Végtelen ellenállás-hálózatok vizsgálata Green-függvény segítségével

Széchenyi Gábor
III. éves Fizika BSc.

2009. május 25.

Szakdolgozat

Témavezető: **Cserti József**

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

Tartalomjegyzék

Absztrakt

Az ellenállás-hálózatok problémája klasszikusnak számító kérdés, és az utóbbi években a Green-függvénnyel történő vizsgálata új lendületet adott a témának. Ez a kérdés kapcsolatba hozható a rácson történő véletlen bolyongás problémájával is, melyet pl. Lovász László matematikus is vizsgált.

A dolgozatban végtelen ellenállás-hálózatok eredő ellenállását vizsgáljuk két tetszőleges pont között. A probléma megoldása során leginkább a szilárdtestfizikai fogalmakra (Brillouin-zóna, reciprok vektorrendszer), valamint a Green-függvények tulajdonságaira támaszkodunk. A dolgozat első fejezetében a legegyszerűbb szabályos rácsokra oldjuk meg a problémát, mint például a d-dimenziós kockarácsra vagy a háromszögrácsra. Később a Green-függvényes módszer általánosításával megoldási menetet mutatunk tetszőleges bázissal rendelkező szabályos rácsok problematikájára (hatszögrács, ellenállás-szalag, fcc, bcc, ...). Egyik fő eredményként meghatározzuk a félvégtelen négyzetes ellenállás-hálózat Green-függvényét és ennek a hálózatnak tetszőleges két pontja között az eredő ellenállását. A dolgozat második részében megoldjuk tetszőleges perturbált ellenállásrendszer Green-problémáját, melyhez a Dyson egyenletet használjuk fel. Speciális esetként a perturbált hatszögrácsot elemezzük.

Az eddig tárgyalt rendszereket nem csak analitikusan, hanem numerikusan is tárgyaljuk. Tetszőleges periodikus rács, félsík, tetszőleges perturbált ellenállásgráf problémák vizsgálatával olyan új eredményeket kaptunk, melyeket legjobb tudomásunk szerint eddig még nem közöltek.

1. Bevezetés

A végtelen ellenállás-hálózatok tanulmányozása klasszikus témának számít. A legkorábban vizsgált problémák egyike a végtelen négyzetrács, melynek minden éle egy R nagyságú ellenállásnak felel meg. Ennek a rácsnak két szomszédos pontja közötti eredő ellenállásának meghatározásához Aitchinson [1] adott egy szellemes ötletet, melyet a (2.3) fejezetben mi is megmutatunk. A későbbi vizsgálatok során a legismertebb szabályos hálózatokat kezdték vizsgálni: (négyszögrácsot, kockarácsot, háromszögrácsot, stb.). Ezen hálózatok vizsgálódásáról szóló szakirodalom igen terjedelmes [2, 3, 4]. Az előbb felsorolt problémáknak a magját mindig egy adott rácsra történő Poisson-egyenlet megoldása adja, melynek egyik megoldási lehetősége a Green-függvény megkeresése, melyet először a [4]-ben vizsgáltak meg. Ezt a módszert csak nem régiben kezdték alkalmazni a probléma megoldásához.

A Green-függvénnyel történő megoldás több szempontból alkalmasabb a feladat tárgyalásához, mint bármilyen más módszer. Ennek legfőbb oka, mint ahogy azt ebben a dolgozatban is megmutatjuk, hogy a Green-függvényes tárgyalás bonyolultabb hálózatok számolására is alkalmasabb. Továbbá lehetőséget biztosít a probléma további általánosításához, mely során elszakadhatunk az eddig vizsgált szabályos rácsoktól, és olyan hálózatokat vizsgálhatunk, melyek eddig ezen téma szakirodalmában még nem kerültek elő. A Green-függvény a végtelen ellenállás-hálózatok megoldására egy általános megoldási sémát ad, melyet többféle hálózat esetén alkalmazhatunk. Továbbá ezen függvény alkalmazása a fizika más területein is jelentős, így a fizikában jól ismert módszerről van szó. Az ellenállás-hálózatok megoldására így egy közismert eszköztárral rendelkező megoldási menetet mutatunk. A Green-függvénnyel történő számolás a fizika egyéb területein is jelentős, így például a szilárdtestfizikában. Emiatt nem meglepő, hogy a fizika ezen területén használatos fogalmak itt is jól alkalmazhatóak, ezért kerülhet elő ebben a dolgozatban a Brillouin-zóna vagy a reciprok-vektorrendszer fogalma. A továbbiakban a Green-függvény alkalmazási lehetőségét mutatjuk meg az ellenállás-hálózatok terén.

Ebben a dolgozatomban alapvetően az ellenállás-hálózatokat vizsgálom. Ez a probléma megfeleltethető egy véletlen bolyongási problémának, illetve más kombinatorikai feladatoknak is. Így először egy rövid leírás keretében megmutatjuk, hogy hol használhatók még az általam vizsgált hálózatok a matematika területén.

1.1. A véletlen bolyongás és az eredő ellenállás kapcsolata

Ebben a fejezetben rámutatunk, hogy a matematikusok által sokat vizsgált véletlen bolyongás és egy rács két pontja közötti eredő ellenállás meghatározása ugyanannak a problémának kétféle megfogalmazása. A bizonyítás során leginkább M. Jeng korábbi munkájára hagyatkozunk [5]. De mindenképpen meg kell említeni a probléma magyar vonatkozását is, Lovász László matematikus részletesebben tárgyalta és bizonyította, e két első ránézésre távol eső kutatási terület kapcsolatát[6].

Legyen egy R ellenállásokból felépülő ellenállásgráf. Először definiáljuk a véletlen bolyongás egyes lépéseinek valószínűségét. A bolyongás során mindig az egyik csúcsból egy vele szomszédos másik csúcsba mozdulunk át. Ha éppen az x csúcsban vagyunk, akkor a szomszéd pontjait jelöljük $N(x)$-szel. Ebben az esetben, annak a valószínűsége, hogy a következő lépésben a szomszédos y csúcsba lépünk:

$$p_{x\to y} = \frac{1}{N(x)}. \tag{1}$$

Ebből is látható, hogy az a feltétel, hogy az ellenállásgráf minden éle azonos (R) ellenállású, a bolyongás problémájára átfordítva azt jelenti, hogy egy pontból a vele szomszédosokba ugyanolyan valószínűséggel léphetünk.

Vezessünk be az egyik pontban (A) az áramot, míg egy másik pontból (B) ki. Legyen A pontban a feszültség egységnyi, a B pontban pedig éppen nulla. Így az az állítás, hogy egy x pontban V_x a potenciál, a bolyongás problémájára átfogalmazva azt jelenti, hogy ennyi a valószínűsége, hogy a mozgás során az x pontból elindulva eljutunk az A pontba mielőtt a B pontba érnék. Ezt az állítást a későbbiekben jobban megérthetjük. Induljunk el egy x pontból és lépjünk tovább egy vele szomszédos y pontba, melyre $x \neq A, B$. Írjuk fel a Kirchoff-törvényt :

$$0 = \sum_{y\in N(x)} \frac{V_x - V_y}{R} = \frac{N(x)}{R}V_x - \frac{N(x)}{R}\sum_{y\in N(x)} p_{x\to y}V_y = \frac{N(x)}{R}\left(V_x - \sum_{y\in N(x)} p_{x\to y}V_y\right). \tag{2}$$

Ebből már leolvasható, hogy $V_x = \sum_{y\in N(x)} p_{x\to y}V_y$, és V_x éppen annak a valószínűsége, hogy az x pontból induló bolyongás során előbb érünk az A pontba, mint a B-be. Ezután felírhatjuk a kiindulási pontokra (A és B) is a Kirchoff-törvényt:

$$I = \sum_{y\in N(A)} I_{A\to y} = \sum_{y\in N(A)} \frac{V_{Ay}}{R} = \frac{N(A)}{R}\sum_{y\in N(A)} p_{A\to y}(1 - V_y) = \frac{N(A)}{R}p_{AB}. \tag{3}$$

A kifejezésben szereplő $N(A)$ az A pont szomszédainak számát jelöli, p_{AB} pedig annak a valószínűsége, hogy az A pontból induló bolyongás során előbb érünk a B pontba, mint visszatérnénk az A pontba.

A két pont közötti feszültségesés éppen egységnyi volt, így Ohm-törvényének segítségével felírhatjuk az A és B pont közötti eredő ellenállás értékét:

$$R_{AB} = \frac{R}{N(A)p_{AB}}. \tag{4}$$

Ezzel meghatároztunk egy alapvető kapcsolatot a véletlen bolyongás és az eredő ellenállás számolása között. Ez a példa is megmutatja, hogy gyakran a fizikusok és matematikusok ugyanazt a problémát vizsgálják, csak másféle megközelítésben.

2. Az alapvető ellenállás-hálózatok vizsgálata

Az ellenállás-hálózatok közül a Green-függvény segítségével legkönyebben a szabályos ellenállás-hálózatok (négyzetrács, kockarács, háromszögrács, ...) vizsgálhatóak. Ezek a hálózatok a szakirodalomban különböző megoldási lehetőségek sokaságával már régóta ismertek [2, 3]. Green-függvénnyel először a [4]-ben vizsgálták meg a fenti problémákat. Mivel a későbbiekben ezen módszer általánosításával foglalkozunk, illetve a továbbiakban is visszautalunk az itt leírtakra, ezért mindenképpen szükségesnek tartjuk ezen egyszerűbb hálózatok tárgyalását is.

Itt említenénk meg Gáspár Merse Előd ELTE-s fizikus hallgató korábbi TDK dolgozatát, melyben az ellenállás-hálózatokkal kapcsolatos alapvető fogalmak matematikai precizitással történő definiálását végezte el, és vizsgálta a Green-függvény egzisztenciájának kérdését is [8].

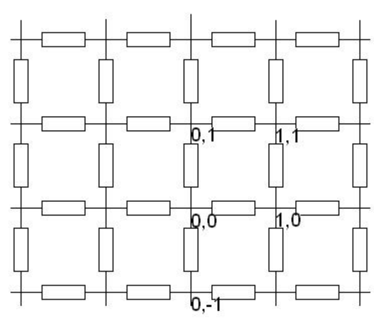
2.1. Négyzetrács

A feladattal kapcsoltaban a legtöbbször vizsgált végtelen ellenállás-hálózat, a négyzetrács (lásd 1. ábra). Amelyben minden oldal egy R ellenállásnak felel meg. Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a Green-függvények segítségével, hogyan kaphatjuk meg tetszőleges két pontja közötti eredő ellenállását.

Vegyünk fel egy koordinátarendszert, melynek origója az egyik csúccsal esik egybe, ekkor a többi csúcsba mutató vektor felírható, az alábbi alakban:

$$\mathbf{r} = l_1\mathbf{a_1} + l_2\mathbf{a_2}, \tag{5}$$

ahol $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ az elemi rácsvektorok , l_1 és l_2 pedig egy egész szám. Mivel a négyzetrácsra akarjuk megoldani a problémát, így a két elemi rácsvektor nagysága megegyezik, és egymásra merőleges. Továbbá tekintsük a négyzetrácshoz tartozó reciprokrács vektorokat is $(\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2})$, melyekre teljesül, hogy $\mathbf{a_i}\mathbf{b_j} = 2\pi\delta_{ij}$.



1. ábra. *A négyzetrács (l_1, l_2) paraméterezését mutatja.*

Két tetszőleges csúcspont közötti eredő ellenállás meghatározásához, vezessünk be az egyik csúcsba I áramot, a másikból pedig vezessünk ki I áramot. Jelölje $I(\mathbf{r})$, azt a függvényt, mely megmondja, hogy az $\mathbf{r}$ helyen mekkora áramot vezetünk be a négyzetrácsunkba. Ha az origó, és egy tetszőleges $\mathbf{r_0}$ pont között vizsgálódunk, akkor

$$I(\mathbf{r}) = I(\delta_{\mathbf{r},\mathbf{0}} - \delta_{\mathbf{r},\mathbf{r_0}}). \tag{6}$$

Vegyük fel a potenciál függvényt is: $V(\mathbf{r})$, akkor innen már adódik az eredő ellenállás értéke:

$$R(\mathbf{r_0}) = \frac{V(\mathbf{0}) - V(\mathbf{r}_0)}{I}. \tag{7}$$

Az Ohm-, és Kirchoff-törvények segítségével felírhatjuk az alábbi összefüggést egy kiválasztott csúcs, és azok szomszédai között:

$$I(\mathbf{r})R = 4V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}+\mathbf{a_1}) - \mathbf{V}(\mathbf{r}-\mathbf{a_1}) - \mathbf{V}(\mathbf{r}+\mathbf{a_2}) - \mathbf{V}(\mathbf{r}-\mathbf{a_2}),$$

azaz

$$I(\mathbf{r})R = \sum_{\mathbf{n}} \Big[V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}+\mathbf{n}) \Big], \tag{8}$$

ahol $\mathbf{n} = \pm\mathbf{a_i}$. Definiálhatjuk egy függvény diszkrét Laplace-operátorát, az alábbi módon:

$$\triangle_{(\mathbf{r})} f(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{n}} \Big[f(\mathbf{r}+\mathbf{n}) - f(\mathbf{r}) \Big], \tag{9}$$

Ezt a kifejezést felismerhetjük a (8) egyenletben, és így egyszerűbb alakra hozhatjuk:

$$I(\mathbf{r})R = -\triangle_{(\mathbf{r})} V(\mathbf{r}). \tag{10}$$

Ez egy Poisson-típusú egyenlet, így megoldását kereshetjük a Green-függvény segítségével, melynek ismert tulajdonságait az alábbi képletekkel írhatjuk le:

$$V(\mathbf{r}) = R \sum_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r},\mathbf{r}') I(\mathbf{r}'), \tag{11}$$

$$\triangle_{(\mathbf{r}')} G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\delta_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}. \tag{12}$$

Ezen függvény segítségével már megadhatjuk az eredő ellenállást a négyzetrács origója és egy kiválasztott pont között,

$$R(\mathbf{r},\mathbf{0}) = R[G(\mathbf{0},\mathbf{0}) + G(\mathbf{r},\mathbf{r}) - 2G(\mathbf{r},\mathbf{0})]. \tag{13}$$

Mivel a Green-függvény szimmetrikus a két változójába, így felhasználjuk, hogy $G(\mathbf{i},\mathbf{j}) = G(\mathbf{j},\mathbf{i})$. A fenti képletet tovább egyszerűsíthetjük, ha felismerjük, hogy bármely két kiválasztott pont környezete ekvivalens egymással. Így $G(\mathbf{0},\mathbf{0}) = G(\mathbf{r},\mathbf{r})$. Vezessünk be új jelölést: $G(\mathbf{r}) \equiv G(\mathbf{r},\mathbf{0})$, $R(\mathbf{r}) \equiv R(\mathbf{r},\mathbf{0})$. Az ellenállás értéke így az alábbi alakú:

$$R(\mathbf{r}) = 2R[G(\mathbf{0}) - G(\mathbf{r})]. \tag{14}$$

A Green-függvény meghazározáshoz áttérünk a (8) képleteink Fourier-térbeli alakjára:

$$I(\mathbf{r})R = \sum_{\mathbf{n}} \Big[V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}+\mathbf{n}) \Big] \implies I(\mathbf{k})R = \sum_{\mathbf{n}} (1 - e^{i\mathbf{kn}}) V(\mathbf{k}), \tag{15}$$

$$G(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sum_{\mathbf{n}}(1 - e^{i\mathbf{kn}})} = \frac{1}{4 - 2\cos(\mathbf{ka_1}) - 2\cos(\mathbf{ka_2})}, \tag{16}$$

és $I(\mathbf{k})$, $V(\mathbf{k})$ az $I(\mathbf{r})$ illetve $V(\mathbf{r})$ diszkrét Fourier-transzformáltjai. A rácsok Fourier-terében a hullámszám vektor a Brillouin-zónába esik. Tekintsük a rácsot egy véges $L\,x\,L$-es négyzetrácsnak, melynek Kármán-Born-féle periodikus határfeltételt írunk elő. Így a $\mathbf{k}$ értékeink diszkrét pontok lesznek a Brillouin-zónában, melyekre teljesül:

$$\mathbf{k} = \frac{m_1}{L}\mathbf{b_1} + \frac{m_2}{L}\mathbf{b}_2, \tag{17}$$

ahol $m_i \in \mathbb{Z}$, és $|m_i| \leq L/2$. A $\mathbf{b}_i$ vektorok, pedig a korábban bevezetett reciprokrács rácsvektorai. A Green-függvényt így már ismerjük a $\mathbf{k}$ térben, ahonnan csak vissza kell transzformálni:

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{L^2} \sum_{\mathbf{k}\in BZ} G(\mathbf{k})e^{i\mathbf{kr}}. \tag{18}$$

Most elvégezhetjük a határérték számítást, mely során áttérünk a végtelen rácsra: $L \to \infty$. Ekkor a $\mathbf{k}$-térben vett szummázást átírhatjuk, integrálásra.

$$G(\mathbf{r}) = v \int_{\mathbf{k}\in BZ} G(\mathbf{k})e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \tag{19}$$

A képletben megjelenő v egyetlen elemi cella térfogatát jelöli, mely négyszögrács esetén $v = a^2$. Innen az eredő ellenállás képletét egzaktul megkaphatjuk egy integrál alakjában:

$$R(\mathbf{r_0}) = 2Rv \int_{\mathbf{k}\in BZ} G(\mathbf{k})(1 - e^{i\mathbf{kr}}) \frac{d^2k}{(2\pi)^2}. \tag{20}$$

Észrevehetjük, hogy a kapott egyenlet általános érvényű, bármely 2-dimenziós hálózatra használható, nem csak a négyzetesre. Az utolsó lépésben már csak egyszerűbb alakra hozzuk az integrált. Vezessünk be új változókat: $\mathbf{r_0} = l_1\mathbf{a}_1 + l_2\mathbf{a}_2$. Így az kapott integrál már alkalmasabb numerikus vizsgálatokra:

$$R(l_1, l_2) = R \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 - e^{il_1x_1 + il_2x_2})}{2 - \cos(x_1) - \cos(x_2)} \frac{dx_1}{(2\pi)} \frac{dx_2}{(2\pi)} \tag{21}$$

A négyzetrácsot már sokan vizsgálták numerikusan, erre így itt mi részletesen nem térnénk ki (lásd például [4]). Mindösszesen két numerikus értékre mutatnék rá, melyeket a későbbiekben használni fogunk. Ezek az értékek könnyen ellenőrizhetőek a fenti integrál formula segítségével:

$$R(1,1) = \frac{2}{\pi}R, \quad R(0,1) = \frac{R}{2}.$$

Érdekes kérdés felvetés lehet még a négy pont ellenállás mérése, vagyis egy-egy pontban be illetve ki vezetünk I áramot (az a négypont ellenállás két utolsó változója), de a feszültséget két másik pont között mérjük (mely az első két változója)

$$R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = \frac{U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{I}. \tag{22}$$

A Green-függvényekkel történő kifejezése hasonlóan történik, mint az előbb, így csak az eredményt közöljük:

$$R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = R\Big[G(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1) + G(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_2) - G(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_1) - G(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2)\Big]. \tag{23}$$

Későbbi terveink közé tartozik, hogy ezt az összefüggést összevessük a Van der Pauw-féle ellenállásméréssel.

Ebben a fejezetben az eredő ellenállás kiszámolásának alapjait mutattuk meg, melyeket felhasználunk a későbbiek során, ahol numerikus eredményeket is közlünk, és további összefüggésekre világítunk rá.

2.2. A d-dimenziós kockarács

A probléma négyzetrácsra történő megoldása után, az első általánosítási lehetőségünk a d-dimenziós kockarács. A rács $d = 1$-re a sorba kapcsolt ellenállásokat, $d = 2$-re a 2.1 fejezetben megvizsgált négyzetrácsot, $d = 3$-ra a kockarácsot adja vissza, nagyobb d-kre pedig absztrakt általánosítási lehetőséget ad. Ezeknek a problémáknak a megoldása nagyon hasonló az előző részben leírtakkal, így itt csak az eltérő vonásokra mutatunk rá.

A vektorokat, így a dimenziószámnak megfelelő darabszámú lineárisan független vektorok kombinációjaként írhatjuk fel:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{d} l_i \mathbf{a_i}. \tag{24}$$

A sík Laplace-felírása teljesen hasonlóan történik, mint a (9) egyenletben, csupán arra kell figyelnünk, hogy az $\mathbf{n} = \pm\mathbf{a_i}$, ahol az i változó 1-től d-ig vehet fel $2d$ darab különböző értéket. A Fourier-transzformáció után, természetesen a Brillouin-zónában elhelyezkedő vektorok is d-dimenziósok lesznek, így a $\mathbf{k}$ vektorok az alábbiak szerint fejezhetőek ki:

$$\mathbf{k} = \sum_{i=1}^{d} \frac{m_i}{L} \mathbf{b_i}, \tag{25}$$

ahol $\mathbf{b}_i$ az i-dik reciprokrács vektor, tovább $m_i \in \mathbb{Z}$, és $|m_i| \leq L/2$, L pedig a rács lineáris mérete. A Green-függvény meghatározásának menete teljesen hasonlóan történik, csak itt is a $2d$ darab $\mathbf{n}$ vektorra kell elvégezni az összegzést:

$$G(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sum\limits_{\mathbf{n}} (1 - e^{i\mathbf{kn}})}. \tag{26}$$

A Fourier-transzformáció során $\frac{1}{(2\pi)^d}$ szorzó jelenik meg, és az integrálást a $\mathbf{k}$ vektor minden komponensére el kell végezni, ezek alapján:

$$G(\mathbf{r}) = v \int_{\mathbf{k} \in BZ} G(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d}. \tag{27}$$

Ezután az előző részben leírtakhoz hasonlóan kiírhatjuk minden komponensre az integrálást:

$$R(l_1, l_2, ...l_d) = R \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx_1}{(2\pi)} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx_d}{(2\pi)} \frac{(1 - e^{il_1 x_1 + \dots + il_d x_d})}{d - \sum\limits_{i=1}^{d} \cos(x_i)}. \tag{28}$$

Látható, hogy tetszőleges d-dimenziós kockarácsra hasonlóan végezhető el az ellenállás eredő értékének meghatározása, mint a négyzetrácsra. A későbbiekben mind az egydimenziós, mind a háromdimenziós kockarácsra kapott eredményeket használni fogjuk. A képletek ellenőrzése végett meg lehet mutatni, hogy az egydimenziós esetben visszakapjuk a soros ellenálásnál várt összefüggést:

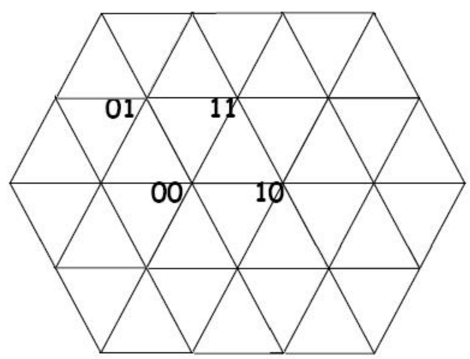
$$R(l) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{(2\pi)} \frac{(1 - e^{ilx})}{1 - \cos x} = lR. \tag{29}$$

Láthatóan a két pont között sorba kapcsolt l db ellenállás eredőjét kaptuk vissza.

2.3. Szabályos háromszögrács

Ebben a fejezetben levezetjük a szabályos háromszögrácsra vonatkozó Green-függvényt, majd ennek segítségével meghatározzuk két pontja közötti eredő ellenállását. A problémát utána részletesen tárgyaljuk numerikusan is A meghatározás menete hasonló lesz, mint amit a négyzetrácsnál megismertünk.

Először meghatározzuk az elemi rácsvektorokat, válasszuk úgy ezeket, hogy hosszuk a rács élével egyezzék meg, bezárt szögük pedig 120^o legyen, ahogy ez a 2. ábrán látható. Jelöljük őket $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}$-vel. Így tetszőleges rácsvektora $n\mathbf{a_1} + m\mathbf{a_2}$, ahol $n, m \in \mathbb{Z}$.



2. ábra. *A háromszögrácsot ábrázolja, illetve annak koordinátázását. A rajzon négy ponthoz tartozó (n,m) értéket jelöltük be.*

Írjuk fel a Kirchoff-törvényt:

$$I(\mathbf{r})R = \sum_{\mathbf{n}} \Big[V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r} + \mathbf{n}) \Big], \tag{30}$$

ahol $\mathbf{n} \in \{\pm\mathbf{a_1}, \pm\mathbf{a_2}, \pm(\mathbf{a_1} + \mathbf{a_2})\}$. Fourier-transzformáljuk a kapott képletet:

$$I(\mathbf{k})R = \sum_{\mathbf{n}} (1 - e^{i\mathbf{kn}})V(\mathbf{k}) = 2[3 - \cos \mathbf{ka_1} - \cos \mathbf{ka_2} - \cos \mathbf{k}(\mathbf{a_1}+\mathbf{a_2})]V(\mathbf{k}). \tag{31}$$

Ebből a kifejezésből már leolvashatjuk a Green-függvényt, és a Fourier-térből történő visszatranszformálásával a következőt kapjuk:

$$G(\mathbf{r}) = v \int_{\mathbf{k} \in BZ} \frac{e^{i\mathbf{kr}}}{3 - \cos \mathbf{ka_1} - \cos \mathbf{ka_2} - \cos \mathbf{k}(\mathbf{a_1}+\mathbf{a_2})} \frac{d^2k}{(2\pi)^2}, \tag{32}$$

ahol v a cella térfogata, mely szabályos háromszögrács esetén $v = \sqrt{3}a^2$. Végül az eredő ellenállást felírhatjuk a Green-függvény segítségével egy integrál alakjában. Változók cseréjével kaphatunk egy numerikusan könnyebben kezelhető integrált, mely már az n, m koordináták függvényében határozza meg az eredő ellenállás értékét :

$$R(\mathbf{r_0}) = 2Rv \int_{\mathbf{k}\in BZ} \frac{(1-e^{i\mathbf{kr}})}{3-\cos\mathbf{ka_1}-\cos\mathbf{ka_2}-\cos\mathbf{k}(\mathbf{a_1}+\mathbf{a_2})} \frac{d^2k}{(2\pi)^2}, \tag{33}$$

$$R(n,m) = R\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-e^{inx+imy})}{3-\cos(x)-\cos(y)-\cos(x+y)} \frac{dx}{(2\pi)} \frac{dy}{(2\pi)}. \tag{34}$$

Atkinson [2] dolgozatában megmutatta, hogy ezt az integrált át lehet írni egy könnyebben kezelhető egyszeres integrálra:

$$R(n,m) = R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\pi} \frac{1-\exp(-|n-m|s)\cos(n+m)x}{\sinh s\,\cos x}, \tag{35}$$

ahol $\cosh s = 2\sec x - \cos x$.

A kisebb n, m értékekre numerikus programokkal (pl.:Mathematicával) egzaktul kiszámolhatóak az integrálok, melyeket az 1. táblázatban gyűjtöttünk össze:

	n=0	n=1	n=2
m=0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}-4\frac{\sqrt{3}}{\pi}$
m=1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}+2\frac{\sqrt{3}}{\pi}$
m=2	$\frac{8}{3}-4\frac{\sqrt{3}}{\pi}$	$-\frac{2}{3}+2\frac{\sqrt{3}}{\pi}$	$\frac{8}{3}-4\frac{\sqrt{3}}{\pi}$
m=3	$27-48\frac{\sqrt{3}}{\pi}$	$-5+10\frac{\sqrt{3}}{\pi}$	$-5+10\frac{\sqrt{3}}{\pi}$
m=4	$\frac{928}{3}-560\frac{\sqrt{3}}{\pi}$	$-70+128\frac{\sqrt{3}}{\pi}$	$16-28\frac{\sqrt{3}}{\pi}$
m=5	$\frac{11249}{3}-6800\frac{\sqrt{3}}{\pi}$	$-\frac{2671}{3}+1616\frac{\sqrt{3}}{\pi}$	$123-222\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

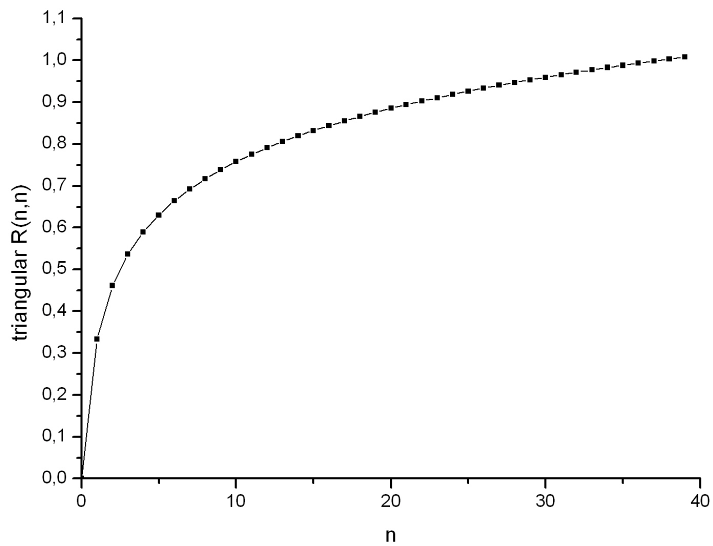
	n=3	n=4	n=5
m=0	$27-48\frac{\sqrt{3}}{\pi}$	$\frac{928}{3}-560\frac{\sqrt{3}}{\pi}$	$\frac{11249}{3}-6800\frac{\sqrt{3}}{\pi}$
m=1	$-5+10\frac{\sqrt{3}}{\pi}$	$-70+128\frac{\sqrt{3}}{\pi}$	$-\frac{2671}{3}+1616\frac{\sqrt{3}}{\pi}$
m=2	$-5+10\frac{\sqrt{3}}{\pi}$	$16-28\frac{\sqrt{3}}{\pi}$	$123-222\frac{\sqrt{3}}{\pi}$
m=3	$27-48\frac{\sqrt{3}}{\pi}$	$-70+128\frac{\sqrt{3}}{\pi}$	$123-222\frac{\sqrt{3}}{\pi}$
m=4	$-70+128\frac{\sqrt{3}}{\pi}$	$\frac{928}{3}-560\frac{\sqrt{3}}{\pi}$	$-\frac{2671}{3}+1616\frac{\sqrt{3}}{\pi}$
m=5	$123-222\frac{\sqrt{3}}{\pi}$	$-\frac{2671}{3}+1616\frac{\sqrt{3}}{\pi}$	$\frac{11249}{3}-6800\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

1. táblázat. *A (35) integrált analitikusan elvégezve a kapott eredő ellenállások a háromszögrács (n,m) és (0,0) pontja között.*

Nagyobb n értékekre már numerikusan értékeltük ki az integrált. A 3. ábrán látható a görbe menete, ha az $R(n,n)$ pontokat ábrázoljuk, az n függvényében. Annak érdekében, hogy jobban lássuk az eredő ellenállás változását, a 4. ábra térben mutatja az eredő ellenállást. Itt a két vízszintes tengelyen nem az n és m változók szerepelnek, hanem a rács valódi síkbeli koordinátái, melyeket az alábbi összefüggéssel lehet kifejezni:

$$R(x,y) = R(n - \frac{m}{2}, m\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Így a vízszintes tengelyen x, y változók szerepelnek úgy, hogy ezekre a pontokra $|n|, |m| < 20$. A függőleges z tengelyen pedig az eredő ellenállás értéke olvasható le.

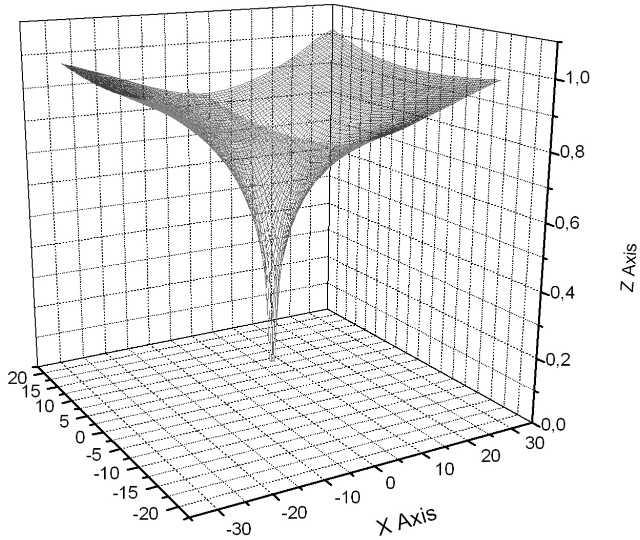


3. ábra. *A háromszögrács két pontja közötti eredő ellenállás távolság függése. Azaz a rács (n,n) típusú pontjainak ellenállása az origóhoz képest az n függvényében.*

Miután numerikusan és analitikusan megvizsgáltuk a háromszögrácsot, felismerhetünk további összefüggéseket:

Tétel: Szabályos rács esetén, két szomszédos pont közötti eredő ellenállás értéke $2R/d$, ahol d tetszőleges csúcsból kiinduló élek száma.

Bizonyítás: Szabályos rács esetén az egy pontból kiinduló d él egymással ekvivalens, nem határoznak meg egy kitüntetett irányt. Tekintsünk először egy $N\,x\,N$-es négyzetrácsot periodikus határfeltétellel. Vezessünk be az él egyik végpontjában I áramot, és minden csúcsban vezessünk ki I/N^2 áramot. Ekkor az eredő befolyó áram $I(1-\frac{1}{N^2})$. Ebből a két szomszédos csúcsot összekötő



4. ábra. *A háromszögrács eredő ellenállása az origóhoz viszonyítva. Az alapsík nem a korábban használt (n, m) koordinátázással készült, hanem a rács valódi geometriai helyzetének függvényében.*

élen, mivel nincs kitüntetett irány, $\frac{I}{d}(1-\frac{1}{N^2})$ áram folyik át. Második esetben vezessünk ki I áramot az él másik végpontján, és vezessünk be minden pontban I/N^2 áramot. Ekkor ez a két folyamat szuperponálható egymásra. Így azt kapjuk meg, hogy az egyik csúcsban bevezetünk I áramot a másikon pedig I megy ki. Így az élen áthaladó áram $2\frac{I}{d}(1-\frac{1}{N^2})$. Innen már adódik az eredő ellenállásra vonatkozó összefüggés:

$$IR_{ered} = 2\frac{I}{d}(1-\frac{1}{N^2})R. \tag{36}$$

További feltételezés, hogy N tartson a végtelenhez. Így bebizonyítottuk az állítást: $R_{ered} = \frac{2R}{d}$. Ezt felhasználhatjuk ellenőrzési pontnak a legismertebb rácsok esetében, ezért megadjuk két szomszédos pontja közötti eredő ellenállását a legismertebb szabályos rácsoknak a 2. táblázatban.

Négyzetrács	$\frac{R}{2}$
Háromszögrács	$\frac{R}{3}$
Hatszögrács	$\frac{2R}{3}$
Kockarács	$\frac{R}{3}$

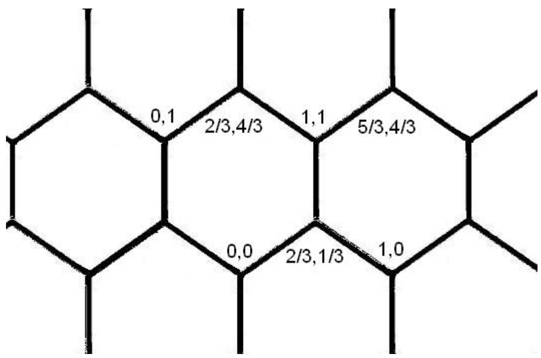
2. táblázat. *A legismertebb szabályos rácsok esetén a két szomszédos pont között mérhető eredő ellenállásértékek.*

3. Periodikus ellenállás-hálozatok

Ebben a fejezetben eljárást mutatunk arra, hogy hogyan lehet tetszőleges periodikus rács ellenállását kiszámolni. Ekkor az elemi cella ismételten egy szabályos rács, amihez hozzá rendelünk egy bázist.

Ezzel a témával korábban általános esetben nem foglakoztak. A szakirodalomban eddig mindössze a szabályos hatszögrács elemzése történt meg [4]. A módszert a későbbiekben tovább általánosítjuk, korábban még egyáltalán nem vizsgált ellenállás-hálózatokra, mint például a bcc, fcc, ellenállás-szalag és a négyzetes félsík.

3.1. Hatszögrács



5. ábra. *A hatszögrács (n,m) paraméterezését mutatja.*

A hatszögrács esetét (lásd 5.ábra) többféleképpen vizsgálhatjuk, ezek közül az egyik lehetőségünk az elektronikából jól ismert csillag-delta átalakítás. Ez a megoldási lehetőség nagyon speciális, más rácsokra nem lehet használni. Ezért ebben a részben egy másik módszert mutatunk be, mely az előző részben megadott módszer (Green-függvény) általánosítása, és további rácsok vizsgálatára is alkalmas.

A hatszögrácsot úgy is tekinthetjük, mint egy háromszögrácsot, melynek minden csúcsához, egy két csúcsból álló bázist rendelek hozzá. Így a hatszögrács esetén két különböző típusú pontot különböztethetünk meg, ezeket ebben a részben A és B-vel jelölöm. A későbbi fejezetekben, mikor már több bázisatomot is tekintek, akkor már számokkal indexelek. A hatszögrács alábbi konstrukciójában minden A típusú pontot csak B típusú pont vesz körül, és viszont.

A háromszögrácshoz hasonlóan a rács vektorokat $\mathbf{a_1}$ és $\mathbf{a_2}$-vel jelöljük, az egyszerűbb egyenletek kedvéért bevezetjük ezek lineár kombinációját is $\mathbf{a_3}$ $=\mathbf{a_1}+\mathbf{a_2}$. A feladat kezdetén itt is a Kirchoff-egyenleteket kell felírni. Figyelni kell arra, hogy mind a két típusú pontra fel kell írni az egyenleteket:

$$I_A(\mathbf{r})R = \sum_{\mathbf{n}} \Big[V_A(\mathbf{r}) - V_B(\mathbf{r}-\mathbf{n}) \Big], \tag{37}$$

$$I_B(\mathbf{r})R = \sum_{\mathbf{n}} \Big[V_B(\mathbf{r}) - V_A(\mathbf{r}+\mathbf{n}) \Big], \tag{38}$$

amely egyenletekben az $\mathbf{n} = \mathbf{0}, \mathbf{a_1}, \mathbf{a_3}$. Ismételten térjünk át a Fourier-komponensekre:

$$I_A(\mathbf{k})R = 3V_A(\mathbf{k}) - V_B(\mathbf{k})[1 + e^{-i\mathbf{k}\mathbf{a_1}} + e^{-i\mathbf{k}\mathbf{a_3}}], \tag{39}$$

$$I_B(\mathbf{k})R = 3V_B(\mathbf{k}) - V_A(\mathbf{k})[1 + e^{i\mathbf{ka_1}} + e^{i\mathbf{ka_3}}]. \tag{40}$$

Az előző részekhez képest az az új, hogy nem csak egy egyenletünk van, hanem kettő. A fenti két egyenletet írhatjuk mátrixos formalizmussal úgy, hogy az $I_A(\mathbf{k})$ és $I_B(\mathbf{k})$, illetve $V_A(\mathbf{k})$ és $V_B(\mathbf{k})$ mennyiségekből vektorokat képezünk:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 + e^{-i\mathbf{ka_1}} + e^{-i\mathbf{ka_3}} \\ 1 + e^{i\mathbf{ka_1}} + e^{i\mathbf{ka_3}} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A(\mathbf{k}) \\ V_B(\mathbf{k}) \end{bmatrix} = -R \begin{bmatrix} I_A(\mathbf{k}) \\ I_B(\mathbf{k}) \end{bmatrix}. \tag{41}$$

Látható, hogy a feszültség vektort egy lineáris leképezés, az $L(\mathbf{k})$ viszi át az áramerősség vektorba. A Green függvényt, ebben az esetben már inkább Green-mátrixról lehet beszélni, és az alábbi egyenlettel definiálható:

$$L(\mathbf{k})G(\mathbf{k}) = -1, \tag{42}$$

amely előjeltől eltekintve, nem más mint egy mátrix invertálás. Felhasználva az $\omega = L_{12}(\mathbf{k})$ jelölést, egy $2\,x\,2$-es mátrix invertálás után kaphatjuk az alábbi Green-mátrixot:

$$G(k) = \frac{1}{9 - |\omega|^2} \begin{bmatrix} 3 & \omega^* \\ \omega & 3 \end{bmatrix}. \tag{43}$$

Egyszerű átalakítással adódik, hogy $9 - |\omega|^2 = 2[3 - \cos \mathbf{ka_1} - \cos \mathbf{ka_2} - \cos \mathbf{k}(\mathbf{a_1}+\mathbf{a_2})]$. A következő kérdés, hogy milyen eredő ellenállást szeretnénk vizsgálni, ugyanis itt két féle lehetőségünk van: R_{AA} illetve R_{AB}, melyek estében különböző egyenleteket kapunk. A másik két lehetőség (R_{BA},R_{BB}) szimmetria tulajdonságok alapján azonosítható a fentiekkel. Először vizsgáljuk a két azonos típusú pont közötti ellenállást. Ekkor a bejövő áramok felírhatóak az alábbi alakban $I_A(\mathbf{k}) = (1 - e^{-i\mathbf{kr_0}})I$. Innen a feszültség $V_A(\mathbf{k}) = RG_{11}(\mathbf{k})I_A(\mathbf{k})$, és az Ohm-törvény segítségével kifejezhetjük az eredő ellenállás értékét:

$$R_{AA}(\mathbf{k}) = RG_{11}(\mathbf{k})[2 - e^{-i\mathbf{kr_0}} + e^{i\mathbf{kr_0}}]. \tag{44}$$

Az eredő ellenállás értékét egy inverz Fourier-transzformációval kaphatjuk meg:

$$R_{AA}(\mathbf{r}_0) = 3Rv_0 \int_{k \in BZ} \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{1 - \cos(\mathbf{kr_0})}{3 - \cos(\mathbf{ka_1}) - \cos(\mathbf{ka_2}) - \cos(\mathbf{ka_3})}, \tag{45}$$

$$R_{AA}(\mathbf{r}_0) = 3R_{triang}(\mathbf{r_0}). \tag{46}$$

Észre vehetjük, hogy ez az érték megegyezik a hasonlóan koordinátázott szabályos háromszög eredő ellenállásának háromszorosával. Ez nem meglepő, mert ha csillag-delta átalakítással oldjuk meg a feladatot, akkor éppen egy háromszögrácsot kapnánk, melynek csúcsai éppen az azonos típusú pontok. Az élek ellenállása, pedig megegyezik egymással, és éppen háromszorosa a hatszögrács élének ellenállásával. Itt is kiszámolhatóak az értékek, de mivel ezek már a szabályos háromszög című részben láthatóak, így az adatokat nem közöljük ismételten, hiszen az ott szereplő értékek háromszorosát kell venni.

Az izgalmasabb kérdés, két különböző típusú pont közti eredő ellenállás értéke. Ekkor az eredő ellenállás értékét az azonos típusú pontok közötti eredő ellenállás segítségével írhatjuk fel. A Kirchoff-törvényeknél láthattuk, hogy egy pont feszültsége megegyezik a vele szomszédos pontok feszültségének átlagával, ha ott nem vezetek be, vagy ki áramot. Ezt átfogalmazhatjuk a Green-függvények majd az ellenállások nyelvére, és ebben az esetben az alábbi összefüggést kaphatjuk:

$$R_{AB}(\mathbf{r_0}) = \frac{1}{3}(R_{AA}(\mathbf{r_0}) + R_{AA}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{a_1}) + R_{AA}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a_2})). \tag{47}$$

Ezt a képletet a Green-függvények segítségével is felírhatjuk, a meghatározás menete hasonlóan történik, mint amikor két azonos típusú pont között határoztuk meg:

$$R_{AB}(\mathbf{k}) = R[G_{11}(\mathbf{k}) + G_{22}(\mathbf{k}) - G_{12}(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{kr_0}} + G_{21}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{kr_0}}], \tag{48}$$

$$R_{AB}(\mathbf{r}_0) = Rv_0 \int_{k\in BZ} \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{3-\cos(\mathbf{kr_0}) - \cos\mathbf{k}(\mathbf{r_0}+\mathbf{a_1}) - \cos\mathbf{k}(\mathbf{r_0}+\mathbf{a_1}+\mathbf{a_2})}{3-\cos(\mathbf{ka_1}) - \cos(\mathbf{ka_2}) - \cos(\mathbf{ka_3})}. \tag{49}$$

Korábban láttuk, hogy miért célravezető ugyanazt a koordinátázást alkalmazni a hatszögrácsnál, mint a háromszögrácsnál. Egyetlen problémát az jelenthet, hogy ekkor hogyan adhatjuk meg egy másik típusú pont koordinátáit. Ezeket tört koordinátákkal reprezentáljuk, úgy, hogy a pontos geometriai helyet az $n\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2$ adja meg. A hatszögrács ellentétes típusú pontjai között mérhető eredő ellenállásokat a 3. táblázat foglalja össze:

	$n=\frac{2}{3}$	$n=\frac{5}{3}$	$n=\frac{8}{3}$	$n=\frac{11}{3}$	$n=\frac{14}{3}$
$m=\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}-2\frac{\sqrt{3}}{\pi}$	$\frac{74}{3}-42\frac{\sqrt{3}}{\pi}$	$266\frac{1}{3}-480\frac{\sqrt{3}}{\pi}$	$3168\frac{2}{3}-5744\frac{\sqrt{3}}{\pi}$
$m=\frac{4}{3}$			$-\frac{32}{3}+22\frac{\sqrt{3}}{\pi}$	$-59+110\frac{\sqrt{3}}{\pi}$	$-837\frac{1}{3}+1522\frac{\sqrt{3}}{\pi}$
$m=\frac{7}{3}$					$262-472\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

3. táblázat. *A hatszögrács pontjainak eredő ellenállását$R_{AB}(r_0)$ mutatja az origóhoz viszonyítva a koordináták függvényében.*

3.2. Tetszőleges bázissal rendelkező pontrácsok vizsgálata

Az előző részben megismerkedtünk a hatszögráccsal, melyet úgy tekintettünk, mint egy olyan háromszögrácsot, melynek minden pontjához egy két csúcsból álló bázist rendeltünk. Ebben a részben ennek a módszernek az általánosításával megmutathatjuk tetszőleges bázissal rendelkező szabályos rácsok esetére. Általános megoldási utat mutatunk, hogyan lehet ekkor felírni a Green-mátrixot, valamint ebből hogyan lehet meghatározni az eredő ellenállás értékét két tetszőleges pont esetén.

Ekkor a hatszögráccsal ellentétben, ne A és B-vel indexeljük a bázis pontokat, hanem a természetes számokkal, melyeket alsó indexként jelölünk. Az eredő ellenállást a hálózat két tetszőleges pontja között szeretnénk meghatározni. Legyen ezen két bázispont i és j típusú, a későbbiek a bázispontok fajtáját típusnak nevezzük. A két pont helyzetét nem adhatjuk meg egyértelműen, ha csak azt adjuk meg, hogy milyen típusú bázispont. Meg kell adni azt is, hogy a szabályos rács mely pontjához tartozó bázis között szerepel a pontunk. Ezt egy vektorral adhatjuk meg. Az eredő ellenállás meghatározásánál felhasználhatjuk az eltolás invarianciát, így az egyik vektor legyen nullvektor, a másikat pedig jelöljük $\mathbf{r}_0$-val. Az eredő ellenállás meghatározását hasonlóan végezzük, mint korábban. Az egyik pontban bevezetünk I áramot, a másik pontban pedig kivezetjük. Így az áram eloszlás:

$$I_i(\mathbf{r}) = I\delta_{\mathbf{r},\mathbf{0}} \text{ és } I_j(\mathbf{r}) = -I\delta_{\mathbf{r},\mathbf{r}_0}. \tag{50}$$

A két pont közötti eredő ellenállást, pedig ismét az Ohm-törvényéből határozhatjuk meg:

$$R_{ij}(\mathbf{r}_0) = \frac{V_i(\mathbf{0}) - V_j(\mathbf{r}_0)}{I}. \tag{51}$$

A feszültség értékeket, az áramerősség értékekből a Green-függvénnyel állíthatjuk elő. Például az $I_k(\mathbf{r} = \mathbf{r}_1)$ áram az $\mathbf{r_2}$ vektor által meghatározott l típusú bázispontban, az alábbi feszültséget kelti $V_l(r_2) = RG_{lk}(\mathbf{r_2}, \mathbf{r_1})I_k(\mathbf{r} = \mathbf{r}_1)$. Ennek segítségével már felírhatjuk a feszültségeket az áramerősségek segítségével:

$$V_i(\mathbf{0}) = RG_{ii}(\mathbf{0}, \mathbf{r})I\delta_{\mathbf{r},\mathbf{0}} - RG_{ij}(0, \mathbf{r})I\delta_{\mathbf{r},\mathbf{r}_0}, \tag{52}$$

és

$$V_j(\mathbf{r_0}) = RG_{ji}(\mathbf{r_0}, \mathbf{r})I\delta_{\mathbf{r},\mathbf{0}} - RG_{jj}(\mathbf{r_0}, \mathbf{r})I\delta_{\mathbf{r},\mathbf{r}_0}. \tag{53}$$

Ezután ismét célszerű áttérni a Fourier-térbeli egyenletekre. Ez azért célszerű, mert az eltolás a **k**-térben, csak egyszerű exponenciálissal történő szorzás alakjában jelenik meg. A fenti egyenletek Fourier-térbeli alakja az alábbi alakot ölti:

$$V_i(\mathbf{k}) = IRG_{ii}(\mathbf{k}) - IRG_{ij}(\mathbf{k})\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r_0}), \tag{54}$$

$$V_j(\mathbf{k}) = -IRG_{jj}(\mathbf{k}) + IRG_{ji}(\mathbf{k})\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r_0}). \tag{55}$$

Felhasználhatjuk, hogy $G_{ij}(\mathbf{k}) = G_{ji}(\mathbf{k})$, ez azzal van kapcsolatban, hogy két pont össszekötése kölcsönös. Ekkor az eredő ellenállás képletére a következőt kaphatjuk:

$$R_{ij}(\mathbf{r}_0) = R\frac{1}{N}\sum_{k\in BZ}\Big[G_{ii}(\mathbf{k}) + G_{jj}(\mathbf{k}) - 2G_{ij}(\mathbf{k})\cos(\mathbf{k}\mathbf{r_0})\Big]. \tag{56}$$

A diszkrét szummázást most is átírhatjuk integrálásra, mivel a Brillouin zónában nagyon sűrűen helyezkednek el a pontjaink, ha $L \to \infty$. Ha nem tételezünk fel további megkötéseket a szabályos rács fajtájára, akkor ez a legáltalánosabb képlet:

$$R_{ij}(\mathbf{r}_0) = Rv_0\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbf{k}\in BZ} d^d\mathbf{k}\Big[G_{ii}(\mathbf{k}) + G_{jj}(\mathbf{k}) - 2G_{ij}(\mathbf{k})\cos(\mathbf{k}\mathbf{r_0})\Big]. \tag{57}$$

A későbbiekben az alaprácsunk egy d-dimenziós kockarács lesz, ekkor a fenti kifejezést tovább alakíthajuk. A 2. fejezetben leírtak alapján a végső átalakítás, ahol $\mathbf{r}_0 = l_1\mathbf{a}_1 + l_2\mathbf{a}_2 + \dots l_d\mathbf{a}_d$:

$$R_{ij}(\mathbf{r}_0) = R\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx_1}{2\pi}\dots\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx_d}{2\pi}\Big[G_{ii}(x_1,\dots x_d) + G_{jj}(x_1,\dots x) - 2G_{ij}(x_1,\dots x_d)\cos(l_1x_1 + \dots + l_dx_d)\Big]. \tag{58}$$

Miután sikerült felírnunk a Green-függvény segítségével az eredő ellenállást, hátra maradt még a Green-függvény, pontosabban Green-mátrix meghatározása. A Green-mátrix fogja azt az információt tartalmazni, hogy hogyan kapcsolódnak a bázisatomok egymáshoz. A Green-mátrix előállítását egy mátrix invertálásra vezetjük vissza, melyet a problémákban mindig meg lehet határozni, esetleg nagyobbak esetén az analitikus invertálás már nehézségekbe ütközhet.

Első lépésként írjuk fel a Kirchoff-törvényeket az egyes bázispontokra. Legáltalánosabban ez az alábbi alakot ölti:

$$RI_j(\mathbf{r}) = h_{max}V_j(\mathbf{r}) - \sum_{h=1}^{h_{max}} V_{i_h}(\mathbf{r}+\mathbf{n}_h). \tag{59}$$

A képletben h_{max} fejezi ki, hogy a j-dik bázispont, hány szomszéddal van összekötve, a h index a kötéseken megy végig. Az i_h azt mutaja, hogy a h-dik kötés milyen típusú pontot köt össze a kiválasztott j-dik típusú ponttal. Az n_h pedig leírja, hogy a h-dik kötés a szabályos rács mely alappontjához tartozó bázisatomok közül kapcsol hozzá pontot a vizsgált pontunkhoz. Ezt képletet átírhatjuk a Fourier-térbe is:

$$RI_j(\mathbf{k}) = h_{max}V_j(\mathbf{k}) - \sum_{h=1}^{h_{max}} V_{i_h}(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\mathbf{n}_h}. \tag{60}$$

Ilyen alakban ez nem más, mint egy lineáris egyenletrendszer, melyet mátrix alakban felírhatunk $I_j(\mathbf{k}) = M_{ji}(\mathbf{k})V_i(\mathbf{k})$, ahol $\mathbf{M}$ szimmetrikus négyzetes mátrix. A szimmetrikusság látszik abból, hogy az összekötés kölcsönös. A Green-függvényt pedig az alábbiak szerint definiálhatjuk:

$$V_j(\mathbf{k}) = -G_{ji}(\mathbf{k})I_i(\mathbf{k}). \tag{61}$$

Így a Green-mátrix, és az M mátrix inverzének ellentettje: $\mathbf{G}(\mathbf{k}) = -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{k})$. Felírva az $\mathbf{M}$ mátrixot, annak inverzével képezhetjük a Green-mátrixot. Kisebb bázisatomszámra analitikusan is, nagyobbakra a numerikus módszerek a célravezetőek $\mathbf{G}$ meghatározásához.

Ebben a részben megmutattuk, tetszőleges bázissal rendelkező pontrácsok eredő ellenállásának általános számolási módját. A fejezet további szakaszaiban ezek alkalmazására mutatunk példákat.

3.3. Kockarácsok

Ebben a részben megoldási utat mutatunk módosított kockarácsok kezelésére. Leginkább a szilárdtest-fizikában jól ismert tércentrált (bcc), és laponcentrált (fcc) kockaráccsal foglalkozok.

Mind a bcc, mind az fcc rácsot fel lehet úgy fogni, mint egy kockarácsot, melyhez egy-egy bázist rendelünk. A bcc rács esetét tekinthetjük, úgy mint ha a kockarács minden egyes pontjához hozzárendelünk egy két pontból álló bázist. És így a problémát visszavezethetjük az előbbi részben leírtakra. Ezzel már ismertek az ellenállás-hálózat csúcspontjai, de még nem tisztázott hova helyezzük el az éleket, azaz az ellenállásokat. A bcc rács ezt nem definiálja, tehát erről önkényesen dönthetünk, és mindegyik lehetőséghez meghatározhatjuk a Green-függvényt és az eredő ellenállást. Jelen esetben egy kiválasztott példát számolunk végig analitikusan. Legyen egy kockarács, melyben minden kocka közepén elhelyezett tércentrált pont legyen összekötve a 8 első szomszédjával, ahogy az a 6. ábrán látható. A kockarács pontjai legyenek egyes típusúak a tércentrált pontok pedig kettes típusúak. A koordinátázást a kockarácsnál megismert módon alakítjuk, $\mathbf{r} = l_1\mathbf{a_1} + l_2\mathbf{a_2} + l_3\mathbf{a_3}$, ahol a vektorok a kockarács éleire illeszkednek. A probléma megoldásának első lépése most is a Kirchoff-törvények felírása:

$$RI_B(\mathbf{r}) = 8V_B(\mathbf{r}) - V_A(\mathbf{r}) - \sum_{i=1}^{3} V_A(\mathbf{r}+\mathbf{a}_i) - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq h}}^{3}\sum_{h=1}^{3}\Big[V_A(\mathbf{r}+\mathbf{a}_i+\mathbf{a}_h) - V_A(\mathbf{r}+\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3)\Big],$$

$$RI_A(\mathbf{r}) = 14V_A(\mathbf{r}) - V_B(\mathbf{r}) - \sum_{i=1}^{3}[V_A(\mathbf{r}\pm\mathbf{a}_i) - V_B(\mathbf{r}-\mathbf{a}_i)] - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq h}}^{3}\sum_{h=1}^{3}\Big[V_B(\mathbf{r}-\mathbf{a}_i-\mathbf{a}_h) - V_B(\mathbf{r}-\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3)\Big]. \tag{62}$$

Ebből már leolvashatjuk az $\mathbf{M}$ mátrixot:

$$\mathbf{M}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} -14 + \sum_{i=1}^{3} 2\cos\mathbf{k}\mathbf{a_i} & 1 + \sum_{i=1}^{3} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{a_i}} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq h}}^{3}\sum_{h=1}^{3} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{a_i}+\mathbf{a_h})} + e^{-i\mathbf{k}\sum_{i=1}^{3}\mathbf{a_i}} \\ 1 + \sum_{i=1}^{3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{a_i}} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq h}}^{3}\sum_{h=1}^{3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{a_i}+\mathbf{a_h})} + e^{i\mathbf{k}\sum_{i=1}^{3}\mathbf{a_i}} & -8 \end{bmatrix}. \tag{63}$$

Már itt is látható, hogy az analitikus számolás, már a legegyszerűbb elképzelt esetekben is nehézkessé válik, így azt már értelmesebb valamelyik numerikus programmal kezelni, melyre a Mathematica nevű szoftvert használjuk. A Green-függvény meghatározásához, a fenti mátrix inverzét kell kiszámolnunk:

$$\mathbf{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\det\mathbf{M}(\mathbf{k})}\begin{bmatrix} 8 & (1+e^{i\mathbf{k}\mathbf{a_1}})(1+e^{i\mathbf{k}\mathbf{a_2}})(1+e^{i\mathbf{k}\mathbf{a_3}}) \\ (1+e^{-i\mathbf{k}\mathbf{a_1}})(1+e^{-i\mathbf{k}\mathbf{a_2}})(1+e^{-i\mathbf{k}\mathbf{a_3}}) & 14 - \sum_{i=1}^{3} 2\cos\mathbf{k}\mathbf{a_i} \end{bmatrix}, \tag{64}$$

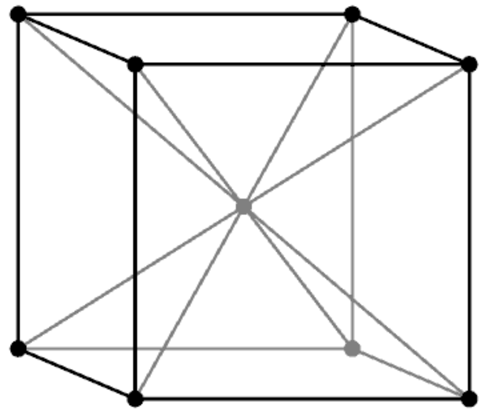
ahol a determináns értéke kisebb számolások után adódik:

$$\det\mathbf{M}(\mathbf{k}) = 112 - 16\sum_{i=1}^{3}\cos\mathbf{k}\mathbf{a_i} - 8(1+\cos\mathbf{k}\mathbf{a_1})(1+\cos\mathbf{k}\mathbf{a_2})(1+\cos\mathbf{k}\mathbf{a_3}). \tag{65}$$

Így meghatároztuk a fentebb felvázolt bcc rács Green-függvényeit, ebből az eredő ellenállás kiszámítása további nehézséget okozhat. Ugyanis ezeket az integrálokat analitikusan csak nagyobb számolási kapacitással határozhatjuk meg, így csak a numerikus út adódik. A probléma részletesebb numerikus tárgyalását jelen feladat során nem végeztük el.

Az fcc rács esetén még bonyolultabb a helyzetünk, ezt ugyanis úgy kell tekintenünk mint egy kockarácsot, melynek minden csúcsához egy négy pontból álló bázist rendelünk. Hasonlóan a bcc rácshoz itt is nekünk kell definiálnunk, hogy mely éleket kötjük össze. A problémához tartozó Green-mátrix $4\,x\,4$-es lesz, melyet a korábbi bcc rácshoz képest még nehezebb kezelni, de a megoldás menete hasonló, így erre itt nem térünk ki.

Ebben a fejezetben rámutattunk arra, hogy a bcc és fcc rácshálózatok is kezelhetőek a Green-függvényes technikával. Továbbá láttuk, hogy az elmélet egyszerűsége mellett még a legegyszerűbb példák is analitikusan bonyolultakká válhatnak. A problémákat numerikusan nem vizsgáltuk, csupán a vizsgálódásukhoz szükséges alapokat közöltük. A későbbiekben analitikusan is végigszámolható példákat mutatunk.

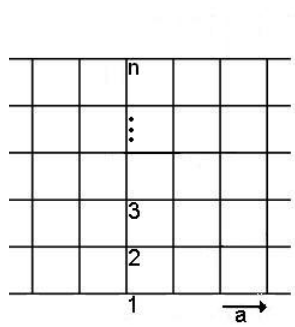


6. ábra. *Az általam vizsgált bcc-rács az alábbi kockák sorozatából épül fel, ahol minden berajzolt él egy R ellenállásnak felel meg.*

3.4. Ellenállás-szalagok

Ebben a részben az ellenállás-szalagok példáját vizsgáljuk. Ellenállás-szalag alatt olyan $N\,x\,M$-es négyzetrácsot értünk, ahol az N közel végtelennek tekinthető, M pedig véges érték. Például $M = 1$-re a középiskolából is ismert ellenálláslétrát kapjuk, melynek eredő ellenállását megtudjuk határozni a Green-módszer segítsége nélkül is, így jó lehetőséget biztosít egyenleteink ellenőrzésére.

Az ellenállás-szalagot úgy tekintjük, mint egy egydimenziós rácsot, melynek minden pontjához egy $M + 1$ pontból álló bázist rendelünk. Tetszőleges $n = M + 1$-re vizsgáljuk a problémát. A bázis atomok számozását az 7. ábra szerint végeztük. Az egydimenziós rács rácsvektorát $\mathbf{a}$-val jelölöm.



7. ábra. Az ellenállás-szalag bázispontjainak számozása, illetve az **a** *rács vektor látható.*

Felírva minden bázisponthoz a Kirchoff-törvényeket

$$I_1(\mathbf{r}) = \frac{V_1(\mathbf{r}) - V_2(\mathbf{r})}{R} + \frac{V_1(\mathbf{r}) - V_1(\mathbf{r}+\mathbf{a})}{R} + \frac{V_1(\mathbf{r}) - V_1(\mathbf{r}-\mathbf{a})}{R},$$

$$I_i(\mathbf{r}) = \frac{V_i(\mathbf{r}) - V_{i-1}(\mathbf{r})}{R} + \frac{V_i(\mathbf{r}) - V_{i+1}(\mathbf{r})}{R} + \frac{V_i(\mathbf{r}) - V_i(\mathbf{r}+\mathbf{a})}{R} + \frac{V_i(\mathbf{r}) - V_i(\mathbf{r}-\mathbf{a})}{R},$$

$$I_n(\mathbf{r}) = \frac{V_n(\mathbf{r}) - V_{n-1}(\mathbf{r})}{R} + \frac{V_n(\mathbf{r}) - V_n(\mathbf{r}+\mathbf{a})}{R} + \frac{V_n(\mathbf{r}) - V_n(\mathbf{r}-\mathbf{a})}{R}. \tag{66}$$

Ezután átírhatjuk a képleteinket a Fourier-térbe. Így egy lineáris egyetlenrendszert kapunk, melynek együtthatóit a már megismert $\mathbf{M}(\mathbf{k})$ mátrixba rendezhetjük. A mátrix felírásakor bevezetjük az alábbi kifejezést:

$$\omega \equiv -4 + \exp(i\mathbf{ka}) + \exp(-i\mathbf{ka}) = -4 + 2\cos(\mathbf{ka}). \tag{67}$$

Így az egyenletrendszer az alábbi alakban írható:

$$\begin{bmatrix} \omega+1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \omega & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & & \omega & 1 \\ 0 & 0 & & & 1 & \omega+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(\mathbf{k}) \\ V_2(\mathbf{k}) \\ V_3(\mathbf{k}) \\ \\ V_{n-1}(\mathbf{k}) \\ V_n(\mathbf{k}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1(\mathbf{k}) \\ I_2(\mathbf{k}) \\ I_3(\mathbf{k}) \\ \\ I_{n-1}(\mathbf{k}) \\ I_n(\mathbf{k}) \end{bmatrix}. \tag{68}$$

Ebből a további vizsgálódásainkat képező $\mathbf{M}(\mathbf{k})$ mátrix már leolvasható:

$$\mathbf{M}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \omega+1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \omega & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & & \omega & 1 \\ 0 & 0 & & & 1 & \omega+1 \end{bmatrix}. \tag{69}$$

A következő probléma az $\mathbf{M}(\mathbf{k})$ mátrix inverzének meghatározása, mert ennek ellentettjével tudjuk majd kifejezni a Green-függvényt. A mátrix egy tridiagonális mátrix, melynek inverzét kell meghatároznunk. Továbbá szimmetrikus mátrixról van szó, így az inverze is szimmetrikus lesz, tehát foglalkozhatunk csak a jobb felső háromszögmátrixszal. Így a képletek $j \geqq i$-re érvényesek, ha azokkal az alábbi módon indexeljük a mátrixokat: $(\mathbf{M}^{-1})_{ij}$.

Az inverz meghatározásához használjuk az invertálás általános képletét. Vagyis minden mátrixelemhez kiszámoljuk az előjeles aldeterminánst, majd leosztjuk a teljes mátrix determinánsával. Első lépésként határozzuk meg az $\mathbf{M}$ mátrix determinánsát! Próbáljuk meg ezt visszavezetni az alábbi képletben szereplő mátrix ismert determinánsára:

$$\det \begin{bmatrix} \omega & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \omega & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & & \omega & 1 \\ 0 & 0 & & & 1 & \omega \end{bmatrix}_{nxn} = U_n(\frac{\omega}{2}), \tag{70}$$

ahol U_n Csebisev második típusú polinomja.

Ha az $\mathbf{M}$ mátrixot első sora majd az utolsó sora alapján kifejtjük, akkor visszavezethetjük a fenti mátrix típusú determinánsára:

$$\det \mathbf{M} = M_n(\omega) = (1+\omega)^2 U_{n-2}(\frac{\omega}{2}) - 2(1+\omega)U_{n-3}(\frac{\omega}{2}) + U_{n-4}(\frac{\omega}{2}). \tag{71}$$

A későbbiekben még szükségünk lesz a Csebisev-polinomok egy másik kombinációjára, melyet a következők alapján definiálunk:

$$B_n(\omega) = (1+\omega)U_{n-1}(\frac{\omega}{2}) - U_{n-2}(\frac{\omega}{2}). \tag{72}$$

A $B_n(\omega)$ polinomot használjuk fel az inverz kiszámításhoz, melyet egyszerű determináns-számolással kaphatunk, ha több oszlopa és sora szerint kifejtjük. Ezek után kaphatjuk az alábbi összefüggést, ahol az előjeles aldetermináns tulajdonsága miatt benne maradt egy előjellel való szorzás:

$$(\mathbf{M}^{-1})_{ij} = \frac{B_{i-1}(\omega)B_{n-j}(\omega)}{M_n(\omega)}(-1)^{i+j} \tag{73}$$

Ebből már a Green-függvény is felírható, mivel az a fenti kifejezés -1-szerese. Majd visszahelyettesítve a korábbi polinomokat tisztán a Csebisev második típusú polinomok függvényében fejezhetjük ki a Green-mátrix elemeit:

$$\mathbf{G}(\omega)_{ij} = \frac{B_{i-1}(\omega)B_{n-j}(\omega)}{M_n(\omega)}(-1)^{i+j+1},$$

azaz

$$\mathbf{G}(\omega)_{ij} = \frac{\left[(1+\omega)U_{i-2}(\frac{\omega}{2}) - U_{i-3}(\frac{\omega}{2})\right]\left[(1+\omega)U_{n-j-1}(\frac{\omega}{2}) - U_{n-j-2}(\frac{\omega}{2})\right]}{(1+\omega)^2 U_{n-2}(\frac{\omega}{2}) - 2(1+\omega)U_{n-3}(\frac{\omega}{2}) + U_{n-4}(\frac{\omega}{2})}(-1)^{i+j+1}. \tag{74}$$

A Green-függvény meghatározása után már az eredő ellenállást is felírhajuk két tetszőleges pont között. Ennek alapjait a 3.2 részben mutattuk meg, az ott leírtak alapján az eredő ellenállás egydimenzió esetén:

$$R_{ij}(l) = R\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\left[G_{ii}(x) + G_{jj}(x) - 2G_{ij}(x)\cos lx\right]. \tag{75}$$

A jelölések hasonlóan az eddigiekhez: $\mathbf{r_0} = l\mathbf{a}$, ahol $l \in \mathbb{Z}$, és $\mathbf{ka} = x$.

Mint ennek a fejezetnek a bevezetőjében láttuk, hogy az ellenállás-szalag speciális esete az ellenálláslétra ($n = 2$), melynek eredő ellenállását speciális esetre ($i = 1, j = 2, l = 0$) középiskolai módszerekkel is meg lehet határozni. A félvégtelen-ellenálláslétra eredő ellenállását meghatározhatjuk, ha képzeletben még egy elemet hozzá teszünk. Az így kialakított rendszer eredő ellenállásának meg kell egyeznie az eredetivel. Ebből adódik, hogy az ilyen hálózat ellenállása $(1+\sqrt{3})R$. Az általunk kiválasztott speciális esetben két ilyen félvégtelen-ellenálláslétra, és egy R ellenállás van párhuzamos kapcsolva. Így az eredő ellenállásra $\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}R$ adódik. Ezt az eredményt klasszikus módszererrel kaptuk. Nézzük meg, hogy a Green-módszer is tudja-e ezt az eredményt szolgáltatni!

A szalag elég keskeny, ezért most nem érdemes a (74) egyenletet használni, hanem térjünk vissza a Green-mátrix előállításához. Egy $2\,x\,2$-es (69)-ban adott $\mathbf{M}$ mátrixot könnyen invertálhatunk. A kapott Green-mátrix:

$$G = \frac{1}{\omega^2 + 2\omega} \begin{bmatrix} -1-\omega & 1 \\ 1 & -1-\omega \end{bmatrix}. \tag{76}$$

Az erdő ellenállást speciálisan erre az estre az alábbiak szerint kaphatjuk meg, majd behelyettesítve ω értékét

$$R_{12}(0) = R\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \left[G_{11}(x) + G_{22}(x) - 2G_{12}(x)\right],$$

$$R_{12}(0) = R\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{1}{(-4+2\cos(x))^2 + 2(-4+2\cos(x))}(4 - 4\cos x) =$$

$$= R\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{1}{2-\cos(x)} = \frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}R\,(\approx 0,55735R). \tag{77}$$

Az integrálás a Mathematica nevű programmal egzaktul elvégezhető, az eredmény pontosan megegyezik a fenti középiskolás módszerrel kapott értékkel.

A szalagok jellegzetes eredő ellenállásainak vizsgálatához vegyünk egy 35 egység vastagságú hálózatot ($n = 35$). Vegyünk két szomszédos azonos típusú pontot, melyek között mérjük az ellenállást. Numerikusan meghatározzuk az ellenállást a különböző típusú pontok (i) függvényében (vagy is annak függvényében, hogy milyen messze van a szalag szélétől). Az eredőt az alábbi integrál segítségével határozzuk meg:

$$R_{ii}(1) = R\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \left[2G_{ii}(x)(1 - \cos x)\right]. \tag{78}$$

A numerikus eredmények a 8. ábrán láthatóak:

Ezen példa segítségével megmutattam, hogy minél inkább az ellenállás-szalag közepén választunk pontokat, annál inkább a négyzetrácsnál megismert eredő ellenállás értékeket kapjuk. A jelentősebb eltéréseket csak a szalag szélén kaphatjuk.

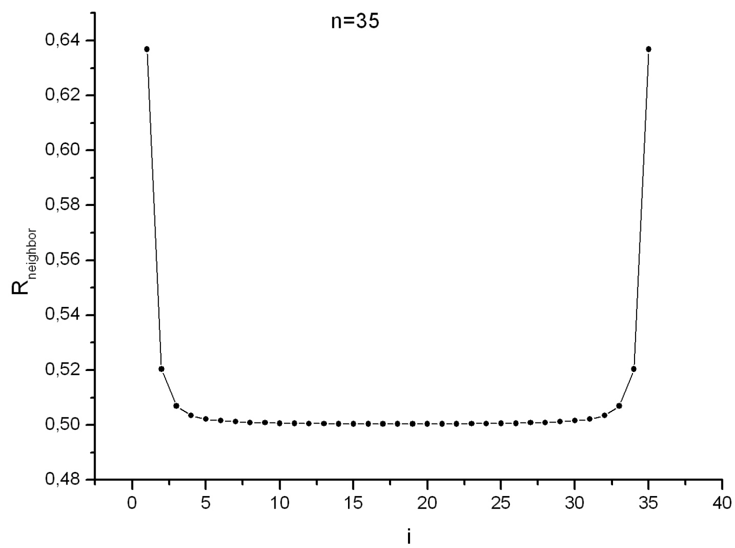
3.5. Négyzetes félsík

Ebben a részben meghatározzuk a félvégtelen négyzetes ellenállás-hálózat Green-függvényét és eredő ellenállását. Erre a későbbiekben csak mint félsík fogunk hivatkozni. A félsíkra ebben az esetben úgy tekintünk, mint egy olyan ellenállás-szalagra, melynek a szélessége végtelenhez tart. Vagyis egy olyan egydimenziós „négyzetrácsra”, melyhez minden pontban egy végtelen pontból álló bázist rendelünk hozzá. A fizikus intuíció alapján a félvégtelen hálózat adatait megkaphatjuk, ha $n \to \infty$ határátmenettel élünk az ellenállás-szalag esetén.

A Green-függvényt megkaphatjuk, ha az ellenállás-szalag Green-függvényében $n \to \infty$ határátmenetet képezzük:

$$G_{ij}^{felsik} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[(1+\omega)U_{i-2}(\frac{\omega}{2}) - U_{i-3}(\frac{\omega}{2})\right]\left[(1+\omega)U_{n-j-1}(\frac{\omega}{2}) - U_{n-j-2}(\frac{\omega}{2})\right]}{(1+\omega)^2 U_{n-2}(\frac{\omega}{2}) - 2(1+\omega)U_{n-3}(\frac{\omega}{2}) + U_{n-4}(\frac{\omega}{2})}(-1)^{i+j+1}. \tag{79}$$

Viszont felmerül az a probléma, hogy hogyan lehet a Csebisev-polinomok hányadosának limeszét képezni. Így először ezt a részkérdést kell megoldanunk.



8. ábra. Két szomszédos azonos típusú pont eredő ellenállása, annak függvényében, hogy milyen messze helyezkednek el a 35 egység széllességű szalag szélétől. Jól látható, hogy a két oldal szimmetrikus, továbbá minél messzebb helyezkednek el a pontok a szalag szélétől, annál jobban közelítik a négyzetrács két szomszédos pontja közötti eredő ellenállás értéket, azaz a $0,5R$ értéket.

Először írjuk fel két egymás követő Csebisev-polinom hányadosának limeszét, majd használjuk fel a polinomok rekurziós összefüggéseit. Így egy algebrai egyenletet kaphatunk a hányados limeszére, melyet H_1-gyel jelölünk:

$$H_1(\omega/2) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n-1}(\omega/2)}{U_n(\omega/2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\omega U_n - U_{n+1}}{U_n} = \omega - \frac{1}{H_1} \rightarrow H_1(\omega/2) = \frac{\omega}{2} - \frac{\sqrt{\omega^2-4}}{2}. \tag{80}$$

Definiáljuk továbbá a H_k polinomokat az alábbi összefüggés alapján:

$$H_k(\omega/2) = \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n-k}(\omega/2)}{U_n(\omega/2)}. \tag{81}$$

A (80) egyenlethez hasonlóan, itt is felírhatjuk tetszőleges H_k polinomot, melybe ha behelyettesítjük a Csebisev-polinomok rekurziós összefüggéseit, akkor szintén egy rekurziós összefüggést kapunk:

$$H_2(\omega/2) = \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n-2}(\omega/2)}{U_n(\omega/2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\omega U_{n+1} - U_n}{U_n} = \omega H_1 - 1,$$

$$H_k(\omega/2) = \omega H_{k-1} - H_{k-2}. \tag{82}$$

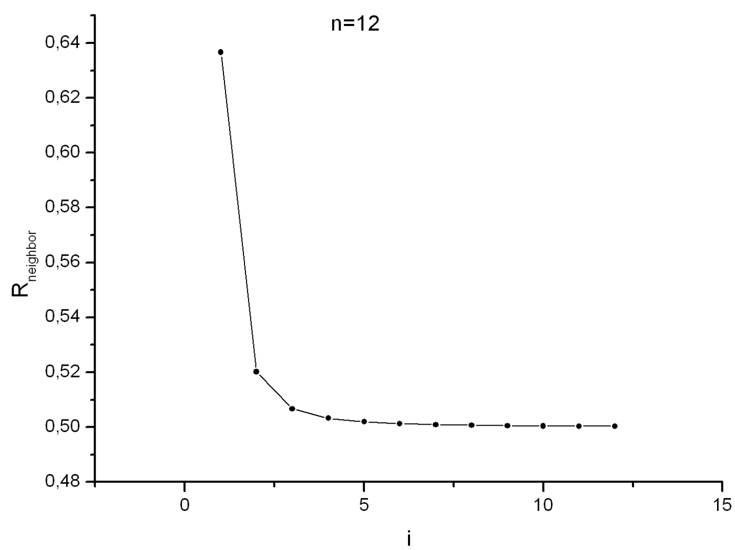
Az ilyen típusú rekurziók esetén a polinomokat ki lehet fejezni a Csebisev-polinomok, valamint a sorozat első tagjának segítségével. Innen kaphatjuk az alábbi összefüggést H_k-ra, ahol minden tagot analitikusan ismerünk:

$$H_k(\frac{\omega}{2}) = H_1(\frac{\omega}{2})U_{k-1}(\frac{\omega}{2}) - U_{k-2}(\frac{\omega}{2}). \tag{83}$$

A félsík Green-függvényét (79) egyenlet fentebb definiáltuk, így már elvégezhetjük benne a határérték-számítást, és az alábbi kifejezést kaphatjuk meg, melyben minden szereplő polinom B_k, H_k korábban definiálásra került. Továbbá az ω helyére is be kell írni a (67)-ben adott **ka**-tól függő kifejezést:

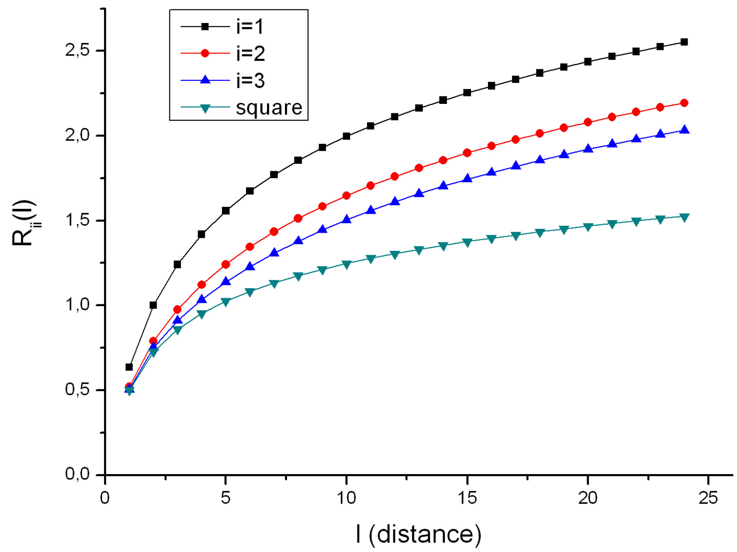
$$G_{ij}^{felsik} = \frac{B_{i-1}(\omega)}{\frac{(1+\omega)^2}{[(1+\omega)/H_{j-1}(\frac{\omega}{2})-1/H_j(\frac{\omega}{2})]} - \frac{2(1+\omega)}{[(1+\omega)/H_{j-2}(\frac{\omega}{2})-1/H_{j-1}(\frac{\omega}{2})]} + \frac{1}{[(1+\omega)/H_{j-3}(\frac{\omega}{2})-1/H_{j-2}(\frac{\omega}{2})]}}(-1)^{i+j+1}. \tag{84}$$

Hasonlóan, mint az ellenállás-szalagnál itt is numerikusan ábrázoltuk a 9. ábrán a szomszédos, de azonos típusú pontok között mérhető eredő ellenállást. Az ábrázoláshoz itt is a (78) egyenletet használtuk fel, a grafikonon i függvényében (milyen messze helyezkedik el a félvégtelent határoló egyenestől) ábrázoltuk a mérhető ellenállást.



9. ábra. *Két szomszédos azonos típusú pont eredő ellenállása, annak függvényében, hogy milyen messze helyezkednek el a négyzetes félsík határoló egyenesétől. Jól látható, hogy minél messzebb helyezkednek el a pontok a félsík szélétől, annál jobban közelítik a négyzetrács két szomszédos pontja közötti eredő ellenállás értéket: a* $0,5R$*-et.*

A 10. ábrán az azonos típusú pontok közötti eredő ellenállás értéket vettük fel, de most nem szomszédos pontok esetében, hanem a távolságuk függvényében. Tehát az $R_{ii}(l)$ függvényt ábrázoltuk, négy különböző típusú pont esetén ($i = 1, 2, 3, \infty$). A végtelen határeset értékei gyakorlatilag a négyzetes ellenállás-hálózat eredő ellenállásinak felelnek meg ekkor $R_{square}(l, 0)$ függvény került ábrázolásra, a jelölés (2.1) fejezethez hasonló. Jól látható, hogy i növekedésével az eredő ellenállás értéke konvergál a négyzetrács értékeihez, de minél távolabbi pontokat nézünk annál lassabb ez a konvergencia.



10. ábra. *Azonos típusú pontok közötti eredő ellenállás értéket vettem fel a távolságuk függvényében a négyzetes félsíkon. Tehát az $R_{ii}(l)$függvényt ábrázoltam, négy különböző típusú pont esetén ($i = 1, 2, 3, \infty$).*

Végezetül a legkisebb i, l értékekre analitikusan is elvégezhető az integrál a Mathematica segítségével. Ezeket az adatokat a 4. táblázatban foglaltuk össze. A legmeglepőbb, hogy pár ismerős szám is feltűnik. Például a határ egyenesen a két szomszédos pont közötti eredő ellenállás éppen meg egyezik a négyzetrács egyik négyzet képzeletbeli átlójának két végpontja között mérhető eredőjével. A határ két másodszomszédos pontja között mérhető eredő ellenállása pedig $1R$, ami meg mutatja, hogy egy nagyon „csúf, hosszú” integrálnak is lehet szép eredménye.

	i=1	i=2	i=3
l=1	$\frac{2}{\pi}$	1	4-$\frac{26}{3\pi}$
l=2	+12-$\frac{18}{\pi}$	+6-$\frac{64}{3\pi}$	+150-$\frac{2368}{5\pi}$
l=3	+340-$\frac{118}{3\pi}$	$\frac{46}{15\pi}$	+200-$\frac{66274}{105\pi}$

4. táblázat. A félvégtelen ellenállás-hálózat eredője a legkisebb i és l értékekre.

4. Ellenállás-hálózatok perturbálása

Ebben a fejezetben tetszőleges (nem csak végtelen, vagy periodikus) ellenállás-hálózatok perturbálásával foglalkozunk, azaz az ellenállás-hálózat egy darab ellenállását elhagyjuk, ahogy az a 11. ábrán látható. Megmutatjuk, hogy ebben az esetben az eredeti hálózat Green-függvényének segítségével ki lehet fejezni a perturbált rendszer Green-függvényét, valamint az eredő ellenállást tetszőleges két pont között.

A szakirodalomban, már vizsgálták a perturbálást, de azokban nem mutatták meg, hogy tetszőleges ellenállásgráfra is megoldható. Numerikusan csak a legegyszerűbb esetet, a négyzetrácsot vizsgálták meg[7].

4.1. Perturbálás elmélete

Legyen adott egy gráf, melynek az élei R ellenállások. Minden csúcsába mutasson egy $\mathbf{r}_k$ vektor, melyeket jobb alsó kis betűkkel indexeljük! A (2.1) fejezethez hasonlóan, az adott csúcsban a feszültséget $V(\mathbf{r}_k)$, a be vagy kifolyó áramot, pedig $I(\mathbf{r}_k)$ jelöli. Ekkor a Kirchoff-egyenletek miatt létezik egy lineáris operátor: $\mathbf{L}_0$, mely kapcsolatot teremt a két mennyiség között:

$$L_0(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)V(\mathbf{r}_k) = -RI(\mathbf{r}_i). \tag{85}$$

Ennek az operátornak definiálhatjuk a Green-operátorát, mely az áramerősségek segítségével határozza meg a feszültség értékeket. Így a Green függvények tulajdonságai:

$$\mathbf{L_0 G_0} = -1, \tag{86}$$

$$RG_0(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)I(\mathbf{r}_k) = V(\mathbf{r}_i). \tag{87}$$

Az eredő ellenállás a $\mathbf{r}_i$ és $\mathbf{r}_j$ vektorok által meghatározott két pont között: $R_o(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \equiv R_0(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$. Ehhez a jelöléshez hasonlóan $G_0(\mathbf{i}, \mathbf{k}) \equiv G_0(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)$.

Ha kíváncsiak vagyunk az eredő ellenállásra az $\mathbf{r}_i$ és $\mathbf{r}_j$ vektorok által meghatározott csúcsok között, akkor be kell vezetnünk az egyik pontban I_0, a másikban pedig ki kell vezetni I_0 áramot. Így a rendszer tetszőleges m pontjában a befolyó áramot az alábbi alakban írhatjuk:

$$I(\mathbf{r}_m) = I_0(\delta_{mi} - \delta_{mj}). \tag{88}$$

Felírhatjuk tetszőleges pontban a feszültséget is:

$$V(\mathbf{r}_h) = RG_0(\mathbf{h}, \mathbf{m})I(\mathbf{r}_m) = RI_0[G_0(\mathbf{h}, \mathbf{i}) - G_0(\mathbf{h}, \mathbf{j})]. \tag{89}$$

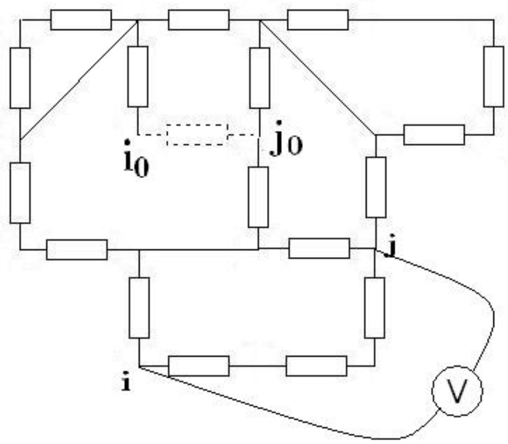
Az eredő ellenállást pedig az Ohm-törvény alapján már adódik:

$$R_0(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \frac{V(\mathbf{r}_i) - V(\mathbf{r}_j)}{I_0} = R[G_0(\mathbf{i}, \mathbf{i}) + G_0(\mathbf{j}, \mathbf{j}) - G_0(\mathbf{i}, \mathbf{j}) - G_0(\mathbf{j}, \mathbf{i})]. \tag{90}$$

Felhasználhatjuk, hogy a Green-függvény két változójában szimmetrikus. Ez tetszőleges gráfra is igaz, mert azzal van kapcsolatban, hogy az összekötések páronként kölcsönösek. Így a kifejezés az alábbiak szerint egyszerűsödik:

$$R_0(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = R[G_0(\mathbf{i}, \mathbf{i}) + G_0(\mathbf{j}, \mathbf{j}) - 2G_0(\mathbf{i}, \mathbf{j})] \tag{91}$$

Perturbáljuk az ellenállás-hálózatot. Tekintsük az $\mathbf{r}_{i_0}$ és $\mathbf{r}_{j_0}$ szomszédos csúcsokat, és vegyük ki a közöttük elhelyezkedő élet. Ennek a perturbált ellenállás-hálózatnak a Green-függvényét szeretném felírni az eredeti $\mathbf{G}_0$segítségével. A perturbálásra tekintsünk úgy, mintha a perturbált rácsba az



11. ábra. *Egy általános ellenállásgráf perturbálása során az i_0 és a j_0 közé eső ellenállást kivesszük, melyet szagatottan jelölök. Az ellenállást pedig az i és a j pontok között mérem. Az ábrával is illusztrálni szeretném, hogy tetszőleges véges vagy végtelen ellenáláshálózat perturbálásáról van szó.*

$\mathbf{r}_{i_0}$ és $\mathbf{r}_{j_0}$ pontokban úgy vezetnénk be illetve ki áramokat, hogy az kiadja az összekötő élen folyó áramerősséget. Így megkaphatjuk az eredeti rács áram és feszültség eloszlását. Ezt a plusz áramot (áram-perturbációt) jelöljük $\delta I(\mathbf{r}_m)$-mel! Ennek értéke a fent leírtak alapján:

$$\delta I(\mathbf{r}_m)R = \delta_{mi_0}[V(\mathbf{r}_{i_0}) - V(\mathbf{r}_{j_0})] + \delta_{mj_0}[V(\mathbf{r}_{j_0}) - V(\mathbf{r}_{i_0})], \tag{92}$$

ahol a képletben szereplő potenciálok már perturbálás utáni hálózaton érvényesek. A módosított hálózat I és V közötti összefüggései:

$$L_0(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)V(\mathbf{r}_k) = -RI(\mathbf{r}_i) - R\delta I(\mathbf{r}_i). \tag{93}$$

A perturbált áramot tartalmazó tagot átvihetjük a másik oldalra. Ekkor az egyenletet tekinthetjük úgy, mintha az operátort perturbálnánk:

$$L_0(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)V(\mathbf{r}_k) + R\delta I(\mathbf{r}_i) = [L_0(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k) + L_1(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)]V(\mathbf{r}_k). \tag{94}$$

$L_1(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)$ felírható a korábbi (92)-os képlet segítségével, melyre az alábbi alakot kapjuk, nincs érvényben az Einstein-féle autoszummás konvenció:

$$L_1(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k) = \delta_{ii_0}[\delta_{i_0k} - \delta_{j_0k}] + \delta_{ij_0}[\delta_{j_0k} - \delta_{i_0k}] = (\delta_{ii_0} - \delta_{ij_0})(\delta_{i_0k} - \delta_{j_0k}). \tag{95}$$

A kapott lineáris egyenletrendszer a felírt módosító taggal együtt az alábbi alakot ölti:

$$[L_0(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k) + (\delta_{ii_0} - \delta_{ij_0})(\delta_{i_0k} - \delta_{j_0k})]V(\mathbf{r}_k) = -RI(\mathbf{r}_i) \tag{96}$$

A képletet operátor jelöléssel is felírhatjuk, ha $V(\mathbf{r}_k), I(\mathbf{r}_i)$-t a változójuk szerint vektorba rendezem:

$$[\mathbf{L_0} + (\mathbf{r}_{i_0} - \mathbf{r}_{j_0}) \circ (\mathbf{r}_{i_0} - \mathbf{r}_{j_0})]\mathbf{V} = -R\mathbf{I}. \tag{97}$$

A perturbált rendszer Green-függvénye előjeltől eltekintve nem más, mint a módosított lineáris operátor inverze:

$$\mathbf{G} = -(\mathbf{L_0} + \mathbf{L_1})^{-1}. \tag{98}$$

A perturbált lineáris operátor Green-operátorát a Dyson-egyenlet segítségével fejezhetjük ki:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0\mathbf{L}_1\mathbf{G}. \tag{99}$$

Ennek formális megoldását az alábbi sor alakjában kereshetjük:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0\mathbf{L}_1\mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0\mathbf{L}_1\mathbf{G}_0\mathbf{L}_1\mathbf{G}_0 + \dots . \tag{100}$$

A mi esetünk szerencsére egyszerűbb, mert az operátort egy diáddal módosítottuk. Ilyenkor az inverz kompakt alakban felírható:

$$(\mathbf{L}_0 + \mathbf{r}_i \circ \mathbf{r}_j)^{-1} = \mathbf{G}_0 - \frac{\mathbf{G}_0(\mathbf{r}_i \circ \mathbf{r}_j)\mathbf{G}_0}{1 + \mathbf{r}_j\mathbf{G}_0\mathbf{r}_i}. \tag{101}$$

Végül a perturbált Green-függvény a következő alakú lesz:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G_0} + \frac{\mathbf{G}_0(\mathbf{r}_{i_0} - \mathbf{r}_{j_0}) \circ (\mathbf{r}_{i_0} - \mathbf{r}_{j_0})\mathbf{G}_0}{1 - (\mathbf{r}_{i_0} - \mathbf{r}_{j_0})\mathbf{G}_0(\mathbf{r}_{i_0} - \mathbf{r}_{j_0})}, \tag{102}$$

illetve koordináta reprezentációban:

$$G(\mathbf{i},\mathbf{j}) = G_o(\mathbf{i},\mathbf{j}) + \frac{[G_0(\mathbf{i},\mathbf{i_0}) - G_0(\mathbf{i},\mathbf{j_0})][G_0(\mathbf{i_0},\mathbf{j}) - G_0(\mathbf{j_0},\mathbf{j})]}{1 - [G_0(\mathbf{i},\mathbf{i}) + G_0(\mathbf{j},\mathbf{j}) - 2G_0(\mathbf{i},\mathbf{j})]}. \tag{103}$$

Ezennel meghatároztuk a perturbált hálózat Green-függvényét az eredeti gráf Green-függvényének segítségével tetszőleges ellenállásgráfra

Az eredő ellenállást is felírhatjuk az eredeti ellenállás-hálózat eredő ellenállásainak függvényben. Az eredő ellenállást a (91) képlet alapján számolom:

$$\frac{R(\mathbf{i},\mathbf{j})}{R} = G(\mathbf{i},\mathbf{i}) + G(\mathbf{j},\mathbf{j}) - 2G(\mathbf{i},\mathbf{j}) =$$

$$= G_0(\mathbf{i},\mathbf{i}) + G_0(\mathbf{j},\mathbf{j}) - 2G_0(\mathbf{i},\mathbf{j}) + \frac{[G_0(\mathbf{i},\mathbf{i}_0) - G_0(\mathbf{i},\mathbf{j}_0) - G_0(\mathbf{j},\mathbf{i}_0) + G_0(\mathbf{j},\mathbf{j}_0)]^2}{1 - [G_0(\mathbf{i},\mathbf{i}) + G_0(\mathbf{j},\mathbf{j}) - 2G_0(\mathbf{i},\mathbf{j})]} \tag{104}$$

A képletben felismerhetjük az eredeti hálózat eredő ellenállás értékeit, azokat is beírva, meg kapjuk a várt összefüggést, mely segítségével a perturbált rács ellenállásai ismerté váltak:

$$R(\mathbf{i},\mathbf{j}) = R_0(\mathbf{i},\mathbf{j}) + \frac{[R_0(\mathbf{i},\mathbf{i}_0) - R_0(\mathbf{i},\mathbf{j}_0) - R_0(\mathbf{j},\mathbf{i}_0) + R_0(\mathbf{j},\mathbf{j}_0)]^2}{4(R - R_0(\mathbf{i},\mathbf{j}))}. \tag{105}$$

Ez az összefüggés tekinthető jelen fejezet fő eredményének.i=1

A probléma speciális esetét érdemes további vizsgálatok alá vetni. Mérjük az eredő ellenállás értékét a perturbált él két végpontja között, ekkor $\mathbf{i} = \mathbf{i_0}$, $\mathbf{j} = \mathbf{j_0}$ adódik. Az egyenletben két azonos pont közötti ellenállás értelemszerűen nulla. Így a speciális esetben az eredő ellenállás értéke:

$$R(\mathbf{i},\mathbf{j}) = R_0(\mathbf{i},\mathbf{j}) + \frac{R_0(\mathbf{i},\mathbf{j})^2}{R - R_0(\mathbf{i},\mathbf{j})}. \tag{106}$$

Ennek átrendezés után egy jól ismert egyenletet, a párhuzamos kapcsolás összefüggését kaphatjuk:

$$\frac{1}{R(\mathbf{i},\mathbf{j})} = -\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0(\mathbf{i},\mathbf{j})}. \tag{107}$$

Itt felismerhetjük, hogy a szabályos rács ebben a speciális esetben tekinthető úgy, mintha a perturbált élet párhuzamosan kapcsoltuk volna egy R ellenállással. Az ehhez tartozó párhuzamos kapcsolások eredőjéről szóló képletet kaptuk meg. Ezek alapján speciális esetekben ki lehet számolni a perturbált szabályos rácsok eredő ellenállását a perturbált él két végpontja között. Néhány esetre az eredményeket az 5. táblázatban foglaltuk össze.

Négyzetrács	R
Háromszögrács	$\frac{R}{2}$
Hatszögrács	$2R$
Kockarács	$\frac{R}{2}$

5. táblázat. *Ha a legegyszerűbb szabályos rácsokat perturbáljuk, akkor könnyen meghatározhatjuk a perturbált él két végpontja közötti eredő ellenállás értékét, ezeket az értékeket foglalja össze a táblázat.*

4.2. Hatszögrács perturbációja

Az előző részben leírtak alapján, tetszőleges olyan hálózat eredő ellenállását vizsgálni tudjuk, melyet úgy kapunk, hogy ismert hálózatból egy ellenállást elhagyunk. Így perturbálhatjuk a négyzetrácsot, a hatszögrácsot, az ellenállás-szalagot, stb., de ezeket akár többször is perturbálhatjuk. Ugyanis az előző levezetés alapján tetszőleges egymás utáni perturbálást is végrehajthatunk. A szakirodalomban eddig csak a négyzetrács perturbálására került sor [7]. Ebben a fejezetben a hatszögrács perturbációját mutatjuk be analitikusan és numerikusan is. De mint említettük, a dolgozatban előforduló hálózatok közül, akármelyiket perturbálhatjuk.

Ha a perturbált hatszögrács Green-függvényét szeretnénk felírni, akkor az előző részben levezetett (91) általános egyenletet kell használnunk. Az egyetlen problémát csak az jelenti, hogy a hatszögrács elemzése során felhasznált jelölésmódra kell átírni a képletünket. A hatszögrácsnál két különböző típusú pontot különböztettünk meg: (A,B). Ha egy ellenállást kiveszünk, akkor az a hatszögrács topológája alapján bizonyosan egy A és egy B típusú pontot köt össze. Az eredő ellenállást vizsgálva két lehetőségünk van, vagy két azonos, vagy két különböző típusú pont között keressük az eredő ellenállást. Legyen a perturbált él két végpontjához tartozó vektor $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$. Az eredő ellenállást pedig az origó és az $\mathbf{r}_0$vektor által meghatározott pontok között vizsgáljuk, ahogy az a 12. ábrán látható. Így az eredő ellenállás értéke:

$$R_{AA}(\mathbf{0},\mathbf{r_0}) = R_{AA}(\mathbf{0},\mathbf{r_0}) + \frac{[R_{AA}(\mathbf{0},\mathbf{r_1}) - R_{AB}(\mathbf{0},\mathbf{r_2}) - R_{AA}(\mathbf{r_0},\mathbf{r_1}) + R_{AB}(\mathbf{r_0},\mathbf{r_2})]^2}{4(R - R_{AA}(\mathbf{0},\mathbf{r_0}))}, \tag{108}$$

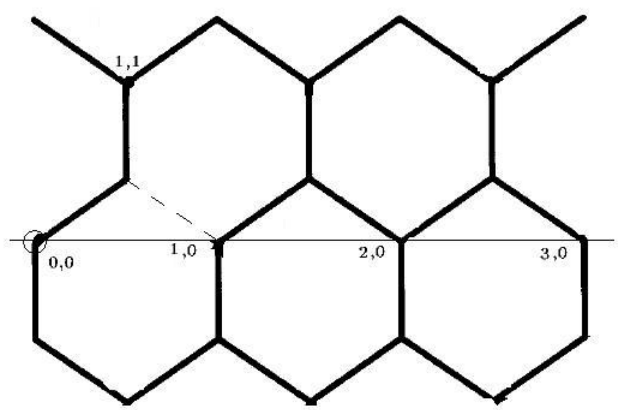
$$R_{AB}(\mathbf{0},\mathbf{r_0}) = R_{AB}(\mathbf{0},\mathbf{r_0}) + \frac{[R_{AA}(\mathbf{0},\mathbf{r_1}) - R_{AB}(\mathbf{0},\mathbf{r_2}) - R_{AB}(\mathbf{r_0},\mathbf{r_1}) + R_{BB}(\mathbf{r_0},\mathbf{r_2})]^2}{4(R - R_{AB}(\mathbf{0},\mathbf{r_0}))}. \tag{109}$$

Az R_{BB} és az R_{BA} egyszerű transzformációval visszavezethető az előbbi egyenletekre.

Speciális esetben numerikusan kiszámoltuk az ellenállást. Tekintsük a 12. ábrán látható perturbált hatszögrácsot, melynek (2/3, 1/3) és (1,0) közötti élét kivettem. Az eredő ellenállást, pedig az origó és az (n,0) pontok között határoztuk meg. A geometria alapján látható, hogy mindig két azonos típusú pont között vizsgálódunk. Az adatokat a 13. ábrán ábrázoltuk, ahol a perturbált ellenállások mellett referenciaként a perturbálás nélküli teljes hatszögrácshoz tartozó eredményeket is felvettük viszonyítás céljából. Így az $R_{hexagonal}(n, 0)$, és a $R_{hexagonalperturb}(n, 0)$ függvényeket ábrázoltuk.

A numerikus vizsgálat során láthatjuk, hogy a perturbálás nem meglepő módon növeli az eredő ellenállás értékét. Valamint megállapíthatjuk azt a sejtést, hogy aszimptotikusan a két ábrázolt görbe különbsége egy állandóhoz konvergál.

Más elrendezésben is perturbálhatjuk a hatszögrácsot, amelyet a fentiekhez hasonlóan könnyen elvégezhetünk. Hasonló technikával más fajta topológiájú ellenáláshálózatokat is perturbálhatunk, de ebben a dolgozatban más hálózatokra nem végzünk el további numerikus vizsgálatot.

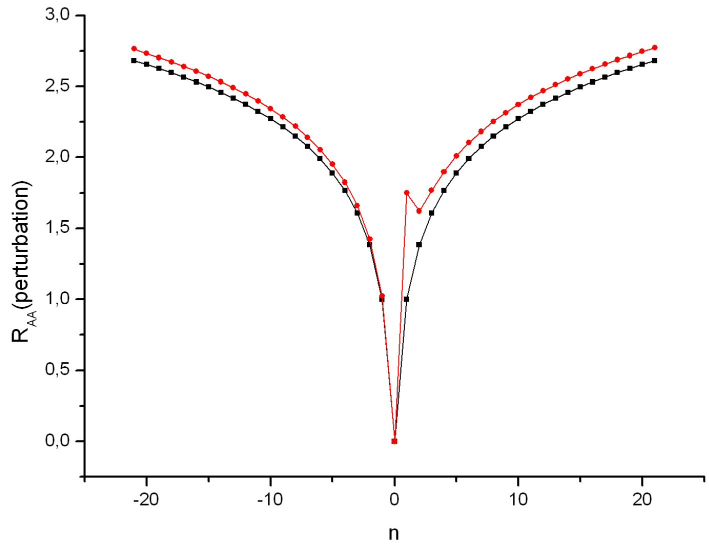


12. ábra. *A perturbált hatszögrács koordinátázása. A vékony egyenes mentén vettem fel az eredő ellenállás értékeket.*

5. Konklúzió, kitekintés

A fenti dolgozatban áttekintettük az ellenállás-hálózatok Green-függvény segítségével történő vizsgálatának alapjait, majd megmutattuk ennek a módszernek bizonyos általánosítási lehetőségeit. A dolgozat első részében a már korábban is vizsgált szabályos rácsok jellemzőit tekintettük át, a 3. fejezetben tetszőleges bázissal rendelkező szabályos rácsok esetét dolgoztuk ki. Végül az utolsó fejezetben a perturbált ellenállás-hálózat Green-függvényét határoztuk meg. A fent leírt hálózatokat az elméleti összegzés után speciális esetekben numerikusan is megvizsgáltuk.

A probléma megoldása során megpróbáltuk hangsúlyozni, hogy a Green-függvény alkalmazási területe milyen tág, nagyfokú szabadságot és általánosítási lehetőséget ad a kutatók kezébe. Bár ez a kutatás nem tartozik a fizika kutatás jelenlegi élvonalába, olyan módszereket alkalmaztunk amelyeket mindenkinek érdemes elsajátítania.



13. ábra. *A perturbált hatszögrács és a teljes hatszögrács eredő ellenállásai az origó és az (n,0) koordinátájú pontok között. A perturbálás során a (2/3, 1/3) és (1,0) közötti élt vettem ki.*

Munkánk során megpróbáltuk felvázolni, hogy mely ellenállás-hálózatok eredő ellenállását tudjuk egzaktul meghatározni, de arról kevesebbet írtam mely hálózatok vizsgálata nem megoldott még. Ilyenek például a végtelen ellenállás-hálózatok, melyek nem periodikusak egyetlen irányba sem (például a négyzetes negyedsík). Az ilyen típusú hálózatok az általunk vizsgált példák mintájára nem megoldhatóak, mert egyetlen irányba sem teljesen periodikusak. Ezek vizsgálatához egy új ötlet szükséges.

Ez a dolgozat leginkább elméleti kutatásnak minősül, közvetlen felhasználási területet nehéz lenne találni. De más kutatási területeken felhasználható eredményekre jutottunk. A Poisson-egyenlet a fizika más területein (kvantummechanika, szilárdtestfizika) is felbukkan, ennek megoldását jelen dolgozatban bizonyos rácsokra megoldottuk, így ezek az eredmények könnyen beilleszthetőek az ott folyó kutatási munkákba.

Itt említenénk meg, hogy a statisztikusfizikából ismert Potts-modell határértékben éppen az ellenállás-hálózatokat adja vissza. Erről részletesebben F. Y. Wu cikkében olvashatunk[9]. A szilárdtestfizikai kutatásokban is felhasználják az ellenállás-hálózatokra vonatkozó összefüggéseket, például a dielektromos összeomlás modellezésekkor [10].

Másrészt a munkánkat a fizika tanításban is fontosnak érezzük, mivel egy olyan probléma megoldásáról van szó, melynek alapjaival a diákok először középiskolában ismerkedhetnek meg. Ugyanis ott találkozhatnak először a végtelen ellenáláshálózatok legegyszerűbb példáival, mint például az ellenálláslétra, vagy a végtelen négyzetrács kétszomszédos pontja között mérhető eredő ellenállás problémája. A diákok számára egy tovább gondolási lehetőséget ad, hogy a problémát magasabb egyetemi szinten ismét, mélyebben tanulmányozhassák.

További terveinkben szerepel, hogy más topológiájú hálózatokat is vizsgáljunk. Például a hengerre, Möbius-szalagra vagy Klein-kancsóra helyezett ellenállások esetét.

Témavezetőmmel közösen az itt kapott eredményeket egy külföldi szaklapban szeretnénk publikálni.

Köszönetnyilvánítás

Elsők között szeretnék köszönetet mondani jelenlegi témavezetőmnek Cserti Józsefnek, aki a témát felvetette nekem, és rámutatott, milyen lehetőségek nyílnak még ebben a témakörben. Tichy Gézának és Pozsgay Balázsnak, akik átolvasták dolgozatomat, és a kari TDK után segítő ötleteket nyújtottak nekem. Továbbá Dávid Gyulának, kinek az óráin elhangzott gondolatai nagy mértékben segítették a felvetett problémák megoldását. Valamint Hagymási Imre 4.éves fizikus hallgatónak a Latex és a stílusok terén adott segítségéért.

Hivatkozások

[1] R. E. Aitchison: *Resistance between adjacent points of Liebman mesh*, Am. J. Phys. **32,** 556 (1964).

[2] D. Atkinson és F. J. van Steenwijk: *Infinite resistive lattices,* Am. J. Phys. **67,** 486-492 (1999).

[3] G. Venezian: *On the resistance between two points ona grid,* Am. J. Phys. **62**, 1000-1004 (1994).

[4] J. Cserti: *Application of the lattice Green's function for calculating the resistance of an infinite network of resistors*, Am. J. Phys. **68,** 896-906 (2000).

[5] M. Jeng: *Random walks and effective resistances on toroidal and cylindrical grids,* Am. J. Phys. **68,** 37-40 (2000).

[6] L. Lovász: *Random Walks on Graphs:* A Survey, / in: Combinatorics, Paul Erdős is Eighty, **Vol. 2** (ed. D. Miklós, V. T. Sós, T. Szőnyi), János Bolyai Mathematical Society, Budapest, 1996, 353-398.

[7] J. Cserti, Gy. Dávid, A. Piróth: *Perturbation of infinite network of resistors,* Am. J. Phys. **70,** 153-159 (2002).

[8] Gáspár Merse Előd: *Végtelen ellenálláshálózatok számítása,* TDK dolgozat (2002).

[9] F. Y. Wu: *The Potts-modell,* Rev. Mod. Phys. **54,** 235-267 (1982).

[10] J. Boksiner, P. L. Leath: *Dynamics of dielectric breakdown paths,* Physical Review **67,** 066610 (2003).