugalmi helyzetét véve origónak. Egy pontnak hat első szomszédja van, melyek három egyenesre esnek. A szomszédos m tömegű pontokat D direkciónál állandójú ideális rugók kötik össze. Vegyük fel a szomszédos pontokba mutató vektorokat:

$$\mathbf{a}_1 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = a \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = a \begin{pmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Az \mathbf{R} helyvektor a rácspontra mutat, és a következőképpen lehet felírni: $\mathbf{R} = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2$, ahol $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$.



3.1. ábra. A háromszögrács viszonyai

3.2. A mozgásegyenlet

Az \mathbf{R} helyen lévő golyó kitérését t időpillanatban az $\mathbf{u}(\mathbf{R}, t)$ vektor adja meg. A lineáris lánc esetéhez hasonlóan megkaphatjuk a mozgásegyenletet [9, p. 39]:

$$m\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{R}, t) = D \sum_{i=1}^3 \frac{(\mathbf{a}_i \circ \mathbf{a}_i)}{a^2} (\mathbf{u}(\mathbf{R} + \mathbf{a}_i, t) + \mathbf{u}(\mathbf{R} - \mathbf{a}_i, t) - 2\mathbf{u}(\mathbf{R}, t)) \quad (3.2)$$

(3.2) \mathbf{u} elmozdulásra végtelen sok egyenlet. Hagyományos módon olyan hullámmegoldásokat keresünk, amelyek frekvenciája $\omega(\mathbf{k})$, hullámszámvektora pedig \mathbf{k} :

$$\mathbf{u}_n^{(\mathbf{k})}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{u}_n(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega_n(\mathbf{k})t)} \quad n = \{1, 2\} \quad (3.3)$$

Itt $\mathbf{u}_n(\mathbf{k})$ vektor ismeretlen, \mathbf{k} pedig az első Brillouin zónában van. A Kármán-féle periodikus határfeltételek érvényesek, vagyis $\mathbf{u}(\mathbf{R} + N_i * \mathbf{a}_i) = \mathbf{u}(\mathbf{R})$, ahol N_1 és N_2 nagy egész számok, ahol $N_1 * N_2 = N$ a kristályban

lévő összes elemi cella száma. A periodikus határfeltétel megkvantálja a k hullámszám vektort, ami a következő alakba írható fel:

$$\mathbf{k} = \frac{p_1}{N_1} * \mathbf{b}_1 + \frac{p_2}{N_2} * \mathbf{b}_2, \quad (3.4)$$

ahol $p_1, p_2 \in \mathbf{Z}$, és \mathbf{b}_j -k a reciprokrács vektorok, amelyeket az $\mathbf{a}_i \mathbf{b}_j = 2\pi \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$ összefüggés definiál. Mindig választhatunk olyan p_1, p_2 számpárt, amivel a \mathbf{k} -t az első Brillouin zónára korlátozzuk, mivel csak ezeknek van valós fizikai tartalmuk.

(3.3)-at behelyettesítve (3.2)-be a következő sajátértékegyenletre jutunk:

$$-m\omega_n^2(\mathbf{k})\mathbf{u}_n(\mathbf{k}) = D \sum_{i=1}^3 \frac{(\mathbf{a}_i \circ \mathbf{a}_i)}{a^2} \left(\underbrace{e^{i(\mathbf{k}\mathbf{a}_i)} + e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{a}_i)}}_{2 \cos \mathbf{k}\mathbf{a}_i} - 2 \right) \mathbf{u}_n(\mathbf{k}) \quad (3.5)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{k}) \equiv 4 \frac{D}{m} \sum_{i=1}^3 \frac{(\mathbf{a}_i \circ \mathbf{a}_i)}{a^2} \sin^2 \frac{\mathbf{k}\mathbf{a}_i}{2} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{k})\mathbf{u}_n(\mathbf{k}) = \omega_n^2(\mathbf{k})\mathbf{u}_n(\mathbf{k}) \quad (3.7)$$

Ez a sajátérték-egyenlet ekvivalens a mozgásegyenlettel.

3.3. A dinamikai mátrix sajátérték-problémája

A \mathbf{D} mátrixot a rendszer dinamikai mátrixának nevezik. A sajátértékei a diszperziós relációk, a sajátvektorai pedig az adott frekvenciához tartozó rezgési módusokat fejezik ki.

$$\mathbf{D} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} (4\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) & -\sqrt{3}(\epsilon_2 - \epsilon_3) \\ -\sqrt{3}(\epsilon_2 - \epsilon_3) & 3(\epsilon_2 + \epsilon_3) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \epsilon_i = \sin^2 \frac{\mathbf{k}\mathbf{a}_i}{2} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \end{matrix} \quad (3.8)$$

Ennek a megoldásával megkapjuk a diszperziós relációt és a mátrix sajátvektorait. Mivel \mathbf{D} Hermitikus, ezért sajátértékei valósak, sajátvektorai

ortogonálisak. A sajátértékek, illetve a diszperziós relációk:

$$\omega_{1,2}^2(\mathbf{k}) = 2\omega_0^2 \left(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \pm \sqrt{\epsilon_1^2 - \epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2^2 - \epsilon_1\epsilon_3 - \epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_3^2} \right) \quad (3.9)$$

$$\omega_{1,2}(\mathbf{k}) = \sqrt{2}\omega_0 \sqrt{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \pm \sqrt{\epsilon_1^2 - \epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2^2 - \epsilon_1\epsilon_3 - \epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_3^2}} \quad (3.10)$$

A sajátvektorok:

$$\mathbf{u}_{1,2}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 2\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 \mp 2\sqrt{\epsilon_1^2 - \epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2^2 - \epsilon_1\epsilon_3 - \epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_3^2} \\ \sqrt{3}(-\epsilon_2 + \epsilon_3) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{u}_{1,2}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi}{a} \begin{pmatrix} \epsilon_1 - \epsilon_2 \mp \sqrt{\epsilon_1^2 - \epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2^2 - \epsilon_1\epsilon_3 - \epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_3^2} \\ \frac{4\pi}{a}(-\epsilon_2 + \epsilon_3) \end{pmatrix} \mathbf{a}_1 + \frac{4\pi}{a}(-\epsilon_2 + \epsilon_3) \mathbf{a}_2 \quad (3.12)$$

$$\gamma_{1,2}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \epsilon_1 - \epsilon_2 \mp \sqrt{\epsilon_1^2 - \epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2^2 - \epsilon_1\epsilon_3 - \epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_3^2} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

3.4. Kezdetiérték-feladat megoldása

Írjuk fel a valós megoldást a kapott módusok szerinti felbontásban:

$$\mathbf{u}(\mathbf{R}, t) = \sum_{\mathbf{k} \in B_z} (A_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{kR} - \omega_1(\mathbf{k})t) - B_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{kR} - \omega_1(\mathbf{k})t)) \mathbf{u}_1(\mathbf{k}) + (C_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{kR} - \omega_2(\mathbf{k})t) - D_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{kR} - \omega_2(\mathbf{k})t)) \mathbf{u}_2(\mathbf{k}) \quad (3.14)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{R}, t) = \sum_{\mathbf{k} \in B_z} \omega_1(\mathbf{k}) (A_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{kR} - \omega_1(\mathbf{k})t) + B_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{kR} - \omega_1(\mathbf{k})t)) \mathbf{u}_1(\mathbf{k}) + \omega_2(\mathbf{k}) (C_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{kR} - \omega_2(\mathbf{k})t) + D_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{kR} - \omega_2(\mathbf{k})t)) \mathbf{u}_2(\mathbf{k}) \quad (3.15)$$

A Green-függvényt a következő kezdőfeltételek illesztésével kapjuk meg:

$$\mathbf{u}(\mathbf{R}, t = 0) = \mathbf{x}_0 \cdot \delta_{\mathbf{R},0} \quad (3.16)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{R}, t = 0) = 0 \quad (3.17)$$

$$\sum_{\mathbf{k} \in Bz} (A_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k}\mathbf{R}) - B_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{k}\mathbf{R})) \mathbf{u}_1(\mathbf{k}) + \quad (3.18)$$

$$+(C_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k}\mathbf{R}) - D_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{k}\mathbf{R})) \mathbf{u}_2(\mathbf{k}) = \mathbf{x}_0 \cdot \delta_{\mathbf{R},0}$$

$$\sum_{\mathbf{k} \in Bz} \omega_1(\mathbf{k}) (A_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{k}\mathbf{R}) + B_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k}\mathbf{R})) \mathbf{u}_1(\mathbf{k}) + \quad (3.19)$$

$$+\omega_2(\mathbf{k}) (C_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{k}\mathbf{R}) + D_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k}\mathbf{R})) \mathbf{u}_2(\mathbf{k}) = 0$$

Formálisan ugyanúgy járunk el, mint az előző fejezetben. A következő összefüggéseket fogjuk kihasználni:

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{k}) \mathbf{u}_2(\mathbf{k}) = 0 \quad (3.20)$$

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{k}) = \mathbf{u}_n(-\mathbf{k}) \quad (3.21)$$

$$\omega_n(\mathbf{k}) = \omega_n(-\mathbf{k}) \quad (3.22)$$

Először ismét a sebességet illesszük. Használjuk ki a fenti összefüggéseken kívül az előző fejezetben használt (2.11), (2.12), (2.14) egyenlőségek megfelelő alakját.

$$\sum_{\mathbf{k} \in Bz} \omega_1(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{R}} (A_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{k}\mathbf{R}) + B_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k}\mathbf{R})) \times \cos(\mathbf{k}'\mathbf{R}) \mathbf{u}_1(\mathbf{k}) +$$

$$+\omega_2(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{R}} (C_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{k}\mathbf{R}) + D_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k}\mathbf{R})) \times \cos(\mathbf{k}'\mathbf{R}) \mathbf{u}_2(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{R}} 0 \times \cos(\mathbf{k}'\mathbf{R})$$

$$\sum_{\mathbf{k} \in Bz} \omega_1(\mathbf{k}) B_{\mathbf{k}} \frac{N}{2} (\delta_{k+k'} + \delta_{k-k'}) \mathbf{u}_1(\mathbf{k}) + \omega_2(\mathbf{k}) D_{\mathbf{k}} \frac{N}{2} (\delta_{k+k'} + \delta_{k-k'}) \mathbf{u}_2(\mathbf{k}) = 0$$

$$\omega_1(\mathbf{k}') \frac{N}{2} (B_{\mathbf{k}'} + B_{-\mathbf{k}'}) \mathbf{u}_1(\mathbf{k}') + \omega_2(\mathbf{k}') \frac{N}{2} (D_{\mathbf{k}'} + D_{-\mathbf{k}'}) \mathbf{u}_2(\mathbf{k}') = 0$$

$$B_{\mathbf{k}} = -B_{-\mathbf{k}} \quad \forall k \quad (3.23)$$

$$D_{\mathbf{k}} = -D_{-\mathbf{k}} \quad \forall k \quad (3.24)$$

Tehát a $B_{\mathbf{k}}$ és $D_{\mathbf{k}}$ páratlanok \mathbf{k} -ban.

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{k} \in Bz} \omega_1(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{R}} (A_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{k}\mathbf{R}) + B_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k}\mathbf{R})) \times \sin(\mathbf{k}'\mathbf{R}) \mathbf{u}_1(\mathbf{k}) + \\ & + \omega_2(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{R}} (C_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{k}\mathbf{R}) + D_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k}\mathbf{R})) \times \sin(\mathbf{k}'\mathbf{R}) \mathbf{u}_2(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{R}} 0 \times \sin(\mathbf{k}'\mathbf{R}) \\ & \sum_{\mathbf{k} \in Bz} \omega_1(\mathbf{k}) A_{\mathbf{k}} \frac{N}{2} (\delta_{k+k'} - \delta_{k-k'}) \mathbf{u}_1(\mathbf{k}) + \omega_2(\mathbf{k}) C_{\mathbf{k}} \frac{N}{2} (\delta_{k+k'} - \delta_{k-k'}) \mathbf{u}_2(\mathbf{k}) = 0 \\ & \omega_1(\mathbf{k}') \frac{N}{2} (A_{\mathbf{k}'} - A_{-\mathbf{k}'}) \mathbf{u}_1(\mathbf{k}') + \omega_2(\mathbf{k}') \frac{N}{2} (C_{\mathbf{k}'} - C_{-\mathbf{k}'}) \mathbf{u}_2(\mathbf{k}') = 0 \end{aligned}$$

$$A_{\mathbf{k}} = A_{-\mathbf{k}} \quad \forall k \quad (3.25)$$

$$C_{\mathbf{k}} = C_{-\mathbf{k}} \quad \forall k \quad (3.26)$$

Ez az eredmény is egybecseng természetesen az előző fejezet példájával: $A_{\mathbf{k}}$ és $C_{\mathbf{k}}$ is páros \mathbf{k} függvényében.

Illesszük ezután a kezdőhelyet a fentiekhez hasonlóan.

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{k} \in Bz} \sum_{\mathbf{R}} (A_{\mathbf{k}} \cos \mathbf{k}\mathbf{R} - B_{\mathbf{k}} \sin \mathbf{k}\mathbf{R}) \times \sin(\mathbf{k}'\mathbf{R}) \mathbf{u}_1(\mathbf{k}) + \\ & + \sum_{\mathbf{R}} (C_{\mathbf{k}} \cos \mathbf{k}\mathbf{R} - D_{\mathbf{k}} \sin \mathbf{k}\mathbf{R}) \times \sin(\mathbf{k}'\mathbf{R}) \mathbf{u}_2(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{R}} \mathbf{x}_0 \cdot \delta_{\mathbf{R},0} \times \sin \mathbf{k}'\mathbf{R} \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k} \in Bz} -B_{\mathbf{k}} \frac{N}{2} (\delta_{k+k'} - \delta_{k-k'}) \mathbf{u}_1(\mathbf{k}) - D_{\mathbf{k}} \frac{N}{2} (\delta_{k+k'} - \delta_{k-k'}) \mathbf{u}_2(\mathbf{k}) = \\ = \mathbf{x}_0 \underbrace{\sum_{\mathbf{R}} \delta_{\mathbf{R},0} \sin(\mathbf{k}'\mathbf{R})}_0 \end{aligned}$$

$$\frac{N}{2} (-B_{-\mathbf{k}'} + B_{\mathbf{k}'}) \mathbf{u}_1(\mathbf{k}') + \frac{N}{2} (-D_{-\mathbf{k}'} + D_{\mathbf{k}'}) \mathbf{u}_2(\mathbf{k}') = 0$$

$$B_{\mathbf{k}} = B_{-\mathbf{k}} \quad \forall k \quad (3.28)$$

$$D_{\mathbf{k}} = D_{-\mathbf{k}} \quad \forall k \quad (3.29)$$

Ismét azt kaptuk, hogy $B_{\mathbf{k}}$ és $D_{\mathbf{k}}$ egyszerre páros és páratlan, vagyis mind-

kettő azonosan nulla.

$$B_k \equiv 0 \quad (3.30)$$

$$D_k \equiv 0 \quad (3.31)$$

Folytassuk az illesztést az $A_{\mathbf{k}}$ és $C_{\mathbf{k}}$ együtthatókkal:

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{k} \in Bz} \sum_{\mathbf{R}} (A_{\mathbf{k}} \cos \mathbf{k}\mathbf{R} - B_{\mathbf{k}} \sin \mathbf{k}\mathbf{R}) \times \cos(\mathbf{k}'\mathbf{R}) \mathbf{u}_1(\mathbf{k}) + \\ & + \sum_{\mathbf{R}} (C_{\mathbf{k}} \cos \mathbf{k}\mathbf{R} - D_{\mathbf{k}} \sin \mathbf{k}\mathbf{R}) \times \cos(\mathbf{k}'\mathbf{R}) \mathbf{u}_2(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{R}} \mathbf{x}_0 \cdot \delta_{\mathbf{R},0} \times \cos \mathbf{k}'\mathbf{R} \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{k} \in Bz} A_{\mathbf{k}} \frac{N}{2} (\delta_{k+k'} + \delta_{k-k'}) \mathbf{u}_1(\mathbf{k}) + C_{\mathbf{k}} \frac{N}{2} (\delta_{k+k'} + \delta_{k-k'}) \mathbf{u}_2(\mathbf{k}) = \\ & = \mathbf{x}_0 \underbrace{\sum_{\mathbf{R}} \delta_{\mathbf{R},0} \cos(\mathbf{k}'\mathbf{R})}_1 \end{aligned}$$

$$N(A_{\mathbf{k}'} \mathbf{u}_1(\mathbf{k}') + C_{\mathbf{k}'} \mathbf{u}_2(\mathbf{k}')) = \mathbf{x}_0 \quad (3.33)$$

Bontsuk fel mindkét oldalt a rácsvektorok szerint, majd mivel \mathbf{a}_1 és \mathbf{a}_2 lineárisan függetlenek, egyértelműen bontanak fel a síkban bármilyen vektort. Ez azt jelenti, hogy az egyenlőség akkor áll csak fenn, ha a két oldalon a vektorok együtthatói külön-külön megegyeznek.

$$\mathbf{x}_0 = \alpha \mathbf{a}_1 + \beta \mathbf{a}_2 \quad (3.34)$$

$$N \left(A_{\mathbf{k}} \left(\frac{4\pi}{a} \gamma_1(\mathbf{k}) \mathbf{a}_1 + \frac{4\pi}{a} (\epsilon_3 - \epsilon_2) \mathbf{a}_2 \right) + C_{\mathbf{k}} \left(\frac{4\pi}{a} \gamma_2(\mathbf{k}) \mathbf{a}_1 + \frac{4\pi}{a} (\epsilon_3 - \epsilon_2) \mathbf{a}_2 \right) \right) = \alpha \mathbf{a}_1 + \beta \mathbf{a}_2 \quad (3.35)$$

$$A_{\mathbf{k}} \gamma_1(\mathbf{k}) + C_{\mathbf{k}} \gamma_2(\mathbf{k}) = \frac{a\alpha}{4\pi N} \quad (3.36)$$

$$A_{\mathbf{k}} + C_{\mathbf{k}} = \frac{a\beta}{4\pi N(\epsilon_3 - \epsilon_2)} \quad (3.37)$$

$$A_{\mathbf{k}} = \frac{a(\alpha - \beta)\gamma_2(\mathbf{k})}{4\pi N(\gamma_1(\mathbf{k}) - \gamma_2(\mathbf{k}))(\epsilon_3 - \epsilon_2)} \quad (3.38)$$

$$C_{\mathbf{k}} = \frac{a(\beta\gamma_1(\mathbf{k}) - \alpha\gamma_2(\mathbf{k}))}{4\pi N(\gamma_1(\mathbf{k}) - \gamma_2(\mathbf{k}))(\epsilon_3 - \epsilon_2)} \quad (3.39)$$

Ezzel megkaptuk $\mathbf{u}(\mathbf{R}, t)$ együtthatóit.

3.5. A Green-függvény

Írjuk vissza az együtthatókat a (3.14) egyenletbe.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{R}, t) &= \sum_{\mathbf{k} \in B_z} \left(\frac{a(\alpha - \beta)\gamma_2(\mathbf{k}) \cos(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega_1(\mathbf{k})t)}{4\pi N(\gamma_1(\mathbf{k}) - \gamma_2(\mathbf{k}))(\epsilon_3 - \epsilon_2)} \right) \frac{4\pi}{a} (\gamma_1(\mathbf{k}) \mathbf{a}_1 + (\epsilon_3 - \epsilon_2) \mathbf{a}_2) + \\ &+ \left(\frac{a(\beta\gamma_1(\mathbf{k}) - \alpha\gamma_2(\mathbf{k})) \cos(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega_2(\mathbf{k})t)}{4\pi N(\gamma_1(\mathbf{k}) - \gamma_2(\mathbf{k}))(\epsilon_3 - \epsilon_2)} \right) \frac{4\pi}{a} (\gamma_2(\mathbf{k}) \mathbf{a}_1 + (\epsilon_3 - \epsilon_2) \mathbf{a}_2) = \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in B_z} \left[\alpha \left(\frac{\gamma_2(\mathbf{k}) \gamma_1(\mathbf{k}) \cos(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega_1(\mathbf{k})t) - \gamma_2(\mathbf{k}) \cos(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega_2(\mathbf{k})t)}{N(\gamma_1(\mathbf{k}) - \gamma_2(\mathbf{k}))(\epsilon_3 - \epsilon_2)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \beta \left(\frac{\gamma_1(\mathbf{k}) \gamma_2(\mathbf{k}) (\cos(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega_2(\mathbf{k})t) - \cos(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega_1(\mathbf{k})t))}{N(\gamma_1(\mathbf{k}) - \gamma_2(\mathbf{k}))(\epsilon_3 - \epsilon_2)} \right) \right] \mathbf{a}_1 + \\ &\quad + \left[\alpha \left(\frac{\gamma_2(\mathbf{k}) \cos(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega_1(\mathbf{k})t) - \cos(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega_2(\mathbf{k})t)}{N(\gamma_1(\mathbf{k}) - \gamma_2(\mathbf{k}))} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \beta \left(\frac{\gamma_1(\mathbf{k}) \cos(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega_2(\mathbf{k})t) - \gamma_2(\mathbf{k}) \cos(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega_1(\mathbf{k})t)}{N(\gamma_1(\mathbf{k}) - \gamma_2(\mathbf{k}))} \right) \right] \mathbf{a}_2 \quad (3.40) \end{aligned}$$

Ezt a sort felösszegezve megkapjuk a rendszer Green-függvényét. Amint látjuk, ebben az esetben így biztosan nem lehet elvégezni egzaktul az integrált. A fenti sort numerikusan ki lehet értékelni, ez azonban meghaladja a jelen dolgozat célkitűzéseit.

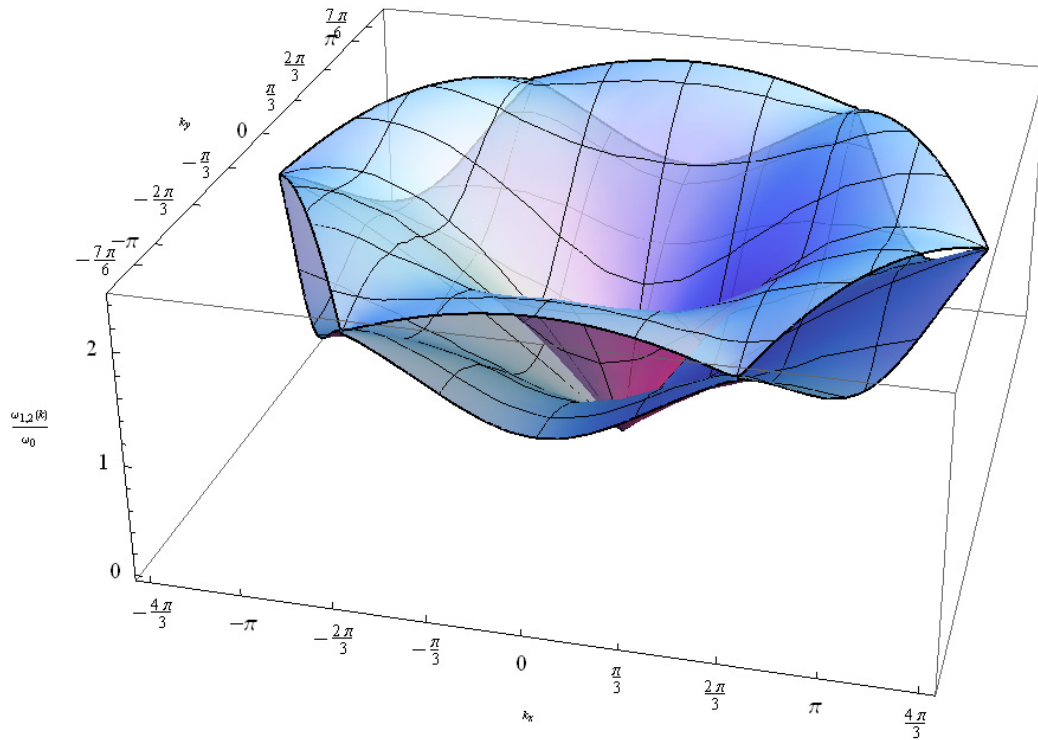
4. fejezet

Következtetések

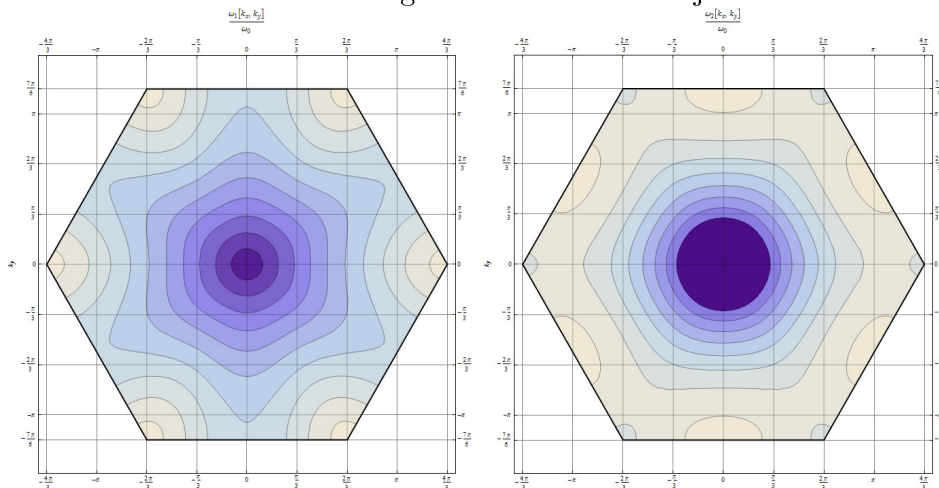
Az előző fejezetben végigszámoltuk a háromszögrács mechanikai tulajdonságait, és megkaptuk a speciális kezdőfeltételhez tartozó Green-függvényt, a diszperziós relációt és a rezgési módusokat. A négyszögráccsal ellentétben a háromszögrács nem csatolódik szét harmonikus közelítésben két független lineáris láncná, így lényegileg érdekesebb probléma két dimenzióban, amennyiben nem akarunk még másodsomszéd kölcsönhatásokat figyelembe venni. A megoldás ezen módszerének előnye, hogy a Green-függvényben megjelennek az eredeti rendszer szimmetriái, így bizonyos esetekben könnyű kiértékelni. Mivel a Green-függvény csak egy soralakját állítottuk elő, ezért a szimmetria ránézésre nehezebben állapítható meg. Ettől függetlenül alkalmas didaktikai szempontból, mivel jól illusztrálja egy nem egydimenziós rendszeren végigszámolt hasznos módszer univerzális alkalmazhatóságát, ahogyan azt [9] is megjegyzi.

4.1. Numerikus eredmények

A diszperziós relációkat ábrázolva azonnal láthatóan megjelennek a rendszer szimmetriái is, például (3.22), vagy a 60° -os forgásszimmetria (4.1). A diszperziós reláció két ágára láthatóan ugyanazt az eredményt kaptam, mint Cserti és Tichy [9, p. 7 fig. 9].



4.1. ábra. A háromszöggrács diszperziós relációja. A k $1/a$ egységekben van felmérve. Csak az első Brillouin zónát ábrázoltam. Az alsó két ábra a diszperziós reláció első és második ágának szintvonalas rajza.



4.2. További gondolatok

Végezetül a következő, a dolgozat terjedelmét meghaladó megoldatlan problémákat érdemes áttekinteni az eredményekkel kapcsolatban:

- A Green-függvény szimmetriájának ellenőrzése. Elforgatva a kezdőfeltételt milyen megoldást kapunk?
- A Green-függvény numerikus vagy analitikus felösszegzése. Lehetséges olyan transzformációt végrehajtani a rendszeren, ami négyzögrácsba viheti át, ahol az átlókban is van rugó, de ennek a részletei nincsenek tisztázva.
- Kezdőhely helyett az irodalomban hagyományos kezdősebességgel is megoldani a feladatot, hogy abból is megkapjuk a válaszfüggvényt. (lásd (2.3))

Kivonat

Egy háromszögrács csatolt oszcillátor-rendszer rezgéseit vizsgáljuk a rendszer belsejében speciális kezdőfeltételek mellett. Az oszcillátor-rendszer N darab m tömegű pontból áll, melyeket D direkciós állandójú ideális rugók kapcsolnak össze. A rendszer a kezdeti pillanatban ($t = 0$) nyugalomban van, minden pont sebessége zérus, illetve minden pont az egyensúlyi helyzetében van, kivéve az origóban lévő pontot, amelyet egy tetszőleges vektorral eltolunk az egyensúlyi helyéből. Ezekkel a kezdőfeltételekkel megoldva a feladatot, megkapjuk a rendszer Green-függvényét.

Abstract

We examine the vibrations in the bulk of a triangular lattice of coupled mass-spring oscillators with special initial conditions. The oscillator system contains N pieces of m massed points, which are coupled with ideal springs with a force constant of D . Initially ($t = 0$), the system is at rest, the speed of every point is zero, and every point is in its equilibrium state, except the point in the origin, which is translated from the origin by an arbitrary vector. Solving the problem with these initial conditions, we get the Green's function of the system.

Irodalomjegyzék

- [1] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley and Sons, New York, 7th edition, 1996.
- [2] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin. *Solid State Physics*. Saunders College, Philadelphia, PA, 1976.
- [3] James D. Louck. Exact normal modes of oscillation of a linear chain of identical particles. *Am. J. Phys.*, pages 585–590, February 1962.
- [4] Robert Weinstock. Propagation of a longitudinal disturbance on a one-dimensional lattice. *Am. J. Phys.*, 38(11):1289–1298, November 1970.
- [5] K. H. Lee. Propagation of a general disturbance along a semi-infinite linear chain. *Am. J. Phys.*, 40(3):1032–1034, July 1972.
- [6] Y. Y. Wang and K. H. Lee. Propagation of disturbance in a chain of interacting harmonic oscillators. *Am. J. Phys.*, 41(2):51–54, January 1973.
- [7] Deborah L. Merchant and Orville L. Brill. Propagation of a localized impulse on a one-dimensional lattice. *Am. J. Phys.*, 41(2):55–59, January 1973.
- [8] Frank Munley. The linear chain with initial conditions. *Am. J. Phys.*, 59(12):1096–1102, December 1991.
- [9] Cserti J. and Tichy G. A simple model for the vibrational modes in honeycomb lattices. *Eur. J. Phys.*, 25(6):723, nov 2004. arXiv:cond-mat/0307616v2.

- [10] M. Abramowitz and I. A. Stegun, editors. *Handbook of mathematical functions*. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, 55. Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 10th edition, 1972.

Köszönetnyilvánítás

Ez a szakdolgozat nem készülhetett volna el, ha nincsenek azok az emberek, akik végig támogattak a tanulmányaim során.

Szeretnék köszönetet mondani tanáromnak, Dávid Gyulának, akitől az elmúlt három évben a legtöbbet tanultam a fizikáról és tudományos gondolkodásmódról. Szeretnék köszönetet mondani tanáromnak, Cserti Józsefnek is, aki sok technikai részletben segített nekem elkészülni ezzel a dolgozattal, valamint hozzájuttatott a megfelelő szakirodalomhoz.

Szeretnék köszönetet mondani a családomnak, akik az eddigi egyetemi éveim alatt gondoskodtak rólam, és lehetővé tették, hogy a tanulásra fordíthassam a figyelmemet. Szeretném megköszönni a feleségemnek a támogatását, aki mellettem volt, motivált, segített és bátorította szakdolgozat írása közben, valamint kénytelen volt erre az időre nélkülözni a teljes jelenlétemet.