# Lézerspektroszkópia ritkaföldfémekkel adalékolt egykristályokban

Fizika BSc szakdolgozat

### Sinkovicz Péter

az ELTE TTK Fizika BSc hallgatója

Témavezetők:Kis Zsolt, Mandula GáborMTA Szilárdtestfizikai és Optikai Kutatóintézet1121 Budapest, Konkoly-T. Miklós út 29-33.

Tanszék:

ELTE TTK Fizikai Intézet Komplex Rendszerek Fizikája Tsz.

Budapest, 2010 május

# Tartalomjegyzék

1.	1. Előszó				5		
I.	I. Atomi átmenetek külső tér hatására				7		
2.	2. Atomok mozgásegyenlete elektromágneses térben				9		
	2.1. Hatás elektromágneses térben				. 9		
	2.1.1. Szabad részecske relativisztikus hatása				. 9		
	2.1.2. Részecske és elektromágneses tér kölcsönhatásánal	k hatása .			. 10		
	2.2. Lagrange függvény elektromágneses térben				. 10		
	2.3. Mozgásegyenlet elektromágneses térben				. 11		
	2.4. Töltött részecske Hamilton-operátora elektromágneses térb	ben			. 11		
	2.4.1. A kölcsönhatási tag dipól közelítése				. 12		
	2.5. Rabi-modell				. 14		
3.	3. Elektromágneses tér kvantálása				21		
	3.1. Kvantált vektorpotenciál				. 21		
	3.2. Kvantált tér energiája				. 22		
1	1 Fotopok abszornejója ós omissziója				25		
ч.	4.1 $\hat{H}_{\perp}$ kölcsönhatási kénben				25		
	4.1. $\Pi_{a+s}$ kolesonnatasi kepeen $\dots \dots \dots$				· 23		
	42.1  0 közelítés				. 27		
	42.2 1 közelítés			•••	· 20 28		
	4.2.3. A $H_{kh}^{kh}$ mátrixelem kiszámítása				. 28		
	4.2.4. Az emisszió valószínűsége				. 29		
	4.2.5. Spontán emissziós ráta				. 30		
	4.3. Abszorpció				. 31		
	4.4. Einstein-koefficiensek				. 32		
	4.5. Weisskopf-Wigner elmélet				. 33		
II.	II. Mérések, Szimulációk				35		
5.	5. A mérés összefoglalása				37		
6	6 Akuszta-ontikai modulátor	A kuszta antikai madulátar					
0.	6.1 Flméleti összefoglaló				<b>4</b> 1		
	6.1. Enheren osszerogiaro			•••	. <del>1</del> 1 <u>1</u> 3		
	6.21 Bragg szög meghatározása		• • •	•••	5		
	0.2.1. Drugg blog mognaturolaba		• • •	•••	5		

		6.2.2.	Frekvencia-karakterisztika						
	6.3.	A méré	s kiértékelés						
		6.3.1.	Lézer adatainak meghatározása						
		6.3.2.	Számolt és mért Bragg-szög összehasonlítása						
		6.3.3.	Szög-karakterisztika kísérleti ellenőrzése 47						
7.	Macskaszem összeállítás 49								
	7.1.	Optikai	elemek paraxiális közelítésben						
	7.2.	Szabad	terjedés átviteli mátrixa						
	7.3.	Vékony	y lencse átviteli mátrixa						
		7.3.1.	Ferde tükör átviteli mátrixa						
	7.4.	A szim	uláció eredményei						
		7.4.1.	Jól beállított tükör						
		7.4.2.	Ferdén beállított tükör						
		7.4.3.	Teljes perturbáció						
8.	Szat	urációs	spektroszkópia 61						
	8.1.	Elméle	ti háttér						
		8.1.1.	Master-egyenlet						
		8.1.2.	Master-egyenlet két-állapotú rendszerre						
		8.1.3.	Hullámterjedés polarizálható közegben						
	8.2.	Mérés							
		8.2.1.	A várható jelalak meghatározása						
		8.2.2.	$T_2$ becslése Z-scan módszerrel						
		8.2.3.	$\overline{T_1}$ becslése						

### 1. fejezet

# Előszó

Előkészítve az MTA SZFKI Kristályfizikai Osztályán tervezett koherens kontroll kísérleteket, az erbium (Er) egy adott spektrumvonalának kiszélesedését tanulmányoztam egy Er-mal adalékolt lítium-niobát (LiNbO<sub>3</sub>) egykristályban. Kristályszerkezetileg az adalékolás a következőképpen történt:



Tehát az egykristály néhány (minden ~  $10^5$ -dik) Li<sup>+</sup> atomja helyett egy szubsztitúciós Er<sup>3+</sup> került, ami kötést létesített három elektronjával (kettő külső és egy törzs elektron). Így egy háromszorosan töltött Er<sup>3+</sup> jelenik meg a kristályban az egyszeresen töltött Li<sup>+</sup> helyett, ami a töltéshiánya miatt kristályhibákat idéz elő.

Az előbb említett adalékolt kristályszerkezetből adódó hatások az Er spektrumában is észrevehetőek, azaz az egykristályban kötött Er más spektrumot mutat mint a szabadon, mivel a kristálytér a degenerált energianívókat felhasítja, a természetes vonalszélességet kiszélesíti (kölcsönhatás a fononokkal), és inhomogén vonalkiszélesedést is okoznak az Er ion körül kialakuló hibahelyek. Ez látható a következő ábrán, ahol pirossal van feltüntetve az általunk vizsgált átmenethez tartozó vonal, sárgára van festve az egyes nívók homogén vonalai és kékkel az inhomogén vonalkiszélesedés burkolója:



Az Er általunk vizsgált átmenete 980 nm-es tartományba esik, ebben a tartományban három átmenet található, ebből mi a 980.5 nm-es csúcshoz tartozó átmenetet gerjesztettük, egy diódalézer segítségével. A rezonancia feltételnek megfelelően a lézer és az átmenethez tartozó frekvencia közel azonos. Az Er vizsgált spektrum tartománya a következő ábrákon látható:



A diplomamunka célja, hogy a telítési lézerspektroszkópia kísérletet végezzünk LiNbO<sub>3</sub>-ban az adalék Er ionok 980.5nm körüli inhomogénan kiszélesedett spektrumvonalán. Ezen kívül megbecsüljük a gerjesztett állapot élettartamát.

# I. rész

# Atomi átmenetek külső tér hatására

### 2. fejezet

# Atomok mozgásegyenlete elektromágneses térben

### 2.1. Hatás elektromágneses térben

Elektromágneses térben mozgó töltött részecskére a hatás két összetevőből származik: a szabad részecskére vonatkozó hatásból és a részecske és az erőtér közti kölcsönhatásból.

$$S = S_{sz} + S_{r+e}. (2.1)$$

#### 2.1.1. Szabad részecske relativisztikus hatása

A fizikában megvalósuló folyamatok, a legkisebb hatás mentén történnek, így a hatásnak invariánsnak kell lennie a Lorenzt transzformációra [1]. A legegyszerűbb invariáns mennyiség az ívhossz, tehát tegyük fel, hogy a szabad részecske hatása arányos az ívhosszal, az arányossági tényezőt pedig jelöljük  $\alpha$ -val:

$$S_{sz} = -\alpha \int_{a}^{b} ds \,. \tag{2.2}$$

Már csak az a dolgunk, hogy  $\alpha$ -t meghatározzuk. Induljunk ki abból, hogy a Lagrange függvény idő szerinti integrálja megegyezik a hatással és alakítsuk át a (2.2) összefüggést úgy, hogy abból leolvashassuk a Lagrange függvényt,

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t') dt' = S = -\alpha \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{dt'} dt'.$$
(2.3)

Felhasználva az ívhossz definícióját, miszerint:

$$s_{2,1} := \sqrt{c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2},$$
(2.4)

a (2.3) kifejezésben elvégezhetjük a deriválást:

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t') dt' = -\alpha \int_{t_1}^{t_2} c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt'.$$
(2.5)

Kis sebességre ( $v \ll c$ ) a négyzetgyök sorbafejthető:

$$L(x,t) = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \simeq -\alpha c + \alpha c \left(\frac{v^2}{2c^2}\right).$$
(2.6)

A fenti képletben szereplő konstans tag nem változtatja meg a mozgásegyenleteket. A második tagnak pedig,  $c \to \infty$  határesetben a klasszikus Lagrange függvénybe kell átmennie, így:

$$\alpha = mc. \tag{2.7}$$

#### 2.1.2. Részecske és elektromágneses tér kölcsönhatásának hatása

Korántsem evidens, hogy miért írható fel a (2.9) módón a hatásnak ez a tagja, de a kísérletek, megfigyelések ezt alátámasszák. Legyen a négyes elektromágneses potenciálnak az első komponense a skalárpotenciál és az utolsó három komponense pedig a vektorpotenciál:

$$A^{\mu} := \left[\phi, \vec{A}\right]^{\mu} . \tag{2.8}$$

A négyes potenciál segítségével a e töltésű részecske és erőtér kölcsönhatásának a hatása:

$$S_{r+e} := -e \int A^{\mu} dx_{\mu} \,. \tag{2.9}$$

Tehát az elektromágneses térben lévő töltött részecske hatásfüggvénye:

$$S = \int_{a}^{b} \left( -mcds - eA^{\mu}dx_{\mu} \right) \,. \tag{2.10}$$

### 2.2. Lagrange függvény elektromágneses térben

Számoljunk c = 1 egységekben. Hasonló meggondolások alapján mint az előbb most is meghatározhatjuk a rendszer Lagrange függvényét:

$$S = \int Ldt, \qquad (2.11)$$

A hatás (2.10)-ben leírt alakját alakítsuk át (2.11) alakra:

$$S = -m \int ds - e \int A^{\mu} dx_{\mu} = -m \int ds - e \int \phi dt + e \int A dx$$
$$= -m \int \frac{ds}{dt} dt - e \int \phi dt + e \int A \frac{dx}{dt} dt$$
$$= -m \int \left(\sqrt{1 - v^2} - e \phi + e Av\right) dt.$$
(2.12)

Tehát a Lagrange függvény:

$$L = -m\sqrt{1 - v^2} + eAv - e\phi, \qquad (2.13)$$

ami kis sebességekre – ezt fogjuk majd használni –, azaz nem relativisztikus mozgásoknál  $(v \ll 1)$ , a gyökös kifejezés sorba fejthető és a konstans tag elhagyásával azt kapjuk:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + eAv - e\phi.$$
 (2.14)

### 2.3. Mozgásegyenlet elektromágneses térben

A mozgásegyenleteinket, a Lagrange-féle, variációs elven alapuló egyenletek adják [2]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} - \frac{\partial L}{\partial r_i} = 0.$$
(2.15)

Ha ide behelyettesítjük a (2.14)-ban meghatározott Lagrange függvényt, akkor megkaphatjuk a Lorentz erővel kifejezett Newton egyenletet:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m\dot{r} + eA\right) = -e\left[\nabla\phi - \nabla\left(\dot{r}A\right)\right],\qquad(2.16)$$

a kifejtési tételt

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \left(\vec{a}\vec{c}\right) - \left(\vec{a}\vec{b}\right)\vec{c}, \qquad (2.17)$$

felhasználva és Coulomb mértékben számolva ( $\nabla A = 0$ ):

$$m\ddot{r} + e\dot{A} = -e\left[\nabla\phi - \nabla\left(\dot{r}A\right)\right] = -e\left[\nabla\phi - \nabla\left(\dot{r}A\right) - \dot{r}\left(\nabla A\right)\right]$$
$$m\ddot{r} = e\left[-\nabla\phi - \dot{A} + \dot{r} \times (\nabla \times A)\right] = e\left(E + \dot{r} \times B\right) = F_{\text{Lorentz}} \,. \tag{2.18}$$

### 2.4. Töltött részecske Hamilton-operátora elektromágneses térben

Klasszikus mechanikából ismert, hogy egy rendszer Hamilton-függvényét a következőképpen állíthatjuk elő a Lagrange függvényéből, általános-impulzusai és koordinátái segítségével:

$$H = \sum_{i} \dot{r}_{i} p_{i} - L, \qquad (2.19)$$

ahol L-t a (2.14) összefüggést definiálja, és belőle származtathatjuk az általános impulzusokat:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = m\dot{r}_i + eA_i \,. \tag{2.20}$$

Így a Hamilton-függvény

$$H = (m\dot{r} + eA)\dot{r} - \left(\frac{1}{2}mv^2 - e\phi + e\dot{r}A\right) = \frac{1}{2}mv^2 + e\phi$$
$$= \frac{1}{2m}(p - eA)^2 + e\phi.$$
(2.21)

Most kvantáljuk a kanonikusan konjugált  $\{r_i, p_i\}$  dinamikai változókat, így megkapjuk a (2.21)ből előállított Hamilton-operátort:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left( \hat{p} - eA \right)^2 + e\phi = \frac{1}{2m} \left( -i\hbar\nabla - eA \right)^2 + e\phi \,. \tag{2.22}$$

Ezt írjuk be a Schrödinger egyenletbe (hogy lássuk hogyan hat a  $\psi$ -re, és elvégezhessük a négyzetre emelést), amely megadja a rendszer mozgásegyenletét:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi. \qquad (2.23)$$

A Hamilton-operátorban szereplő négyzetes tagot kifejtjük:

$$\hat{H}\psi = \left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - eA\right)^{2} + e\phi\right]\psi$$

$$= \left[\frac{1}{2m}\left(-\hbar^{2}\nabla^{2} + e^{2}A^{2} + i\hbar\nabla eA + i\hbar eA\nabla\right) + e\phi\right]\psi$$

$$= -\frac{\hbar^{2}}{2m}\nabla^{2}\psi + \frac{e^{2}}{2m}A^{2}\psi + e\phi\psi + \frac{i\hbar e}{2m}\left(\nabla A + A\nabla\right)\psi, \qquad (2.24)$$

amit egyszerűbb alakra hozhatunk, mivel az utolsó tag teljes divergenciás részében a Coulomb mérték miatt vannak további eltűnő tagok:

$$\nabla (A\psi) + A (\nabla \psi) = [A (\nabla \psi) + (\nabla A) \psi] + A (\nabla \psi) = 2A (\nabla \psi) .$$
(2.25)

Így a Schrödinger egyenlet:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + e\phi\psi + \frac{i\hbar e}{m}A\left(\nabla\psi\right) + \frac{e^2}{2m}A^2\psi.$$
(2.26)

Az utolsó tag arányos  $e^2 A^2$ -tel, ezért elhanyagolható, ha nem túl erős elektromágneses teret vizsgálunk, így:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\hat{H}_a + \hat{H}_{a+s}\right)\psi, \qquad (2.27)$$

ahol  $\hat{H}_a$  a skalárpotenciálban mozgó részecske Hamilton-operátora (H atom) és  $\hat{H}_{a+s}$  a kölcsönhatási tag:

$$\hat{H}_a = \frac{\hat{p}^2}{2m} + e\phi,$$
 (2.28a)

$$\hat{H}_{a+s} = -\frac{e}{m}A\hat{p}.$$
(2.28b)

#### 2.4.1. A kölcsönhatási tag dipól közelítése

Vizsgáljunk egy két-állapotú rendszert, ahol  $|g\rangle$  jelölje az alapállapotot és  $|e\rangle$  a gerjesztett állapotot. És jelöljük  $\hat{H}_a$  sajátértékeit ezen a bázison a következőképpen:

$$H_a |g\rangle = \epsilon_g |g\rangle , \qquad (2.29a)$$

$$\ddot{H}_a |e\rangle = \epsilon_e |e\rangle$$
 . (2.29b)

Számítsuk ki  $\hat{H}_{a+s}$  mátrixelemeit. A diagonális elemek eltűnnek:

$$\langle g|A\hat{p}|g\rangle \simeq A\langle g|\hat{p}|g\rangle = 0,$$
 (2.30a)

$$\langle e|A\hat{p}|e\rangle \simeq A\langle e|\hat{p}|e\rangle = 0,$$
 (2.30b)

mivel feltesszük, hogy *A* az atomi méretekhez képest lassan változik továbbá, hogy a hullámfüggvények párosak vagy páratlanok, tehát a deriváltjuk páratlan/páros, így egy nulla körüli intervallumon kell egy párosszor páratlan függvényt integrálni, ami nullát ad. A nem-diagonális elemekre kapjuk:

$$\langle e|A\hat{p}|g\rangle \simeq A\langle e|\hat{p}|g\rangle = A\langle e|m\dot{r} + eA|g\rangle \simeq A\langle e|m\dot{r}|g\rangle .$$
(2.31)

Tetszőleges fizikai operátor időbeli fejlődése felírható az operátor és a Hamilton-operátor kommutátorának segítségével. A Schrödinger és a Heinsenberg képben vett hullámfüggvények:

$$\psi(r,t)^{S} = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\psi(r,0)$$
 (2.32a)

$$\psi(r,0)^H = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\psi(r,t)$$
(2.32b)

Schrödinger képben egy B fizikai mennyiséget leíró operátort a következőképpen transzformálhatunk át Heinsenberg képbe:

$$\begin{aligned} \langle \psi^{S} | \hat{B} | \psi^{S} \rangle &= \langle \psi^{S} | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{B}^{S} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} | \psi^{S} \rangle \\ &= \langle \psi^{H} | e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{B}^{S} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} | \psi^{H} \rangle . \end{aligned}$$

$$(2.33)$$

Így

$$\hat{B}^H = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{B}^S e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}.$$
(2.34)

Ennek az időbeli megváltozása:

$$i\hbar\frac{\partial\hat{B}^{H}}{\partial t} = i\hbar\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}\hat{B}^{H} - \frac{i}{\hbar}\hat{B}^{H}\hat{H} + e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\frac{\partial\hat{B}^{S}}{\partial t}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\right).$$
(2.35)

Ha  $\hat{B}^S$  nem függ explicite az időtől, akkor

$$i\hbar \frac{\partial \hat{B}^{H}}{\partial t} = \left[\hat{B}^{H}, \hat{H}\right].$$
(2.36)

Ezt alkalmazva a (2.31) egyenletben szereplő a  $\dot{r}$ -re:

$$i\hbar\dot{r} = \left[r, \hat{H}_a + \hat{H}_{a+s}\right] = \left[r, \hat{H}_a\right] - \frac{e}{m}\left[r, A\hat{p}\right] = \left[r, \hat{H}_a\right] - \frac{e}{m}i\hbar A, \qquad (2.37)$$

melyet átrendezve:

$$\dot{r} = -\frac{i}{\hbar} \left[ r, \hat{H}_a \right] - \frac{e}{m} A \,. \tag{2.38}$$

Így tehát a nem-diagonális mátrixelemek a következőképpen írhatók:

$$A\langle e|m\dot{r}|g\rangle = -A\langle e|m\left(\frac{i}{\hbar}\left[r,\hat{H}_a\right] + \frac{e}{m}A\right)|g\rangle , \qquad (2.39a)$$

$$A\langle e|m\dot{r}|g\rangle = -A\langle e|\frac{i}{\hbar}m\left[r,\hat{H}_{a}\right] + eA|g\rangle .$$
(2.39b)

Felhasználva, hogy A lassan változik, megint kiemelhető az integrál elé és a két állapot ortogonális egymásra, így a második tag járuléka 0,

$$A\langle e|m\dot{r}|g\rangle = -\frac{i}{\hbar}mA\langle e|r\hat{H}_a - \hat{H}_a r|g\rangle .$$
(2.40)

Használjuk fel a (2.29a) és (2.29b)-ben leírt hatását a  $H_a$ -nak

$$A\langle e|m\dot{r}|g\rangle = -\frac{i}{\hbar}mA\left(r_{eg}\epsilon_g - \epsilon_e r_{eg}\right) = imA\omega_{eg}r_{eg}\,,\tag{2.41}$$

ahol  $\omega_{eg} = \frac{\epsilon_e - \epsilon_g}{\hbar}$  és  $d_{eg} = e \langle e | r | g \rangle$ . Tehát (2.28b)-ben szereplő  $H_{a+s}$  mátrix:

$$\hat{H}_{a+s} = \begin{bmatrix} 0 & i\omega_{eg}Ad_{ge} \\ -i\omega_{eg}Ad_{eg} & 0 \end{bmatrix}.$$
(2.42)

Egy másik lehetőség a dipól közelítés bevezetésére az elektromágneses tér potenciáljainak mértéktranszformációja. Legyen  $\chi(r, t)$  egy differenciálható függvény. Ekkor a

$$A' = A + \nabla \chi, \qquad (2.43a)$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}, \qquad (2.43b)$$

transzformációkkal a megfigyelhető E és B nem változnak, mivel

$$E = E' = -\nabla \phi' - \frac{\partial A'}{\partial t},$$
 (2.44a)

$$B = B' = \nabla \times A'. \tag{2.44b}$$

Dipól közelítésben a vektorpotenciál a töltött részecske hullámfüggvényének kiterjedésén lassan változik r-ben, tehát feltesszük, hogy A = A(R, t), ahol R a rendszer tömegközéppontjának a koordinátája. Válasszuk a  $\chi(r, t) = -A(R, t) \cdot r$  függvényt. Ekkor a transzformált A'-re igaz, hogy  $A' = A + \nabla \chi = 0$ , valamint

$$\phi' = \phi + r \frac{\partial A}{\partial t} = \phi - r E_T, \qquad (2.45)$$

ahol  $E_T$  az elektromos térerősség transzverz komponense. A  $\phi'$  és A' mennyiségeket behelyettesítve a (2.22) Hamilton-operátorba kapjuk:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + e\phi - erE_T \,. \tag{2.46}$$

A továbbiakban használjuk a  $E_T \equiv E$  jelölést. A fenti Hamilton-operátorban a kölcsönhatási tag mátrixa két-állapotú rendszer esetén a következő:

$$\hat{H}_{a+s} = \begin{bmatrix} 0 & -Ed_{ge} \\ -Ed_{eg} & 0 \end{bmatrix}.$$
(2.47)

A (2.42) és (2.47) kölcsönhatási mátrixok különbözőek. Később látni fogjuk, hogy forgó hullámú közelítésben, közel rezonáns gerjesztés esetén a kettő majdnem egybeesik.

### 2.5. Rabi-modell

Ebben a fejezetben való számolás során használjuk a hullámfüggvény együtthatóiból képzett bázisokat

$$|\psi\rangle = c_g |g\rangle + c_e |e\rangle \Leftrightarrow \begin{bmatrix} c_g \\ c_e \end{bmatrix},$$
 (2.48)

és ebben írjuk fel a Schrödinger egyenletet:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} c_g\\ c_e\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_g & -Ed_{ge}\\ -Ed_{eg} & \epsilon_e\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_g\\ c_e\end{bmatrix}.$$
 (2.49)

Valamint térjünk át Schrödinger képről kölcsönhatásira

$$\psi^{kh} := e^{\frac{i}{\hbar}H_a t} \psi^S. \tag{2.50}$$

Vegyük ennek az idő deriváltját amiből meghatározhatjuk, hogy hogyan transzformálódott át a  $H_{a+s}$  a kölcsönhatási képbe való áttérés során.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{a}t}\psi^{S} = i\hbar\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{a}\psi^{kh} + e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{a}t}\frac{\partial}{\partial t}\psi^{S}\right)$$
$$= -\hat{H}_{a}\psi^{kh} + e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{a}t}\left[\left(\hat{H}_{a} + \hat{H}_{a+s}\right)e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{a}t}e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{a}t}\psi^{S}\right]$$
$$= -e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{a}t}dEe^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{a}t}\psi^{kh} := H^{kh}_{a+s}\psi^{kh}$$
(2.51)

Ha a tér harmonikusan változik:

$$E := E_0 \cos(\omega_k t) = \frac{1}{2} E_0 \left( e^{i\omega_k t} + e^{-i\omega_k t} \right),$$
(2.52)

akkor a Schrödinger egyenlet kölcsönhatási képben:

$$i\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} b_g \\ b_e \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\Omega^* \cos\left(\omega_k t\right) e^{-i\omega_{eg}t} \\ -\Omega \cos\left(\omega_k t\right) e^{i\omega_{eg}t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_g \\ b_e \end{bmatrix},$$
(2.53)

ahol $\Omega=\frac{d_{eg}E_0}{\hbar}$ a Rabi-frekvencia. Az egyenletet numerikusan, a Runge-Kutta módszerrel megoldva meghatároztam  $b_g$  és  $b_e$ időfüggését a  $b_g(0)=1$  és  $b_e(0)=0$  kezdeti feltétel esetén. A $P_g=|b_g(t)|^2$  és $P_e=|b_e(t)|^2$ valószínűségeket mutatja a következő ábra:



### Forgóhullámú közelítés - fénnyel együtt forgó koordinátarendszer

Mint ahogy azt láttuk, a teljes Hamilton-operátort egy atomi és egy tér és atom közti kölcsönhatást leíróra lehet bontani:

$$\hat{H} = \hat{H}_a + \hat{H}_{a+s} = \hat{H}_a - \vec{d}\vec{E},$$
(2.54)

ahol  $E = \frac{1}{2}E_0 \left(e^{i\omega_k t} + e^{-i\omega_k t}\right)$ . Térjünk át megint kölcsönhatási képre:

$$\psi^{kh} = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_a t}\psi, \qquad (2.55)$$

$$\hat{H}_{a+s}^{kh} = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{a}t}\hat{H}_{a+s}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{a}t}.$$
(2.56)

Ha a  $H_{a+s}^S$  a következő alakú:

$$\hat{H}_{a+s} = -\frac{1}{2} E_0 \left( e^{i\omega_k t} + e^{i\omega_k t} \right) \left( d_{ge} \left| g \right\rangle \left\langle e \right| + d_{eg} \left| e \right\rangle \left\langle g \right| \right), \tag{2.57}$$

akkor a kölcsönhatási képben a következőképpen néz ki:

$$\hat{H}_{a+s}^{kh} = -\frac{1}{2} E_0 \left( e^{i\omega_k t} + e^{-i\omega_k t} \right) \left( d_{ge} e^{-i\omega_{eg} t} \left| g \right\rangle \left\langle e \right| + d_{eg} e^{i\omega_{eg} t} \left| e \right\rangle \left\langle g \right| \right), \tag{2.58}$$

Jelöljük  $\Delta$ -val az az atomi energiaszintek és a tér és közti elhangolást  $\Delta = \omega_{eg} - \omega_k$ , és most végezzük el a forgóhullámú közelítést (Rotating Wave Approximation, RWA), a közelítéssel nem okozunk nagy hibát, amennyiben  $\Delta, \Omega \ll \omega_{eg}$ :

$$\hat{H}_{a+s}^{kh} \simeq -\frac{1}{2} E_0 \left( d_{ge} e^{-i\Delta t} |g\rangle \langle e| + d_{eg} e^{i\Delta t} |e\rangle \langle g| \right) 
= -\frac{\hbar}{2} \left[ \begin{array}{c} 0 & \Omega^* e^{-i\Delta t} \\ \Omega e^{i\Delta t} & 0 \end{array} \right].$$
(2.59)

A fénnyel együtt forgó koordinátarendszer bázisaiban kifejtett  $\psi$ -t jelöljük  $\psi^{RWA}$ -vel. A hullámfüggvény és a Hamilton-operátor transzformációját hasonló összefüggések adják, mint amikor a kölcsönhatási képre tértünk át:

$$\left|\psi^{RWA}\right\rangle = e^{-i\Delta t|e\rangle\langle e|}\psi^{kh} = \hat{U}\psi^{kh}$$
(2.60)

 ${\cal H}^{RWA}\mbox{-t}$ ugyanolyan módon határozhatjuk meg, mint ahogy az eddigi bázisváltásokkor.

$$\hat{H}_{a+s}^{RWA} = \hbar\Delta |e\rangle \langle e| + \hat{U}\hat{H}_{a+s}^{kh}\hat{U}^{\dagger} 
= \hbar\Delta |e\rangle \langle e| + \frac{\hbar\Omega^{*}}{2} |g\rangle \langle e| + \frac{\hbar\Omega}{2} |e\rangle \langle g|$$
(2.61)

$$= \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\Omega^* \\ -\Omega & 2\Delta \end{bmatrix}.$$
(2.62)

Ha most együtt ábrázoljuk a RWA és az előző módszer megoldását, akkor jól láthatjuk hogy míg teljesül a  $\Delta, \Omega \ll \omega_{eg}$  feltételek addig a közelítés jónak bizonyul:



Ha azonban elrontjuk ezt az arányt, azaz nem teljesítjük a feltételeket, akkor a közelítésünk értelmét veszti, ezt mutatják a következő ábrák:

Először nézzük meg hogyan változik a két megoldás, ha külön-külön szegjük meg a közelítési feltételeket.







### 3. fejezet

# Elektromágneses tér kvantálása

Az atom+fény csatolt rendszer leírásához térjünk át a tér kvantált leírására. Az elektromágneses tér dinamikáját a Maxwell-egyenletek írják le. Induljunk ki az üres (anyag nélküli) teret leíró egyenletekből:

$$\nabla \times E_T = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \nabla \times H = \varepsilon_0 \frac{\partial E_T}{\partial t}, 
\nabla E_T = 0, \quad \nabla H = 0,$$
(3.1)

ahol  $E_T$  azt jelőli, hogy üres térben a az elektromos mezőnek csak transzverz komponense van.

### 3.1. Kvantált vektorpotenciál

A két térerősség divergenciájára vonatkozó összefüggésből következik, hogy  $\exists A(r,t)$  vektorpotenciál, ami segítségével felírhatjuk E(r,t) és H(r,t)-t, a (3.2) összefüggés teremt kapcsolatot a térerősségek és a vektorpotenciál között.

$$E_T = -\frac{\partial A}{\partial t} \qquad H = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times A$$
(3.2)

A(r, t)-t bontsuk fel k hullámvektorú síkhullámok szerint:

$$A(r,t) = \sum_{k,\sigma} \left[ A_{k,\sigma}(t)e^{ikr} + c.c. \right], \qquad (3.3)$$

ahol  $\sigma$  a két irányban lévő polarizáción fut, és a c.c. a komplex konjugált

$$\left(A_{k,\sigma}(t)e^{ikr}\right)^* = A_{k,\sigma}^*(t)e^{-ikr}.$$
(3.4)

A tér kvantálását úgy valósítjuk meg, hogy a teret nagy téglatestekre bontjuk, a téglatestek határán periodikus határfeltételt szabunk. Az egyszerűség kedvéért legyen egy L oldalélű kockánk a téglatest helyett. Ekkor a periodikus határfeltétel azt jelenti, hogy

$$A(r) = A(r+L), \tag{3.5}$$

Ezen feltételből adódik, hogy k csak diszkrét értékeket vehet fel, mégpedig:

$$k_i = \frac{2\pi}{L} n_i, \qquad i = \{x, y, z\}, \qquad n_i \in \mathbb{Z}.$$
 (3.6)

Coulomb (transzverz) mértékben teljesülnie kell, hogy  $\nabla A = 0$ . Ez a síkhullám felbontásban azt jelenti, hogy

$$\sum_{k,\sigma} \left[ ikA_{k,\sigma}(t)e^{ikr} + c.c. \right] = 0.$$
(3.7)

Amiből következik, hogy  $A_k \perp k$ .

A gerjesztési- és Faraday-törvényből következik, hogy Coulomb mértékben A(r, t)-nak ki kell elégítenie a Dalambert-féle hullámegyenletet:

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0.$$
(3.8)

Ha most beírjuk A(r, t) (3.3) egyenletben felírt alakját a (3.8)-etbe:

$$\sum_{k,\sigma} \left[ \left( -k^2 \right) A_{k,\sigma}(t) e^{ikr} + c.c. \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ A_{k,\sigma}(t) e^{ikr} + c.c. \right] = 0.$$
(3.9)

Az  $e^{ikr}$ -ek bázist alkotnak (minden k-ra más értéket vesznek fel), így a (3.9) egyenlet minden k-ra teljesül:

$$k^2 A_{k,\sigma} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_{k,\sigma}}{\partial t^2} = 0.$$
(3.10)

Az (3.10) egyenletet megoldva és a diszperziós relációt ( $\omega_k = kc$ ) felhasználva, a következő exponenciális időfüggés adódik A(t)-ra:

$$A_{k,\sigma}(t) = A_{k,\sigma}e^{-i\omega_k t}.$$
(3.11)

A '-' előjelet azért válasszuk, mert ekkor k irányba haladó síkhullámokra bontjuk A-t. Tehát A(r, t)-ra a követetkezőt kapjuk:

$$A(r,t) = \sum_{k,\sigma} \left( A_{k,\sigma} e^{ikr - i\omega_k t} + c.c. \right) .$$
(3.12)

### 3.2. Kvantált tér energiája

Ugyancsak a Faraday és a gerjesztési-törvényből következik, hogy a V térfogatban tárolt energiát a következőképpen számolhatjuk ki [2]:

$$\epsilon_k = \frac{1}{2} \int_{V=L \times L \times L} dV \left( \epsilon_0 \overline{E_k^2} + \mu_0 \overline{H_k^2} , \right), \qquad (3.13)$$

ahol a felülvonás az időátlagot jelöli. A rövidség kedvéért bevezettük a  $k = \{\vec{k}, \sigma\}$  jelölést. A térfogatban tárolt energiáját fejezzük ki a vektorpotenciál segítségével! Ehhez előtte határozzuk meg, hogy hogyan írható fel a térerősségek a vektorpotenciál segítségével.

1. A k módushoz tartozó elektromos térerősség a vektorpotenciállal kifejezve:

$$E_k = \left(i\omega_k A_k e^{ikr - i\omega_k t} + c.c.\right) \tag{3.14}$$

2. Mágneses térerősség a vektorpotenciállal kifejezve:

$$H_{k} = \frac{1}{\mu_{0}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_{x} & \partial_{y} & \partial_{z} \\ A_{x} & A_{y} & A_{z} \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_{0}} \begin{pmatrix} \partial_{y}A_{z} - \partial_{z}A_{y} \\ \partial_{z}A_{x} - \partial_{x}A_{z} \\ \partial_{x}A_{y} - \partial_{y}A_{x} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\mu_{0}} \begin{pmatrix} (ik_{y}A_{z}e^{-i\omega_{k}t+ikr} + c.c) - (ik_{z}A_{y}e^{-i\omega_{k}t+ikr} + c.c) \\ (ik_{z}A_{x}e^{-i\omega_{k}t+ikr} + c.c) - (ik_{x}A_{z}e^{-i\omega_{k}t+ikr} + c.c) \\ (ik_{x}A_{y}e^{-i\omega_{k}t+ikr} + c.c) - (ik_{x}A_{x}e^{-i\omega_{k}t+ikr} + c.c) \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\mu_{0}} \begin{pmatrix} ik_{y}A_{z}e^{-i\omega_{k}t+ikr} - ik_{z}A_{y}e^{-i\omega_{k}t+ikr} \\ ik_{z}A_{x}e^{-i\omega_{k}t+ikr} - ik_{x}A_{z}e^{-i\omega_{k}t+ikr} \\ ik_{x}A_{y}e^{-i\omega_{k}t+ikr} - ik_{x}A_{x}e^{-i\omega_{k}t+ikr} \end{pmatrix} + c.c.$$
(3.15)

Vezessük be a következő jelölést, hogy tömörebben írhassuk a (3.15) kifejezést. Legyen:

$$A_{k}^{(+)} := A_{k}e^{-i\omega_{k}t + ikr} \qquad A_{k}^{(-)} := \left(A_{k}^{(+)}\right)^{*}$$
(3.16)

Így a (3.15) kifejezést a következőképpen írhatjuk fel:

$$H_k = ik \times A_k^{(+)} + c.c.$$
 (3.17)

Tehát a (3.14) és a (3.17) egyenlet segítségével a két térerősség négyzetének az időátlaga:

$$\overline{E_k^2} = 2\omega_k^2 A_k^{(+)} A_k^{(-)}$$
(3.18a)

$$\overline{H_k^2} = 2k^2 \frac{1}{\mu_0^2} A_k^{(+)} A_k^{(-)}, \qquad (3.18b)$$

A V térfogatban tárolt energia pedig:

$$\epsilon_k = V\left(\omega_k^2 \varepsilon_0 + \frac{k^2}{\mu_0}\right) A_k^{(+)} A_k^{(-)} .$$
(3.19)

Felhasználva, hogy  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$  és a diszperziós relációt, a (3.19) tovább alakítható:

$$\epsilon_k = 2\varepsilon_0 V A_k^{(+)} A_k^{(-)} \omega_k^2, \qquad (3.20)$$

Innen a kvantált tér Hamilton-operátorának megkapása már csak két lépés. Bontsuk fel a vektorpotenciált valós és képzetes részre és hajtsunk végre egy egyszerű átskálázást rajta, hogy a végső összefüggésünk az energiára szemléletesebb legyen.

$$A_k^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{4\varepsilon_0 V \omega_k^2}} \left(\omega_k Q_k + iP_k\right) e_k , \qquad (3.21)$$

ahol $e_k\equiv \vec{e}_{\vec{k},\sigma}$ egy polarizációs egységvektor, melyre teljesül, hogy  $k\cdot e_k=0.$ Így

$$A_k^{(+)}A_k^{(-)} = \frac{1}{4\varepsilon_0 V \omega_k^2} \left(\omega_k^2 Q_k^2 + P_k^2\right).$$
(3.22)

A V térfogatban tárolt energia az új mennyiségekkel kifejezve:

$$\epsilon_k = \frac{1}{2} \left( \omega_k^2 Q_k^2 + P_k^2 \right). \tag{3.23}$$

A  $\{Q_k, P_k\}$  kanonikusan konjugált mennyiségeket operátorokra cseréljük és ezzel megkapjuk a kvantált tér Hamilton-operátorát:

$$\hat{H}_{sug} = \frac{1}{2} \sum_{k} \hat{H}_{k} = \frac{1}{2} \sum_{k} \left( \hat{P}_{k}^{2} + \omega_{k}^{2} \hat{Q}_{k}^{2} \right), \qquad (3.24)$$

A k módus Hamilton-operátora ekvivalens a harmonikus oszcillátor Hamilton-operátorával. Ezért, a harmonikus oszcillátorral analóg módon:

1. 
$$\left[\hat{Q}, \hat{P}\right] = i\hbar$$

2.  $\hat{H}_k |\psi_{k,n}\rangle = \hbar \omega_k (n+1/2) |\psi_{k,n}\rangle$ 

### 4. fejezet

# Fotonok abszorpciója és emissziója

Legyen a vizsgálni kívánt rendszer két-szintű:



ahol  $\omega_{eg}$  a két állapot közti átmenet frekvenciája,  $\omega_k$  a külső tér frekvenciája,  $\Delta$  az elhangolás. Az atom + kvantált tér zárt rendszert alkot, melynek teljes Hamilton-operátora:

 $\hat{H}_{tot} = \hat{H}_a + \hat{H}_{sug} + \hat{H}_{a+s}, \tag{4.1}$ 

ahol

$$\hat{H}_a = \frac{p^2}{2m} + eU \tag{4.2}$$

az atom Hamilton-operátora,

$$\hat{H}_{sug} = \hbar \sum_{k,\sigma} \omega_k \left( a_k^{\dagger} a_k + \frac{1}{2} \right)$$
(4.3)

az elektromágneses tér (3.24) Hamilton-operátora, és

$$\hat{H}_{a+s} = -\hat{d}\hat{E} \tag{4.4}$$

a tér és atom dipól kölcsönhatása (2.47).

### 4.1. $\hat{H}_{a+s}$ kölcsönhatási képben

A későbbi fejezetekben időfüggő perturbációszámítást fogunk végezni, így érdemes most áttérnünk. A dipól kölcsönhatásban szereplő elektromos teret a vektorpotenciállal kifejezve [2]:

$$\hat{E} = -\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \left[ \hat{A}, \hat{H}_{sug} \right]$$

$$= \frac{i}{\hbar} \left[ \sum_{l,\sigma} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_l}} \left( a_l e^{ilr} + a_l^{\dagger} e^{-ilr} \right) \hat{e}_l, \hbar \sum_{k,\sigma} \omega_k \left( a_k^{\dagger} a_k + \frac{1}{2} \right) \right].$$
(4.5)

A léptető operátorok, kommutációs tulajdonságát a (4.6) összefüggés írja le:

$$[a_k, a_l] = 0 \qquad \left[a_k^{\dagger}, a_l^{\dagger}\right] = 0 \qquad \left[a_l, a_k^{\dagger}\right] = \delta_{kl} \tag{4.6}$$

A (4.5)-ben szereplő léptető operátorok kommutátora:

$$\begin{bmatrix} a_l, a_k^{\dagger} a_k \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_l a_k^{\dagger} - a_k^{\dagger} a_l \end{pmatrix} a_k + a_k^{\dagger} (a_l a_k - a_k a_l) = a_l a_k^{\dagger} a_k - a_k^{\dagger} a_k a_l = \\ = \begin{bmatrix} a_l, a_k^{\dagger} \end{bmatrix} a_k + a_k^{\dagger} [a_l, a_k] = \begin{bmatrix} a_l, a_k^{\dagger} \end{bmatrix} a_k = \delta_{k,l} a_k.$$

$$(4.7)$$

Így

$$\hat{E} = i \sum_{k,l} \omega_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \left( a_k \delta_{k,l} e^{ikr} - a_k^{\dagger} \delta_{k,l} e^{-ikr} \right) \hat{e}_k$$

$$= i \sum_{k,\sigma} \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0 V}} \left( a_k e^{ikr} - a_k^{\dagger} e^{-ikr} \right) \hat{e}_k.$$
(4.8)

Most használjuk ki azt a tulajdonságát a rendszerünknek, hogy két állapota van, azaz a következő mátrixelemek lehetségesek:

A diagonális elemek azért tűnnek el, mert dipól közelítésben  $\hat{E}$  kiemelhető az integrálból és  $\hat{d}$  pedig páratlan függvénye a helynek. Így az atom és a sugárzási tér kölcsönhatását leíró Hamiltonoperátor a következő:

$$H_{a+s} = i \sum_{k,\sigma} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}} \left( a_k e^{ikr} - a_k^{\dagger} e^{-ikr} \right) \hat{e}_k \left( \hat{d}_{eg} |e\rangle \langle g| + \hat{d}_{ge} |g\rangle \langle e| \right).$$
(4.10)

Most is célszerű áttérni kölcsönhatási képbe. Bontsuk fel két részre – kölcsönhatás nélküli + kölcsönhatás – a teljes Hamilton-operátort:

$$\hat{H}_{tot} = \hat{H}_a + \hat{H}_{sug} + \hat{H}_{a+s} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{a+s}.$$
(4.11)

A kölcsönhatási képbe való áttérést a (4.12) időfejlesztő operátor segítségével tehetjük meg:

$$\hat{U} = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t} \,. \tag{4.12}$$

Az áttérés során a következőképpen transzformálódik a hullámfüggvény és a Hamilton-operátor:

$$\psi^{kh} = \hat{U}^{\dagger} \psi^{S} \qquad \hat{H}^{kh}_{a+s} = \hat{U}^{\dagger} H_{a+s} \hat{U}.$$
 (4.13)

A (4.10)-ben található módón felírt  $\hat{H}_{a+s}$  operátor transzformációját nézzük meg hatásonként, és számítsuk ki először, hogy hogyan transzformálódik a  $\hat{a}_k |e\rangle \langle g|$ .

$$e^{\frac{i}{\hbar}H_0t}a_k \left| e \right\rangle \left\langle g \right| e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t} = e^{\frac{i}{\hbar}H_{sug}t}a_k e^{-\frac{i}{\hbar}H_{sug}t}e^{\frac{i}{\hbar}H_at} \left| e \right\rangle \left\langle g \right| e^{-\frac{i}{\hbar}H_at}$$
(4.14)

Ha most felhasználjuk az ábra jelöléseit, azaz:  $H_a \left| e \right\rangle = \epsilon_e$  és  $H_a \left| g \right\rangle = \epsilon_g$ 

$$\hat{U}^{\dagger}a_{k}\left|e\right\rangle\left\langle g|\hat{U}=a_{k}\left|e\right\rangle\left\langle g|e^{i\left(\omega_{eq}-\omega_{k}\right)t}\right.$$
(4.15)

A fenti kifejezésben az  $a_k$  transzformációját a következőképpen kaptuk: Meghatároztuk a  $a_k e^{-\frac{i}{\hbar}H_{sug}t}$  szorzatot. Ehhez az exponenciálist sor alakba írjuk fel

$$e^{-\frac{i}{\hbar}H_{sug}t} = \sum_{N} \frac{\left(-i\omega_{k}\right)^{N} \left(a_{k}^{\dagger}a_{k}\right)^{N} t^{N}}{N!}$$

A k módusra, átrendezéssel kapjuk

$$a_k \left(a_k^{\dagger} a_k\right)^N = \left(1 + a_k^{\dagger} a_k\right)^N a_k \,. \tag{4.16}$$

Ezt visszahelyettesítve az exponens kifelytésébe az eredmény

$$a_k e^{-\frac{i}{\hbar}H_{sug}t} = e^{-\frac{i}{\hbar}H_{sug}t - i\omega_k t} a_k.$$

$$(4.17)$$

Ebből már következik a transzformációra kapott (4.15) képlet. A sugárzási tér és az atom közti kölcsönhatást leíró Hamilton-operátor kölcsönhatási képben:

$$\hat{H}_{a+s}^{kh} = -i\sum_{k,\sigma} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}} \left( \hat{a}_k e^{-i\omega_k t} - \hat{a}_k^{\dagger} e^{i\omega_k t} \right) \hat{e}_k d\left( e^{i\omega_{eg} t} \left| e \right\rangle \left\langle g \right| + e^{-i\omega_{eg} t} \left| g \right\rangle \left\langle e \right| \right)$$
(4.18)

Ha felbontjuk a zárójelet, akkor láthatjuk, hogy négy tagra esik a  $H_{a+s}$ , mind a négy tag más és más folyamatot ír le:



Ezeket a folyamatokat fogom részletesen bemutatni az elkövetkező néhány fejezetben. A két felső ábra, rendre, az abszorpciónak és emissziónak felel meg, és látni fogjuk, hogy az alsó két ábrán lévő folyamatok nem valósulhatnak meg.

### 4.2. Emisszió

Az atom + tér rendszert közösen egy  $|\psi\rangle$  állapotvektorral írhatjuk le. A kezdeti állapotot leíró állapotvektor a következő:  $|\psi_i\rangle = |e, n_k\rangle$ , azaz kezdetben a tér k módusában  $n_k$  db foton volt,

az atom pedig gerjesztett állapotban (excited state) volt. A (4.18) képletből következik, hogy ha kezdetben a k módusban  $n_k$  foton van, akkor az alapállapotba való átmenet során ugyanebben a módusban 1 fotonnak keletkeznie kell. Ezért a végállapot állapotvektora:  $|\psi_f\rangle = |g, n_k + 1\rangle$  azaz míg az atom alapállapotba (ground state) került, ez alatt kisugárzott egy  $\hbar\omega_k$  energiájú fotont [2].

A folyamat során a rendszer állapotvektora felírható a kezdeti és végállapot szuperpozíciójaként:

$$|\psi\rangle = c_e |\psi_i\rangle + c_g |\psi_f\rangle.$$
(4.19)

A kezdeti feltételek:  $c_e(t_i) = 1$  és  $c_g(t_i) = 0$ .

#### 4.2.1. 0. közelítés

Az időfüggő perturbációszámítás nulladik közelítésében nem írható fel átmenet, tehát a rendszer kezdeti állapotban marad, így a folyamatot leíró állapotvektor megegyezik a kezdeti állapotéval:

$$|\psi\rangle = 1 \cdot |\psi_i\rangle + 0 \cdot |\psi_f\rangle , \qquad (4.20)$$

aza<br/>z $c_{e}^{(0)}=1$  és $c_{g}^{(0)}=0$  .

### 4.2.2. 1. közelítés

Az időfüggő perturbációszámítás első közelítés értelmében a következő differenciálegyenlet íható fel a  $c_g$  együtthatóra:

$$i\hbar \frac{\partial c_g^{(1)}}{\partial t} = \langle \psi_f | H_{a+s}^{kh} | \psi_i \rangle c_e^{(0)} , \qquad (4.21)$$

ahol  $H_{a+s}^{kh}$  a sugárzás és az atomok közti kölcsönhatást leíró Hamilton-operátor kölcsönhatási képben:

$$H_{a+s}^{kh} = -i\sum_{k} \hbar V_k \left( a_k e^{-i\omega_k t} - a_k^{\dagger} e^{i\omega_k t} \right) \left( e^{i\omega_{eg} t} |e\rangle \langle g| + e^{-i\omega_{eg} t} |g\rangle \langle e| \right) , \qquad (4.22)$$

ahol

$$\hbar V_k := \sqrt{\frac{\omega_k}{2\epsilon_0 \hbar V}} \vec{e}_k \vec{d}, \qquad (4.23)$$

és  $a_k$  a térben lévő fotonok léptető operátora.  $a_k$  fotont tüntet el,  $a_k^+$  pedig fotont kelt a térben.

$$a_k |n_k\rangle = \sqrt{n_k} |n_k - 1\rangle, \qquad (4.24a)$$

$$a_k^{\dagger} |n_k\rangle = \sqrt{n_k + 1} |n_k + 1\rangle.$$
(4.24b)

### 4.2.3. A $H_{fi}^{kh}$ mátrixelem kiszámítása

Az átmenet valószínűségének meghatározásához szükségünk lesz a  $H_{fi}^{kh}$  mátrixelemre:

$$\begin{aligned} H_{fi}^{kh} &= \langle \psi_f | H_{a+s}^{kh} | \psi_i \rangle \\ &= -i \langle g, n_k + 1 | \sum_l \hbar V_l \left( a_k e^{-i\omega_l t} - a_l^{\dagger} e^{i\omega_l t} \right) \left( e^{i\omega_{eg} t} | e \rangle \langle g | + e^{-i\omega_{eg} t} | g \rangle \langle e | \right) | e, n_k \rangle \end{aligned}$$

Felhasználva a léptető operátorok előző fejezetben leírt tulajdonságát és az állapotok ortogonalitását, kapjuk:

$$H_{fi} = i\langle n_k + 1| \sum_l \hbar V_l a_l^{\dagger} e^{-i(\omega_{eg} - \omega_l)t} | n_k \rangle = i\sqrt{n_k + 1}\hbar V_k e^{-i(\omega_{eg} - \omega_k)t}$$
(4.25)

### 4.2.4. Az emisszió valószínűsége

Az előzőek alapján a következőt egyenletet kapjuk  $c_g(t)$  megváltozására:

$$i\hbar \frac{\partial c_g^{(1)}}{\partial t} = i\sqrt{n_k + 1}\hbar V_k e^{-i(\omega_{eg} - \omega_k)t} c_e^{(0)} .$$

$$(4.26)$$

Egy egyszerű integrálás után és megkaphatjuk  $c_g^{\left(1\right)}$  értékét

$$c_{g}^{(1)} = \sqrt{n_{k} + 1} V_{k} \int_{0}^{t} e^{-i(\omega_{eg} - \omega_{k})t'} c_{e}^{(0)} dt'$$
  
$$= \sqrt{n_{k} + 1} V_{k} \frac{1 - e^{-i(\omega_{eg} - \omega_{k})t}}{i(\omega_{eg} - \omega_{k})}.$$
 (4.27)

Vezessük be  $\Delta_k := \omega_{eg} - \omega_k$ , ami az átmenet és gerjesztő tér közti elhangolását jelenti, így

$$c_{g}^{(1)} = \sqrt{n_{k} + 1} V_{k} e^{-i\frac{\Delta_{k}}{2}t} \left(\frac{e^{i\frac{\Delta_{k}}{2}t} - e^{-i\frac{\Delta_{k}}{2}t}}{\frac{\Delta_{k}}{2}2i}\right) = \sqrt{n_{k} + 1} V_{k} e^{-i\frac{\Delta_{k}}{2}t} \frac{\sin\left(\frac{\Delta_{k}}{2}t\right)}{\frac{\Delta_{k}}{2}}.$$
 (4.28)

Tehát $|g,n_k+1\rangle$ állapot betöltésének valószínűsége:

$$P_g^{(1)} = |c_g|^2 = |V_k|^2 \left(n_k + 1\right) \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta_k}{2}t\right)}{\left(\frac{\Delta_k}{2}\right)^2}.$$
(4.29)

Ha $t\to\infty,$ akkor $P_g^{(1)}\to |V_k|^2\,(n_k+1)\,\mathcal{J}\delta(x),$ ezt láthatjuk a következő ábrán:



 $\mathcal J$  értékét a következőképpen határozhatjuk meg:

$$\mathcal{J} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta_k}{2}t\right)}{\left(\frac{\Delta_k}{2}\right)^2} d\Delta_k = 2\pi t.$$
(4.30)

Így a  $P_g^{(1)}$  megváltozásának a rátája (időegységre eső változás) a perturbációszámítás 1. rendjében

$$w_{e \to g}^{(1)} = \frac{\pi \omega_k}{\epsilon_o V \hbar} \left| \vec{e}_k \vec{d} \right|^2 (n_k + 1) \,\delta\left(\omega_{eg} - \omega_k\right) \,. \tag{4.31}$$

### 4.2.5. Spontán emissziós ráta

A spontán emisszió során  $(n_k+1)$  tényezőből a +1-es tag játszik szerepet. Ha az atom kezdetben gerjesztett állapotban volt, akkor a fotontér állapotától függetlenül, miközben az atom alapállapotba kerül a fotontér valamely módusában megjelenik plusz egy foton. Ezt úgy vesszük figylembe, hogy a (4.31) képletbe  $n_k = 0$ -t helyettesítünk és összegzünk a fotontér összes lehetséges egy-fotonos végállapotára:

$$A = \frac{\pi}{\epsilon_0 \hbar V} \sum_{k,\sigma} \omega_k \left| \vec{e_{k\sigma} d} \right|^2 \delta \left( \omega_{eg} - \omega_k \right), \tag{4.32}$$

A szummáról  $\sum_k$  térjünk át integrálra, ezt a következőképpen tehetjük meg: Az L élhosszúságú kockában, ahol a teret kvantáltuk, a lehetséges hullámszám vektorokat a (3.6) képlet adja meg. Ez alapján a hullámszám vektor  $2\pi/L$  egységekkel változhat. Ezért a hullámszám vektorok háromdimenziós tere  $(2\pi/L)^3$  térfogatú cellákra osztható. Minden egyes cellába csak egy vektor mutat. Így kapjuk

$$\sum_{k} \approx \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d^3k = \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \,\sin(\vartheta) \int_0^{\infty} dkk^2 \tag{4.33}$$

Így a spontán emisszió rátája integrál alakban:

$$A = \sum_{\sigma} \frac{1}{8\pi^2 \hbar \epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{\infty} k^2 dk \sin \vartheta \omega_k \left| \vec{e_{k\sigma}} \vec{d} \right|^2 \delta \left( \omega_{eg} - \omega_k \right) \,. \tag{4.34}$$

Mellék számításként végezzük el a polarizációs írányokra vett összegzést:

$$\sum_{\sigma} \left| \vec{e}_k \vec{d} \right|^2 = \left( \vec{d}^* \vec{e}_{1,k} \right) \left( \vec{e}_{1,k} \vec{d} \right) + \left( \vec{d}^* \vec{e}_{2,k} \right) \left( \vec{e}_{2,k} \vec{d} \right) = \vec{d}^* \left( \vec{e}_{1,k} \circ \vec{e}_{1,k} \right) d + \vec{d}^* \left( \vec{e}_{2,k} \circ \vec{e}_{2,k} \right) d!$$
(4.35)

Transzverz tér esetén a polarizációs irányok és a hullám terjedési iránya páronként merőlegesek egymásra



azaz

$$\vec{e}_{1,k} \circ \vec{e}_{1,k} + \vec{e}_{2,k} \circ \vec{e}_{2,k} + \vec{k} \circ \vec{k} = \hat{I},$$
(4.36)

így

$$\sum_{\sigma} \left| \vec{e}_k \vec{d} \right| = |d|^2 \left( 1 - \cos^2(\vartheta) \right) \tag{4.37}$$

Ezzel a polarizációra történő összegzést meghatároztuk:

$$A = \frac{|d|^2}{8\pi^2\hbar\epsilon_0} \int d\vartheta d\varphi \frac{d\omega}{c} \left(1 - \cos^2\vartheta\right) \sin\vartheta \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \omega\delta\left(\omega_{eg} - \omega\right). \tag{4.38}$$

Végül elvégezve az integrálokat megkapjuk a spontán emissziós rátát:

$$A = \frac{\omega_{eg}^3 |d|^2}{3\pi\varepsilon_0 \hbar c^3}.$$
(4.39)

### 4.3. Abszorpció

Az előzőekkel megegyező számolások alapján a következő adódik egy foton elnyelésének rátájára:

$$w_{g\to e}^{(1)} = \frac{\pi\omega_k}{\epsilon_0 V\hbar} \left| \vec{e_k} \vec{d} \right|^2 n_k \delta(\omega_{eg} - \omega_k).$$
(4.40)

Itt jegyzem meg, hogy a lehetségesnek tűnő másik két folyamat nem valósulhat meg, ott a  $\delta$  hasában a két frekvencia összege szerepel és mivel egyik se lehet negatív szám, a  $\delta$  soha nem vesz fel 0-tól különböző értéket.

### 4.4. Einstein-koefficiensek

Az előző fejezetek alapján kvantált atom + elektromágnese mezőből kiindulva le lehet írni egy fekete test üregében kialakuló sugárzást, mely egyensúlyban van a fallal . Mint ahogy azt az előbb láttuk: egy, a fekete test sugárzásbeli térbe helyezett két állapotú mikrórendszernél a következő kölcsönhatások lehetségesek [3]:

Abszorpció: a rendszer elnyel egy ħω<sub>eg</sub> energiájú fotont és |g⟩ állapotról |e⟩-ba ugrik. Mint ahogy azt az előzőekben láttuk; az abszorpciók száma arányos a |g⟩ energia szinten található atomok számával (N<sub>g</sub>), valamint az energiasűrűséggel (ρ(ω<sub>eg</sub>) = ħω<sub>eg</sub>/V), az arányossági tényezőt jelöljük: B<sub>eg</sub> és ezt abszorpciós Einstein-koefficiensnek nevezik.

$$N_{absz.} = B_{eg} N_g \varrho \left(\omega_{eg}\right) \tag{4.41}$$

2. Emisszió: A gerjesztett állapotban lévő rendszer a tér hatására  $\hbar \omega_{eg}$  foton kibocsájtásával kerül vissza alapállapotba. Az ilyen folyamatok száma arányos a  $\rho(\omega_{eg})$  és a gerjesztett nívón lévő atomok számával. Az arányossági tényezőt  $B_{ge}$ -vel jelöljük és ez emissziós Einstein-koefficiensnek nevezik.

$$N_{em.} = B_{ge} N_e \varrho \left( \omega_{eg} \right) \tag{4.42}$$

3. Spontán emisszió: A magasabb szinten lévő atomok, minden külső hatás nélkül is "alapállapotba" kerülhetnek, ezt írja le a (4.31)-ban szereplő +1. Tehát ezek a folyamatok száma független a tértől és csak a gerjesztett állapotban lévő atomok számával arányos, az arányossági tényezőt jelöljük A-val.

$$N_{sp.} = AN_e. \tag{4.43}$$

Egyensúly esetén az időegység alatt lezajlódó abszorpciók számának meg kell egyeznie az emissziók számával:

$$B_{eq}N_q\varrho\left(\omega_{eq}\right) = AN_e + B_{qe}N_e\varrho\left(\omega_{eq}\right). \tag{4.44}$$

Termikus egyensúly esetén az atomok eloszlását a Boltzmann-törvény írja le:

$$N_e = N_g e^{-\frac{\hbar\omega_{eg}}{kT}}.$$
(4.45)

Ha a hőmérséklet magas akkor  $N_e \simeq N_g$ , továbbá nagy energiasűrűséget feltételezve a (4.44) egyenletben az egyensúly feltételére adódik:

$$B_{qe} = B_{eq} = B, \qquad (4.46)$$

ahol (4.31) és (4.40) alapján, átlagolva az atomi dipólus-momentumok irányára

$$B = \frac{\pi |d|^2}{3\varepsilon_0 \hbar^2}.$$
(4.47)

### 4.5. Weisskopf-Wigner elmélet

A 4.2.5. fejezetben megmutattuk, hogy perturbációszámítás 1. rendjében hogyan lehet meghatározni a spontán emissziós rátát. Azonban ez az időfüggést még nem adja meg. A Weisskopf-Wigner elmélet a spontán emisszó időfüggését írja le [2].

Oldjuk meg formálisan (4.18) által meghatározott  $\hat{H}$ -operátorra felírt Schrödinger egyenletet. A Schrödinger egyenlet komponensei a következők a  $\{|e, 0\rangle, |g, 1_k\rangle$  bázisban:

$$\langle e, 0 | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \psi \rangle = \langle e | 0, H_{a+s}^{kh} | \psi \rangle ,$$

$$i\hbar \dot{c}_e = i\hbar \sum_k V_k e^{i\Delta_k t} c_{g,k} ,$$

$$(4.48)$$

és

$$\langle g, 1_k | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \psi \rangle = \langle g, 1_k | H_{a+s}^{kh} | \psi \rangle , i\hbar \dot{c}_{g,k} = -i\hbar \sum_k V_k^* e^{-i\Delta_k t} c_e ,$$

$$(4.49)$$

ahol

$$|\psi\rangle = c_e|e,0\rangle + \sum_k c_{g,k}|g,1_k\rangle.$$
(4.50)

A (4.48) egyenlet formális megoldását úgy kaphatjuk meg, hogy kifejezzük a (4.49)-ből  $c_{q,k}$ -t

$$c_{g,k} = -\sum_{k} V_k^* \int_0^t c_e(t') e^{-i\Delta_k t'} dt'$$
(4.51)

és ezt behelyettesítjük a (4.48) egyenletbe:

$$\dot{c}_{e} = -\sum_{k} |V_{k}|^{2} e^{i\Delta_{k}t} \int_{0}^{t} c_{e}(t') e^{-i\Delta_{k}t'} dt'$$
  
$$\dot{c}_{e} = -\sum_{k} |V_{k}|^{2} \int_{0}^{t} c_{e}(t') e^{-i\Delta_{k}(t-t')} dt'$$
(4.52)

A fenti egyenletet a Laplace transzformáció módszerével oldjuk meg:

$$\overline{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \,, \qquad \Re(s) > 0 \,. \tag{4.53}$$

Laplace transzformáció után elvégezhetjük az integrálást. Áttérés során használjuk fel, hogy a rendszer kezdetben a  $|\psi_i\rangle = |e, 0\rangle$  állapotban volt, azaz  $c_e(0) = 1$ . Legyen  $\overline{c}_e$  a transzformált együttható. Így

$$s\overline{c}_{e}(s) - 1 = -\sum_{k} |V_{k}|^{2} \int_{0}^{\infty} dt e^{-st} \int_{0}^{t} dt' c_{e}(t') e^{i\Delta_{k}(t-t')}$$
$$= -\sum_{k} |V_{k}|^{2} \int_{0}^{\infty} dt' c_{e}(t') \int_{t'}^{\infty} dt e^{-st} e^{i\Delta_{k}(t-t')}$$

$$= \sum_{k} |V_{k}|^{2} \int_{0}^{\infty} dt' c_{e}(t') \frac{e^{-st'}}{i\Delta_{k} - s}$$
$$= -i \sum_{k} \frac{|V_{k}|^{2}}{\Delta_{k} + is} \overline{c}_{e}(s)$$

Ezt átrendezve kapjuk:

$$\overline{c}_e(s) = \frac{1}{s + i \sum_k \frac{|V_k|^2}{\Delta_k + is}}$$
(4.54)

Az inverz Laplace transzformáció a következő:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} e^{st} \overline{f}(s) ds$$
(4.55)

Mivel a (4.54) integrálja nem triviális (a reziduum tétel nem alkalmazható, mivel nem látszik az elsőrendű pólusának a helye), így nézzük meg hogy hova tart a nevezőben szereplő kifejezés:

$$\lim_{s \to 0} i \sum_{k} \frac{|V_{k}|^{2}}{\Delta_{k} + is} = \lim_{s \to 0} i \sum_{k} \frac{|V_{k}|^{2}}{\Delta_{k}^{2} + s^{2}} (\Delta_{k} - is) = i \sum_{k} \frac{|V_{k}|^{2}}{\Delta_{k}} + \lim_{s \to 0} \sum_{k} \frac{|V_{k}|^{2}}{\Delta_{k}^{2} + s^{2}} s$$
$$= i \sum_{k} \frac{|V_{k}|^{2}}{\Delta_{k}} + \pi \sum_{k} |V_{k}|^{2} \delta(\Delta_{k})$$
(4.56)

Jelöljük az első tagot  $i\Delta\omega$ -val és a spontán emissziós ráta értéke alapján a második tag nem más mint  $\frac{A}{2}$ .

$$\lim_{s \to 0} i \sum_{k} \frac{|V_k|^2}{\Delta_k + is} = i\Delta\omega + \frac{A}{2}$$
(4.57)

Így már látszik az elsőrendű pólus és elvégezhetjük az inverz Laplace-transzformációt:

$$\overline{c}_e(s) = \frac{1}{s + i\Delta\omega + \frac{A}{2}}$$
(4.58)

$$c_e^{kh}(t) = e^{-i\Delta\omega t - \frac{A}{2}t}$$
(4.59)

$$c_e(t) = e^{-i(\omega_e + \Delta\omega)t - \frac{1}{2}t}$$
(4.60)

Tehát most már látszik, hogy az atomi átmenet frekvenciája megváltozik  $\Delta \omega$ -val, ez a Lambféle eltolódás.  $\Gamma$  pedig megegyezik a korábban meghatározott spontán emissziós rátával. A  $\overline{c}_e(s)$ pólusának maghatározásánál történt az a kis csalás ami megszüntette a folyamatot reverzibilitását. Mivel a módusok igen sűrűn vannak, ezért a rendszer soha nem tér vissza a kezdeti állapotába, az energia szétfolyik.

# II. rész

# Mérések, Szimulációk

### 5. fejezet

## A mérés összefoglalása

A mérés célja, hogy megmérjük a LiNbO<sub>3</sub>: $Er^{3+}$  egykristályban az Er ionok 980.5nm körüli vonalának homogén vonalszélességét az inhomogénen kiszélesedett vonalon belül. Ezen kívül megbecsüljük a gerjesztett állapot élettartamát. A mérést a telítési lézerspektroszkópi módszerrel végeztem el. Az alábbi ábrán kékkel jelöltem az inhomogénen kiszélesedett vonalat, pirossal pedig a mérni kívánt homogén kiszélesedésű spektrumvonalat:



A mérés két fő fázisból tevődik össze; egy kis vonalszélességű, beíró lézerimpulzus gerjeszti az Er ionok egy csoportját a mintában, majd egy kiolvasó lézerimpulzus kiolvassa a beírt populációinverziót a frekvencia függvényében. A kapott jelalakból következtetni lehet az Er ionok homogén vonalszélességére. A méréseket sokszor elvégezve és átlagolva kapjuk meg végül az eredményt. Ehhez a következőképpen kell modulálnunk a lézerfényt minden mérési ciklusban:



Az előbb leírtakat megvalósító mérési berendezés a következő volt:



A diódalézerből kilépő, polarizált nyaláb átmérőjét egy nyalábszűkítő segítségével lecsökkentjük és utána egy polarizáló nyalábosztóra vezetjük, ami az egyik irányba polarizált fényt átengedi a másik irányban polarizáltat pedig visszaveri. A lézer fénye pont úgy volt polarizálva, hogy a polarizáló nyalábosztó visszaverje, így egy  $\lambda/4$  lemezen átvezetjük, ahol cirkulárisan polarizált fénnyé alakul át. Aztán az akuszto-optikai modulátorral (AOM) moduláljuk (a fent leírt módon), majd a macskaszem segítségével újra visszavezetjük az AOM-be, és onnan a  $\lambda/4$ -es lemezen át a polarizáló nyalábosztóba. Mivel most a  $\lambda/4$ -es lemezre egy cirkulárisan polarizált fény érkezett az most újra lineárisan polarizált fénnyé alakítja (az eredeti fényhez képest egy  $\pi/2$  forgatást szenved), így a polarizáló nyalábosztón átjut és azon keresztül egy nyalábosztóba megy, ahol a fény egy részét detektorba vezetjük (ez lesz a referencia), a másik része pedig fokuszálva a mintára érkezik és onnan a detektorba.

Az összeállítás két elemét, a macskaszemet és az AOM-et külön-külön megvizsgáltam. Az AOM végezte a lézerfény modulációját a macskaszem pedig azt biztosította, hogy az AOM-en áthaladó fény a modulációtól függetlenül, mindig a (mozdulatlan) mintára érkezzen.

Szimuláció segítségével meghatároztam hogy adott kezdőértékek mellett milyen lesz a macskaszemből kijövő fény paraméterei. Felvettem az AOM szög- és frekvencia-karakterisztikáját, amiket összehasonlítottam az elméletből várttal és mérés segítségével megbecsülhettem az AOMen áthaladó lézerfény átmérőjét. Továbbá sikerült az előszóban kitűzött feladatot teljesíteni, azaz megbecsültem az Er ionok homogén vonalszélesség és a gerjesztett állapotok élettartamát.

### 6. fejezet

# Akuszto-optikai modulátor

### 6.1. Elméleti összefoglaló

Az akuszto-optikai modulátor (AOM) egy kristály ( $TeO_2$ ) amiben longitudinális állóhullámokat keltünk, ezáltal sűrűség és törésmutató oszcilláció alakul ki. A beeső lézerfény a hullámfrontokkal közel párhuzamos [5]. A modulált kristály úgy viselkedik, mint egy Bragg-rács és a Bragg-feltételnek elegetéve szórja a lézerfényt. Tehát ha tudjuk vezéreli az AOM-ben kialakuló törésmutató hullámot, akkor ennek segítségével a lézerfény frekvenciáját és amplitúdóját is tudjuk változtatni, amit a szaturációs (telítési) spektroszkópiában használunk ki olymódon, hogy az erbium ionok egy spektrumvonalát pásztázhazuk.

A törésmutató változása, a hullámfrontokra merőleges (*x* tengely) irányba, a következőképpen írható le:

$$n(x) = n - \Delta n_0 \cos\left(qx - \varphi\right),\tag{6.1}$$

aholna perturbáció nélküli törésmutató (n=2.2),a kristályban a fény terjedési sebessége $v\simeq 4200m/s,q$ a hullámszám

$$q = \frac{2\pi}{\Lambda} \qquad v = \frac{\Lambda}{T} = \Lambda f \tag{6.2}$$

ahol 85 MHz  $\leq f \leq$  135 MHz frekvenciával rezgethető (a valóságban ezt egy oszcillátorra adott 0-5V feszültség változtatással tehettem meg, de a f(U) függvény elég jó közelítéssel lineárisnak tekinthető).



Az ábráról leolvasható, hogy az útkülönbséget a következőképpen írhatjuk fel:

$$\Delta s = 2 \cdot k \cdot x \sin(\vartheta), \tag{6.3}$$

ahol  $k = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{2\pi}{\lambda_0}n$  a lézerre jellemző hullámszám. A reflexiót a TE polarizációs Fresnel-formula írják le:

$$r = \frac{n_1 \cos \vartheta_1 - n_2 \cos \vartheta_2}{n_1 \cos \vartheta_1 + n_2 \cos \vartheta_2} \tag{6.4}$$

ahol $n_1=n+\Delta n,\,n_2=n,\,\vartheta_1=\frac{\pi}{2}-\vartheta$  és a Snellius-Descartes törvény alapján:  $\vartheta_2=$  $\operatorname{arcsin}\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\vartheta_1\right)$ Ha elvégezzük a behelyettesítést és elhagyjuk a másodrendűen kis tagokat, akkor azt kapjuk a

Fresnel-formulákra:

$$\Delta r = \frac{1}{2n\sin^2\vartheta}\Delta n \tag{6.5}$$

Így tehát a reflexiós képesség:

$$r = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{i\Delta s} dr = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{i\Delta s} \frac{dr}{dn} \frac{dn}{dx} dx$$
(6.6)

A  $\frac{dn}{dx}$  a (6.1)-ból és  $\frac{dr}{dn}$  a (6.5)-ből határozható meg.

$$r = -\frac{1}{2n\sin^2\vartheta}q\Delta n_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{2ikx\sin\vartheta}\sin\left(qx-\varphi\right)dx.$$
(6.7)

Vezessük be a következő jelölést:

$$r' := -\frac{1}{2n\sin^2\vartheta}q\Delta n_0 \tag{6.8}$$

és írjuk át sin a komplex számok segítségével:

$$r = \frac{1}{2}ir' \left[ e^{i\varphi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{i(2k\sin\vartheta - q)x} dx - e^{-i\varphi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{i(2k\sin\vartheta + q)x} dx \right]$$
(6.9)

az integrálás elvégzése után:

$$r = \frac{1}{2}ir'L\left[e^{i\varphi}\frac{\sin\left((2k\sin\vartheta - q)\frac{L}{2\pi}\pi\right)}{\pi\left(2k\sin\vartheta - q\right)\frac{L}{2\pi}} - e^{-i\varphi}\frac{\sin\left((2k\sin\vartheta + q)\frac{L}{2\pi}\pi\right)}{\pi\left(2k\sin\vartheta + q\right)\frac{L}{2\pi}}\right]$$
(6.10)

A Bragg-feltétel abból adódik, hogy az optimális visszaverődés ott van, ahol:

$$2k\sin\vartheta_B \mp q = 0$$
  

$$\sin\vartheta_B = \pm \frac{\lambda_n}{2\Lambda}$$
(6.11)

Ha kicsi a szög akkor paraxiális közelítésben:

$$\vartheta_B = \pm \frac{\lambda_n}{2\Lambda} \tag{6.12}$$

A  $\frac{\sin(x)}{x}$  gyors lecsengése miatt észlelhető intenzitást akkor kapunk, ha a két "első" zérushely közötti tartományban vagyunk, tehát a következő teljesül:

$$\left| \left( 2k\sin\vartheta - 2k\sin\vartheta_B \right) \frac{L}{2\pi} \right| \le 1 \tag{6.13}$$

Paraxiális közelítéseben tehát a következő feltételnek kell teljesülnie:

$$\left|\vartheta - \vartheta_B\right| \le \frac{\lambda_n}{2L} \tag{6.14}$$

### 6.2. Mérés

A következőkben felveszem az AOM karakterisztikáját, mintegy kalibrációs céllal és meghatározom a lézerfény jellemzőit.

### 6.2.1. Bragg szög meghatározása

Az ábrán látható a kísérlet összeállítása ami segítségével meghatározható a különböző frekvenciákhoz tartozó Bragg szögek.



Tehát a direkt nyaláb és az első rend köztidtávolságokat kellett mérnem és ezek segítségével meghatározható volt a $\vartheta_B$ 

$$\vartheta_B = \frac{\arctan\left(\frac{d}{L_1 + L_2}\right)}{2n} = \frac{\arctan\left(\frac{d}{375cm}\right)}{2 \cdot 2 \cdot 2} \tag{6.15}$$

A mért eredményeket az alábbi táblázat tartalmazza:

f (MHz)	<b>d</b> (cm)	$\vartheta_{B_m}$ (mrad)
85	7.5	4.5
90	8.0	4.8
95	8.5	5.0
100	8.9	5.3
105	9.4	5.6
110	9.8	5.8
115	10.4	6.1
120	10.8	6.3
125	11.1	6.6
130	11.5	6.9
135	11.7	7.2

A mért adatokra egyenest illesztettem és így "tetszőleges" frekvenciához tartozó Bragg-szöget meghatározhatjuk. Az illesztett egyenes egyenlete:

$$\vartheta_B = 5.3 \cdot 10^{-5} f + 2.7 \cdot 10^{-10}, \tag{6.16}$$

ahol a frekvenciát MHz-ben mérem, a Bragg-szög pedig milli rad-ban adódik. Az illesztett egyenes és a mért pontok:



Összehasonlításképpen a (6.12) képletbe helyettesítve adódik

$$\vartheta_B = \frac{0.98\mu m}{2 \cdot 2.2} \frac{f}{4200\mu m/\mu s} = 5.30303' \cdot 10^{-5} f.$$
(6.17)

A mért és számolt frekvenciafüggés nagyon jól egyezik.

### 6.2.2. Frekvencia-karakterisztika

A lézerre jellemző paramétereket meghatározása ennek a mérésnek a segítségével végezhető el. A mérési összeállítás a következő ábrán látható:



A lézerfény egy dióda lézerből indul, amit egy chopper megszaggat, hogy a lock in számára feldolgozható periodikus jelet állítson elő. A megszaggatott jelet térszűrős nyalábtágító (F > f) segítségével kiszélesítjük és a lézerfényben lévő kis divergenciát korrigáljuk. Az ilyen módón előállítót jelet két részre osztjuk egy nyalábosztó segítségével, a felét közvetlenül detektorba vezetjük (ebből kapjuk majd a referencia jelet, hogy ne kelljen abszolút skálán mérnünk), a másik jel pedig az AOM-en keresztül (a Bragg törvény értelmében a nullad rendtől különböző rendeket modulálja) a modulált jel (első rend) detektorba érkezik.

Az AOM vezérlő feszültségét (0-5)V között változtatható, azaz (85-135)MHz között változtatható a bent kialakuló törésmutató oszcillációt. A mérési pontokra, az elmélettel összhangba

$$I = |ampl.|^{2} = A \left(\frac{\sin(Bf - C)}{Bf - C}\right)^{2}$$
(6.18)

alakú függvényt illesztettem.



A piros pontok jelölik a mért adatokat és feketével ábrázoltam az illesztett görbét. A referencia és az AOM-on keresztül a detektorba érkező nyalábok intenzitásából meghatározhattam, hogy hanyad részére csökken le az átmenő fény intenzitása. A mérés, szemmel 110 MHz volt kalibrálva, de a mérés során kiderült hogy nem teljesen sikerült pont eltalálni az intervallum közepét, így 108.44 MHz lett a maximum átvitel helye.

### 6.3. A mérés kiértékelés

### 6.3.1. Lézer adatainak meghatározása

A mérési eredmények és a (6.10) összefüggés ismeretében megtudtam határozni a lézerfénynyaláb vastagságát (L), a lézerfény hullámszámát (k) és hullámhosszát ( $\lambda_n$ ,  $\lambda_0$ ).

Az előző pontban illesztett átviteli függvény paraméterei:

$$A = 17.5 \pm 0.1$$
  $B = 0.05531 \pm 6 \cdot 10^{-4}$   $C = 5.00 \pm 0.07$ 

Jelölje  $q_0$  a maximum frekvenciához tartozó hullámszámot és  $q_{\pm 1}$  a két zérushelyhez tartozó frekvenciát.

$$q_0 = \frac{2\pi}{v} f_{max} = \frac{2\pi}{4200\frac{m}{a}} 108.44 \text{MHz} = (0.162 \pm 0.007) \frac{1}{\mu m}.$$
(6.19)

ennek alapján a lézer hullámszáma meghatározható:

$$2k\sin\vartheta - q_0 = 0\tag{6.20}$$

hiszen ez a maximumhely feltétele.  $\vartheta$  az előző kalibrációs mérésben kapott egyenesből meghatározható, és így  $k = (14.09 \pm 0.06) \frac{1}{\mu m}$ -nak adódik. A lézer hullámhossza pedig:

$$\lambda_n = (0.45 \mp 0.02) \mu m$$
,  $\lambda_0 = (0.98 \pm 0.06) \mu m$ 

A két zérushelyhez tartozó hullámszám, pedig:

$$q_{-1} = (0.077 \pm 0.006) \frac{1}{\mu m}, \qquad q_{+1} = (0.243 \pm 0.009) \frac{1}{\mu m}$$

Ezekből a lézernyaláb átmérője:

$$q_{\pm 1} = 2k \sin \vartheta \pm \frac{2\pi}{L}$$
  
$$L = \frac{L_{\pm 1} + L_{\pm 1}}{2} = (75.8 \pm 0.2)\mu m \qquad (6.21)$$

### 6.3.2. Számolt és mért Bragg-szög összehasonlítása

A Bragg-szöget a következő összefüggés (6.12) segítségével határozhatjuk meg:

$$\vartheta_{B_{sz}} = \frac{f\lambda_n}{2v} = \frac{0.46 \cdot 10^{-6}m}{2 \cdot 4200\frac{m}{s}}f$$
(6.22)

A számolt és mért Bragg-szögeket összehasonlító táblázat, tehát a következő:

f (MHz)	$\vartheta_{B_m}$ (mrad)	$\vartheta_{B_{sz}}$ (mrad)	Relatív eltérés
85	4.54	4.51	0.8 %
90	4.85	4.77	1.5 %
95	5.15	5.04	2.2 %
100	5.39	5.30	1.6 %
105	5.70	5.57	2.2 %
110	5.94	5.83	1.7 %
115	6.30	6.10	3.3 %
120	6.54	6.36	2.8 %
125	6.73	6.63	1.4 %
130	6.97	6.89	1.1 %
135	7.09	7.16	1.0 %

A diffrakciós kritérium (6.14) pedig:

$$|\vartheta - \vartheta_B| \le \frac{\lambda_n}{2L} = \frac{0.46\mu m}{2 \cdot 75.75\mu m} = 0.0030 \pm 0.0005 \tag{6.23}$$

Tehát 108.44 MHz-n a lézernyaláb beeső szögét $-3 \leq \Delta \vartheta \leq 3$ mrad-al változtathatom a  $\vartheta_B$  körül.

### 6.3.3. Szög-karakterisztika kísérleti ellenőrzése

Az AOM és a beeső fény szögét változtattam – a AOM frekvenciája állandó (108.44 MHz-n) volt – egy számítógép vezérelt forgó tartóval (a tartó "szögfelbontása", azaz hogy milyen lépté-kekben tudta változtatni a szöget: 0.59  $\mu$ rad volt).

A mérési pontokra

$$I = |ampl.|^{2} = A \left(\frac{\sin(Bf - C)}{Bf - C}\right)^{2}$$
(6.24)

függvényt illesztettem. Az illesztett görbe paraméterei:

$$A = 17.3 \pm 0.1$$
  $B = 326.4 \pm 0.7$   $C = 0 \pm 10^{-30}$ 

Az ábrán egyben ábrázoltam a (6.10) összefüggés által megjósolt reflexiós függvény absz. négyzetét is. A képletben szereplő  $\theta$  helyett  $2 \cdot n \cdot \theta$  eltérítési szög függvényében ábrázoltam az átviteli függvényt az összehasonlíthatóság érdekében.



A két zérushely  $\pm 9.6$ mrad-nek adódott, amiből átskálázás után a kristáyon belül  $\pm 2.2$ mrad szög adódik a reflexiós fv. zérushelyére. Ez az érték közel áll a korábban kapott  $\pm 3$ mrad értékhez.

### 7. fejezet

# Macskaszem összeállítás

A macskaszem összeállítás a szaturációs spektroszkópiai mérésben azt a szerepet fogja végezni, hogy azt a jelet amit AOM modulál a modulációtól függetlenül mindig egy helyben lássuk, azaz a modulációtól függetlenül mindig ugyan oda érkezzen be (hogy a kristályt ne kelljen mozgatni).

A szimuláció során meghatároztam, hogy ha az alábbi optikai összeállításba különböző paraméterű

$$\vec{v}_{be} = \begin{pmatrix} \vartheta_{be} \\ y_{be} \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

lézerfényt engedünk be (ahol  $\vartheta$  az optikai tengellyel bezárt szög és y az optikai tengelytől való távolsága), akkor hogyan változik meg a rendszerből való kilépésekor. A kilépő fény paraméterei:

$$\vec{v}_{ki} = \begin{pmatrix} \vartheta_{ki} \\ y_{ki} \end{pmatrix}.$$
(7.2)

A mérés összeállítása:



ahol, e és g egy kis perturbáció és F a lencse fókusztávolsága (10cm).

### 7.1. Optikai elemek paraxiális közelítésben

Hengerszimmetrikus optikai rendszereknél használjuk ezt a közelítés, amennyiben a tengelytől mért távolság kisebb, mint az adott optikai eszköz lineáris paraméterei (fókusztávolság,...), valamint kicsik a sugarak szögei [4]. Ekkor a következő egyszerűsítő közelítéssel élhetünk:

$$\sin\vartheta \simeq \tan\vartheta \simeq \vartheta,\tag{7.3}$$

azaz linearizálódnak az egyenleteink. Például a Snelliusz-Descartes-törvény:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta, \tag{7.4}$$

kis szögekre, pedig a következőkre egyszerűsödik le:

$$n_1 \alpha = n_2 \beta, \tag{7.5}$$

ahol  $n_1$ ,  $n_2$  a két közeg törésmutatója, és  $\alpha$  az 1 közeg törési szöge és  $\beta$  a másik közeg törési szöge.

Ha a rendszer minden releváns mérete sokkal nagyobb, mint a fény hullámhossza, akkor geometriai optikával, fénysugarak terjedésével írhatjuk le a leképezéseket. Vezessük be a következő jelöléseket, legyen y a fénysugarak optikai tengelytől mért távolsággal és  $\vartheta$  az optikai tengellyel bezárt szögük. y és  $\vartheta$  előjeles mennyiségek, y-t pozitívnak tekintjük, ha az optikai tengely felett van, valamin  $\vartheta$ -t is, ha az az óramutató járásával ellentétes irányba fordult el az optikai tengelytől. Továbbá azt a konvenciót használjuk (Newton és Gauss nyomán), hogy a fénysugarak balról jobbra terjednek és a görbületi sugár akkor pozitív ha balra domborodik.



Tehát folyamatok során ennek a két mennyiségnek a megváltozását fogjuk nyomon követni. A vizsgálódást a következő matematikai formalizmussal érdemes megtenni: foglaljuk oszlopvektorba a fénysugarat jellemző mennyiségeket, és így egy optikai elem hatását (paraxiális közelítésben) egy úgynevezett átviteli mátrixszal jellemezhetjük.

### 7.2. Szabad terjedés átviteli mátrixa

Ha a fénysugár útját semmi nem téríti el, akkor beszélhetünk szabad terjedésről. Tehát terjedés közben a fénysugár szöge nem változhat meg, csak az optikai tengelytől mért távolsága.



Az ábráról látszik

$$y_{ki} = y_{be} + d \cdot \tan \vartheta_{be} \simeq y_{be} + d \cdot \vartheta_{be} \qquad \vartheta_{ki} = \vartheta \tag{7.6}$$

Tömörebben az előző egyenletrendszert úgy írhatjuk fel:

$$\begin{pmatrix} \vartheta_{ki} \\ y_{ki} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_{be} \\ y_{be} \end{pmatrix}$$
(7.7)

Amiből a szabad terjedés átviteli mátrixa:

$$\hat{M}_{szab} = \left(\begin{array}{cc} 1 & d\\ 0 & 1 \end{array}\right) \tag{7.8}$$

### 7.3. Vékony lencse átviteli mátrixa

Egy vékony lencse két ellentétes előjelű görbületi sugarú törőfelületből áll, mivel eltekintünk a lencsén belüli szabad terjedéstől. Számítsuk ki külön-külön a két törőfelület mátrixát és aztán tegyük őket össze.



Az ábráról leolvasható, hogy

$$y_{be} = y_{ki}, \tag{7.9}$$

$$-\alpha = \frac{g_{be}}{R} \tag{7.10}$$

és a Snelliusz-Descartes-törvényből következik:

$$n_1\left(\vartheta_{be} - \alpha\right) = n_2\left(\vartheta_{ki} - \alpha\right). \tag{7.11}$$

A (7.10) és a (7.11) együtt azt adja:

$$n_2\vartheta_k i = \frac{n_1 - n_2}{R} y_{be} + n_1\vartheta_{be} \tag{7.12}$$

Így tehát a törési mátrix:

$$\hat{M}_{R>0} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ \frac{n_1 - n_2}{R} & 1 \end{pmatrix}$$
(7.13)

Az előzőekkel megegyező számolások alapján és figyelembe véve, hogy most  $n_2$  közegből az  $n_1$  be terjed a fény és, hogy a görbületi sugár előjelt vált, azt kapjuk:

$$\hat{M}_{R<0} = \hat{M}_{R>0} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ \frac{n_1 - n_2}{R} & 1 \end{pmatrix}$$
(7.14)

Így a vékony lencse átviteli mátrixa:

$$\hat{M}_L = \hat{M}_{R<0} \hat{M}_{R>0} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 2\frac{n_1 - n_2}{R} & 1 \end{pmatrix}$$
(7.15)

Praktikus a lencse fókusztávolságával felírni, mivel a fókusztávolságot tudjuk közvetlenül mérni. A leképezési törvény alapján, ha párhuzamos nyalábokat vizsgálunk, akkor elegendő a képtávolságot mérni, ami megegyezik a fókusztávolsággal. Pontosabb eredményt kapunk, ha a Bessel-féle módszert válasszuk (de az adott mérésnél elegendően pontos volt az első módszer is). Ehhez vizsgáljuk meg, hogy hogyan képez le egy vékony lencse.



Amint azt az ábrán is láthatjuk a párhuzamos nyalábokat a fókuszpontba

$$F \simeq -\frac{y_{ki}}{\vartheta_{ki}} \tag{7.16}$$

képezi le.

$$\hat{M}_L \begin{pmatrix} y_{be} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{be} \\ 2\frac{n_1 - n_2}{R} y_{be} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{ki} \\ (M_L)_{21} y_{be} \end{pmatrix}$$
(7.17)

Így a vékony lencse fókusztávolsága:

$$F = -\frac{y_{ki}}{\vartheta_{ki}} = -\frac{R}{2(n_1 - n_2)} = -\frac{1}{(M_L)_{21}}$$
(7.18)

### 7.3.1. Ferde tükör átviteli mátrixa

Határozzuk meg egy hibásan, azaz az optikai tengellyel  $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$  szöget bezáróan felszerelt tükör átviteli mátrixát.



A törési törvény miatt:

$$\beta = \beta',\tag{7.19}$$

valamint az ábráról látszik, hogy:

$$y_{be} = y_{ki},\tag{7.20}$$

$$\frac{\pi}{2} = \beta' + (\vartheta_{ki} + \alpha) = \beta + (-\vartheta_{be} - \alpha), \qquad (7.21)$$

ahol felhasználtam a szögekre vonatkozó előjel konvenciót, valamit

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \varepsilon \to \alpha = \varepsilon \tag{7.22}$$

Ha a négy egyenlet tanulságát felhasználjuk, akkor a következő egyszerű összefüggést kaphatunk a szög megváltozására:

$$\vartheta_{ki} = -2\varepsilon - \vartheta_{be} \tag{7.23}$$

A (7.20) és (7.23) következik, hogy az átviteli a következőképpen írható le

$$\begin{pmatrix} y_{ki} \\ \vartheta_{ki} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{be} \\ \vartheta_{be} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2\varepsilon \end{pmatrix}$$
(7.24)

### 7.4. A szimuláció eredményei

Ha nincs perturbáció akkor a macskaszem, csak az  $y_{be}$  előjelét változtatja meg. Tehát ami  $\vartheta_{be}$  szögben érkezik be, azt úgy is engedi ki, az  $y_{be}$ -t, pedig tükrözi az optikai tengelyre:

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} -1 & 0\\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(7.25)

#### 7.4.1. Jól beállított tükör

Ha csak az e és g perturbáció játszik szerepet, azaz a tükröt sikerült merőlegesen beállítani, de a fókusztávolságokat nem, akkor a macskaszem átviteli mátrixát ketté bonthatjuk egy, az optikai tengelyre vett speciális tükrözésre és egy perturbáicós mátrixra:

$$\hat{M}_{hibas} = \begin{bmatrix} -1 + \frac{2eg}{F^2} & -2g + \frac{2eg^2}{F^2} \\ -\frac{2e}{F^2} & 1 - \frac{2eg}{F^2} \end{bmatrix}$$

$$= \hat{M}_0 + \hat{M}_p = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2eg}{F^2} & -2g + \frac{2eg^2}{F^2} \\ -\frac{2e}{F^2} & -\frac{2eg}{F^2} \end{bmatrix}$$
(7.26)

Azaz, kis e, g ( $e, g \ll F$ ) esetén a két perturbáció hatása szétválik.

$$y_{ki} = \left(-1 + \frac{2eg}{F^2}\right)y_{be} + \left(-2g + \frac{2eg^2}{F^2}\right)\vartheta_{be} \simeq -y_{be} - 2g \cdot \vartheta_{be} \tag{7.27}$$

Azaz első rendben  $y_{ki}$ -t csak a g perturbáció módosítja.

$$\vartheta_{ki} = -\frac{2e}{F^2} y_{be} + \left(1 - \frac{2eg}{F^2}\right) \vartheta_{be} \simeq \vartheta_{be} - \frac{2e}{F^2} y_{be}$$
(7.28)

Azaz első rendben  $\vartheta_{ki}$ -t csak az e perturbáció módosítja, a (7.28) összefüggésből az is látszik, hogy ez a módosító hatás sokkal kevésbé jelentő (mivel F >> e), mint a (7.27)-ben leírt.

Az elkövetkező néhány oldalban ezeket a hatásokat fogom szemléltetni szimulációs ábrák segítségével. Külön bontom, hogy hogyan befolyásolja az egyik, illetve a másik fényt jellemző adat megváltozását a kis perturbáció. Aztán pedig ábrázolom, hogy hogyan befolyásolja az egyik fényt jellemző adat megváltozása a másikat.

### Szimulációs eredmények

Először nézzük meg, hogy mi történik akkor, ha e,g egyaránt  $\pm 2$  cm között változtatom (most jegyzem meg, hogy a többi szimuláció során is ez a két érték között változtattam őket) és a bemenő lézerfényt jellemző vektor pedig:

$$v_{be}^0 = \begin{pmatrix} 1\\ 4 \end{pmatrix},$$

ahol a  $y_{be}$ -t mm-ben mérem és  $\vartheta_{be}$ -t mrad-ban (ahogy az következő szimulációk során is).



Az elkövetkező 4 ábrán azt láthatjuk, hogy hogyan függ a bemenő paraméterektől a kijövő fény adatai.



Most pedig változtassuk y-t:



### 7.4.2. Ferdén beállított tükör

Nézzük meg külön, hogy mit eredményez, ha a tükröt nem sikerült merőlegesen beállítani, de a két fókuszt igen. A macskaszemet átvitele megint szétbontható egy optikai tengelyre való speciális tükrözésre és egy perturbáló hatásra:

$$\begin{pmatrix} y_{ki} \\ \vartheta_{ki} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{be} \\ \vartheta_{be} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\varepsilon F \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{M}_0 \begin{pmatrix} y_{be} \\ \vartheta_{be} \end{pmatrix} + \vec{v}_p$$
(7.29)

Tehát az, hogy ferdén (nem merőleges) állítjuk be a tükröt, az azt eredményezi, hogy a döntés szögével arányosan tolódik el  $y_{ki}$  az  $y_{be}$ -hez képest, és  $\vartheta_{ki}$ -re pedig nincs hatása.

#### 7.4.3. Teljes perturbáció

Most pedig vizsgáljuk meg, hogy hogyan viselkedik a rendszer, ha a tükör és a fókusztávolságok hibáját együtt változtatjuk.

$$\vec{v}_{ki} = \left( \begin{bmatrix} -1 & 0\\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2eg}{F^2} & -2g + \frac{2eg^2}{F^2}\\ -\frac{2e}{F^2} & -\frac{2eg}{F^2} \end{bmatrix} \right) \vec{v}_{be} + \left( \begin{array}{c} 2\varepsilon F + 4g\varepsilon + 2\frac{eg}{F}\varepsilon\\ 2\frac{e}{F} \end{array} \right)$$
(7.30)

#### Szimulációs eredmények

Nézzük meg először, hogy hogyan módosul a kijövő fény optikai tengelytől vett távolsága a perturbációk függvényében, aztán azt hogy miként változik az optikai tengellyel bezárt szöge. A következő ábrákon látható szimulációknál a bemenő fény paramétere adott:

$$v_{be} = \begin{pmatrix} 1\\4 \end{pmatrix} \tag{7.31}$$

volt ( $[y] = \text{cm és } [\vartheta] = \text{mrad}$ ) és csak a perturbációk mértékét csavargattam. e és g értékét [-2:2] cm-es tartományban változtattam  $\varepsilon$ -n (tükör dőlésszögét), pedig 5, illetve 6 mrad értékeket vett fel.





A várakozásainknak megfelelően láthatjuk, hogy  $y_{ki}$ -re "rárakódott" viszonylag nagy konstans háttér ( $2\varepsilon F$ ), alig észrevehetően, de jelentkezik a g-ben lineáris tag ( $4g\varepsilon$ ) is. A  $\vartheta_{ki}$ -t ábrázoló grafikonon, pedig egyértelműen látszik a kis, e-vel arányos  $\left(2\frac{e}{F}\right)$  módosító hatása a tükör ferdeségének.

Összességében azt mondhatjuk, hogy elég jó közelítéssel különbontható a perturbációk hatása, mégpedig a következőképpen: e vezető rendben csak a  $\vartheta_{ki}$ -t befolyásolja, míg  $y_{ki}$ -t e és  $\varepsilon$ módosítja.

### 8. fejezet

# Szaturációs spektroszkópia

### 8.1. Elméleti háttér

### 8.1.1. Master-egyenlet

Az "Abszorpció és emisszió külső tér jelenlétében" c. fejezetben elején láttuk, hogy az atom és a foton háttérből álló teljes rendszer Hamilton-operátora a következőképpen írható fel:

$$\hat{H}_{tot} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{a+s} = \hat{H}_{sug.} + \hat{H}_a + \hat{H}_{a+s}$$
(8.1)

Ahol  $\hat{H}_0$  a kölcsönhatás nélküli rendszert írja le. A teljes rendszer sűrűségoperátorát szorzat alakban vesszük fel:

$$\varrho = \varrho_a \times \varrho_{sug.} \tag{8.2}$$

A fotontér hatását közelítőleg figyelembe tudjuk venni másodrendű perturbációszámítással. Ennek eredménye, hogy a  $\rho_a$  időfejlődésére kapunk egyenletet, ez a Master-egyenlet:

$$\dot{\varrho_a} = -\frac{i}{\hbar} \left[ \hat{H}, \varrho_a \right] = -\frac{i}{\hbar} \left[ H_a + V, \varrho_a \right] + L(\varrho_a) \,, \tag{8.3}$$

ahol V valamilyen kölcsönhatást ír külső térrel vagy másik rendszerrel (ilyen például kölcsönhatás külső elektromágneses térrel, pl. Rabi oszcilláció). A kvantált elektromágneses vákuum hatását írja le az  $L(\varrho_a)$  disszipációs tag, mely esetünkben

$$L(\varrho_a) := \frac{\gamma}{2} \left( 2 \left| g \right\rangle \left\langle e \right| \varrho_a \left| e \right\rangle \left\langle g \right| - \left| e \right\rangle \left\langle e \right| \varrho_a - \varrho_a \left| e \right\rangle \left\langle e \right| \right) \,, \tag{8.4}$$

alakú. Ez az operátor rendelkezik azzal a tulajdonsággal hogy  $Tr(L(\varrho)) = 0$ . Ennek következtében

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Tr}(\varrho) = \operatorname{Tr}(\dot{\varrho}) = \operatorname{Tr}\left(\frac{i}{\hbar} \left[H + V, \varrho\right]\right) + \operatorname{Tr}(L) = 0 + 0,$$

teház az atomi nívók betöltöttségének összege időben állandó. Az ilyen fajta disszipációs operátorokat Lindbland-alakúnak nevezik. Két-állapotú rendszer esetén

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Tr}(\varrho) = \frac{d}{dt}\left(\varrho_{gg} + \varrho_{ee}\right) = 0.$$
(8.5)

### 8.1.2. Master-egyenlet két-állapotú rendszerre

A mérés során egy több-nívós rendszert vizsgáltam, ami a mi szempontunkból tekinthető egy kél-állapotú rendszernek:



Koherens fénnyel gerjesztjük az atomokat, melyek Rabi-oszcillációt végeznek, s ezt a koherens fejlődést a spontán emisszió szakíthatja meg. A rendszert jellemző Hamilton-operátor a következő:

$$H = H_a + V = \varepsilon_e |e\rangle \langle e| + \varepsilon_g |g\rangle \langle g| - E(t)d(|e\rangle \langle g| + |g\rangle \langle e|)$$
(8.6)

Vezessük be a következő mátrixokat, amik segítségével szebb alakra hozható és mutatja az analógiát a spin forgatással:

$$\sigma_z = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g| \tag{8.7a}$$

$$\sigma_{+} = |g\rangle \langle e| \tag{8.7b}$$

$$\sigma_{-} = |e\rangle \langle g| \tag{8.7c}$$

Így

$$H_a = \frac{\hbar\omega_{eg}}{2} + \frac{\hbar\omega_{eg}}{2}\sigma_z \tag{8.8}$$

$$V = -E(t)d(\sigma_{+} + \sigma_{-})$$
(8.9)

És térjünk át fénnyel együtt forgó rendszerre (RWA), ahol az áttérés operátora a már ismeret:

$$U = e^{-\frac{i}{2}\omega_k \sigma_z t} \tag{8.10}$$

ahol  $\omega_k$  a fény körfrekvenciája. A közelítés lényege, hogy a fénnyel együtt forgó tagok járulékai elhanyagolhatóan kicsivé válnak (mivel kiátlagolódnak) és így a négy tagból a következő kettőt kapjuk:

$$H^{RWA} = \frac{\hbar\Delta}{2}\sigma_z - \frac{\Omega}{2}\left(\sigma_- + \sigma_+\right) = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \Delta & -\Omega \\ -\Omega & -\Delta \end{bmatrix}$$
(8.11)

A következő differenciálegyenletet kapjuk a sűrűségmátrixra:

$$\dot{\varrho}^{RWA} = -\frac{i}{\hbar} \left[ H^{RWA}, \varrho^{RWA} \right] + L(\varrho^{RWA}) \,. \tag{8.12}$$

Ami komponensenként a következő:

(0, 71)

$$\dot{\varrho}_{gg}^{RWA} = -\frac{i}{2}\Omega\left(\varrho_{ge} - \varrho_{eg}\right) + \gamma \varrho_{ee} \tag{8.13a}$$

$$\dot{\varrho}_{eg}^{RWA} = -\frac{i}{2} \left[ 2\Delta \varrho_{eg} - \Delta \left( \varrho_{gg} - \varrho_{ee} \right) \right] - \frac{\gamma + \gamma_F}{2} \varrho_{eg}$$
(8.13b)

$$\dot{\varrho}_{ge}^{RWA} = \dot{\varrho}_{eg}^{*RWA} \tag{8.13c}$$

$$\dot{\varrho}_{ee}^{RWA} = -\dot{\varrho}_{gg}^{RWA} \tag{8.13d}$$

Ahol  $\gamma = \frac{1}{T_1}$  a spontán emissziós ráta, azaz a gerjesztett állapot élettartalmának ( $T_1$ ) a reciproka,  $\gamma_F$  pedig egy fenomenológiai konstans, a fáziskoherencia bomlásának  $\gamma/2$  rátájához adódik hozzá:

$$\frac{\gamma + \gamma_F}{2} := \frac{1}{T_2} \tag{8.14}$$

A kristályba ágyazott Er ionok esetén  $\gamma_F$  írja le a rácsrezgésekkel való kölcsönhatásból származó koherencia-bomlást. Mindig teljesül, hogy  $T_2 \leq 2T_1$ , azaz a fáziskoherencia bomlásának időállandója rövidebb, mint a gerjesztett állapot élettartamának kétszerese.

A (8.13) egyenletrendszer szemléletesebb alakra hozható, ha bevezetjük a

$$U := \varrho_{eg} + \varrho_{ge}, \qquad V := i \left( \varrho_{eg} - \varrho_{ge} \right), \qquad W := \varrho_{ee} - \varrho_{gg}, \tag{8.15}$$

változókat. Ez a három valós szám alkotja a Bloch-vektort, mely egyenértékű a két-állapotú rendszer sűrűségmátrixával. Ekkor elegendő csak három egyenletet vizsgálni az eredeti négy helyett

$$\dot{U} = -\Delta V - \frac{1}{T_2} U \tag{8.16a}$$

$$\dot{V} = \Omega W + \Delta U - \frac{1}{T_2}V$$
 (8.16b)

$$\dot{W} = -\Omega V - \gamma \left( W + 1 \right) \tag{8.16c}$$

továbbá megmutatható az is, hogy bármely *ρ*-ra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$U^2 + V^2 + W^2 \le 1 \tag{8.17}$$

Tiszta állapotban ( $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ ) az egyenlőség áll fenn, nem tiszta állapotban ( $\rho_{eg}^2 < \rho_{ee}\rho_{gg}$ ) az egyenlőtlenség. A (8.16) egyenletek numerikus megoldása a következő ábrán látható:



Tehát látható, hogy bizonyos idő elteltével [U, V, W] beáll egy bizonyos értékre. Határozzuk meg ezt az értéket. Mivel a rendszer ekkor stacionárius állapotban van, így a mennyiségek megváltozása nulla ( $\dot{U}, \dot{V}, \dot{W} = 0$ ). Tehát a következő lineáris egyenletrendszerré egyszerűsödik a differenciálegyenlet-rendszerünk:

$$0 = -\Delta V - \frac{1}{T_2}U$$
 (8.18a)

$$0 = \Omega W + \Delta U - \frac{1}{T_2} U \tag{8.18b}$$

$$0 = -\Omega V - \gamma \left( W + 1 \right) \tag{8.18c}$$

amit ha megoldunk, akkor megkapjuk a stacionárius megoldásokat:

$$U = \frac{\Omega \Delta}{\Delta^2 + \frac{1}{T_2^2} + \frac{T_1}{T_2} \Omega^2}$$
(8.19a)

$$V = -\frac{\Omega/T_2}{\Delta^2 + \frac{1}{T_2^2} + \frac{T_1}{T_2}\Omega^2}$$
(8.19b)

$$W = -\frac{\Delta^2 + 1/T_2^2}{\Delta^2 + \frac{1}{T_2^2} + \frac{T_1}{T_2}\Omega^2}$$
(8.19c)

A nevezőben megjelenő  $\frac{T_1}{T_2}\Omega^2$  tag a teljesítmény-kiszélesedés. Ha a stacionárius és időfüggő megoldást együtt ábrázoljuk, akkor láthatjuk, hogy  $t \to \infty$ -ra a kettő megegyezik:



Érdemes megjegyezni, hogy ha  $\Omega \to \infty$  akkor  $W \to 0$ , azaz ekkor maximális a populációinverzió  $(P_e = P_g)$ . Tehát stacionárius állapotban nincsen populációinverzió. Továbbá azt is észrevehetjük, hogy a végállapot nem tiszta állapot, mivel az egyenlőtlenség teljesül a (8.17) kifejezésben, ezt jól láthatjuk a következő ábrán, ahol a három tengely a három Bloch-vektor komponens [U, V, W] és ebben a koordináta rendszerben ábrázoltam az időfejlődésüket és egy egység sugarú gömböt, ami az egyenlőséget szemlélteti. Tehát azok a pontok amik a gömbön belül vannak, azok nem teljesítik a tiszta állapotra vonatkozó feltételt.



### 8.1.3. Hullámterjedés polarizálható közegben

Tegyük fel, hogy egy dielektrikum elemi dipólmomentumokból áll. Ekkor a közeg térfogategységére eső polarizációja és az atomi sűrűségmátrixok közt a következő kapcsolat áll fenn:

$$P = n \operatorname{Tr}(\varrho d), \qquad (8.20)$$

ahol n a dipólok sűrűsége. Két-állapotú rendszert vizsgálunk, így a két állapot által kifeszített bázisban dolgozunk

$$P = n \sum_{q=e,g} \langle q|\varrho d |q \rangle = n \sum_{q,p=e,g} \langle q|\varrho |p \rangle \langle p|d |q \rangle$$
  
$$= n (\varrho_{eg} d_{ge} + \varrho_{ge} d_{eg}) = n \left( e^{-i\omega_{eg} t} \varrho_{eg}^{kh} d_{ge} + e^{i\omega_{eg} t} \varrho_{ge}^{kh} d_{eg} \right)$$
  
$$= n \left( e^{-i\omega_{L} t} \varrho_{eg}^{RWA} d_{ge} + c.c. \right)$$
(8.21)

ahol  $\varrho_{eg}^{RWA} = \frac{U-iV}{2}$  és  $\omega_L = \omega_{eg} - \Delta$ , valamint vezessük be a következő jelölést:

$$P^{+} := 2d_{ge}e^{-i\omega_{L}t}\varrho^{RWA} \qquad P^{-} := (P^{+})^{*}$$
(8.22)

Így

$$P = \frac{1}{2} \left( P^+ + P^- \right) \tag{8.23}$$

A Maxwell egyenletetek alapján ( $M = j = \rho = 0$ )

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t}, \quad \nabla D = 0, 
\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \nabla B = 0.$$
(8.24)

és az anyagegyenletek alapján

$$D = \varepsilon_0 E + P \qquad B = \mu_0 H \tag{8.25}$$

a következő egyenlőség áll fent a polarizáció és az általa keltett elektromos tér között:

$$\nabla \times H = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times B$$

$$= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times H = -\mu_0 \left( \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} \right)$$

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$
(8.26)
(8.26)
(8.26)
(8.26)
(8.26)
(8.27)

Ha E egy z irányba haladó síkhullám, akkor x és y irányokban a deriváltak eltűnnek, ezért

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}P.$$
(8.28)

Az (8.22) összefüggésben láttuk, hogy P harmonikusan függ az időtől, és mivel a (8.28) egyenlet lineáris, így a keltett  $E(t, z) = E_0(t, z) \cos(kz - \omega_L t)$  térnek is ezt az időfüggést kell követnie. Itt  $E_0(t, z)$  egy lassan változó burkolófüggvény. Ha felhasználjuk, hogy P pozitív és negatív frekvenciás tagokra bontható, akkor a (8.28) egyenlet két részre esik szét:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E^+ = \mu_0 \frac{\partial^2 P^+}{\partial t^2}$$
(8.29a)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E^- = \mu_0 \frac{\partial^2 P^-}{\partial t^2}$$
(8.29b)

Szimmetria tulajdonságok miatt foglalkozzunk csak a (8.29a) egyenlettel és a számolás során a burkoló második deriváltjait tartalmazó tagokat elhagyjuk, mivel feltesszük, hogy ezek kicsik  $(\omega/c^2) \cdot \partial E/\partial t$ - illetve  $k \cdot \partial E/\partial z$ -hez képest . Így a következő összefüggést kapjuk:

$$2ik\left[\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_{0}^{+}\right]e^{i(kz-\omega_{L}t)} = -\mu_{0}\omega_{L}^{2}P_{0}^{+}e^{i(kz-\omega_{L}t)}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_{0}^{+} = i\frac{k}{2}\frac{P_{0}^{+}}{\varepsilon_{0}} = i\frac{k}{2}\chi^{+}E_{0}^{+}$$
(8.30)

ahol  $P_0^+$ -t  $E_0^+$ -hoz hasonlóképpen definiáltam, ami a (8.22) összefüggésből leolvasható:

$$P_0^+ = 2nd_{ge}\varrho_{eg}^{RWA} \tag{8.31}$$

A vizsgált két-állapotú rendszerre a szuszceptibilitás:

$$\chi^{+}(\Delta) = n \frac{2d_{ge}\varrho_{eg}^{RWA}}{\varepsilon_{0}E_{0}^{+}} = n \frac{2d_{ge}\frac{U-iV}{2}}{\varepsilon_{0}E_{0}^{+}} = \frac{n|d_{eg}|^{2}\left(\Delta + i/T_{2}\right)}{\varepsilon_{0}\hbar\left(\Delta^{2} + \frac{1}{T_{2}^{2}} + \frac{T_{1}}{T_{2}}\Omega^{2}\right)}$$
(8.32)

A (8.30) egyenletet fénysebességgel mozgó koordinátarendszerbe transzformáljuk. Az új változók segítségével

$$\tau := t - \frac{z}{c}, \qquad \xi = z, \qquad (8.33)$$

egyszerűbb alakra hozhatjuk a hullámegyenletet:

$$\frac{\partial}{\partial\xi} E_0^+(\tau,\xi) = i \frac{k}{2} \chi^+ E_0^+(\tau,\xi) \,. \tag{8.34}$$

Az egyenlet megoldása:

$$E_0^+(\tau,\xi) = \exp\left(i\frac{k}{2}\chi^+\xi\right) E_0^+(\tau,0).$$
(8.35)

### 8.2. Mérés

#### 8.2.1. A várható jelalak meghatározása

Az 5. fejezetben bemutattuk a szaturációs spektroszkópia mérés vázlatát és leírtuk a szükséges lépéseket. Az első lépésben a beíró impulzus a (8.19) által meghatározott Bloch-vektorral jellemzett állapotba hozza az Er ionokat. Itt  $\Delta \equiv \delta$  a beíró lézerfény és az inhomogénen kiszélesedett vonal egy frekvenciájának a különbsége. Feltesszük, hogy az inhomogén spektrumvonal olyan széles, hogy a burkolója a  $[U(\delta), V(\delta), W(\delta)]$  változásának frekvenciatartományán állandó. A kiolvasó (próba) impulzus rövid  $\gamma^{-1}$ -hez képest, azaz  $\gamma \tau \ll 1$ . Továbbá az impulzus területe legyen sokkal kisebb mint egy,  $\Omega \tau \ll 1$ . Ekkor a (8.16) egyenletben W megváltozása nullának vehető, azaz marad a beíró impulzus hatására felvett érték  $W_0(\delta)$ . Ezen kívül feltesszük, hogy  $\tau/T_2 \gg 1$ . Ez azért jogos, mert ritkaföldfémmel adalékolt egykristályokban  $\gamma^{-1} \approx 100 - 1000 \mu s$ , míg  $T_2 \leq 1 \mu s$ . Az előbbi feltételek teljesülése esetén (8.16) egyenletből U és V megoldható rögzített  $W_0(\delta)$  mellett:

$$U = -\frac{(\Delta - \delta)\Omega_p}{(\Delta - \delta)^2 + \frac{1}{T_c^2}} W_0(\delta), \qquad (8.36a)$$

$$V = \frac{\Omega_p / T_2}{(\Delta - \delta)^2 + \frac{1}{T_2^2}} W_0(\delta) .$$
(8.36b)

Ezek az egyenletek meghatározzák a próba impulzus által keltett polarizációt. A (8.32) képlet alapján a próba impulzusra vonatkozó szuszceptibilitás:

$$\chi^{+}(\Delta) = -n \frac{|d|^2}{\varepsilon_0 \hbar} \int \frac{(\Delta - \delta) + i/T_2}{(\Delta - \delta)^2 + \frac{1}{T_2^2}} W_0(\delta) \, d\delta \,. \tag{8.37}$$

Ez egy konvolúció egy Lorentz-görbe és  $W_0(\delta)$  között. A (8.19c) egyenletben a vonalszélességben a teljesítmény-kiszélesedés dominál a  $T_1/T_2 \gg 1$  szorzó miatt. Kis amplitúdójú beíró impulzus esetén ( $\Omega_w$  Rabi-frekvencia kicsi) a konvolúció eredménye sorbafejthető, a szuszceptibilitás képzetes részére kapjuk:

$$\operatorname{Im}(\chi) = \frac{n|d_{eg}|^2}{\varepsilon_0 \hbar} \left( 2 - \frac{2\frac{T_1}{T_2}\Omega_w^2}{\Delta^2 + \frac{4}{T_2^2} + \frac{2T_1}{T_2}\Omega_w^2} \right) , \qquad (8.38)$$

mely a próba impulzus elnyelését írja le a próba impulzus elhangolásának függvényében. Ez egy teljesítmény-kiszélesedett Lorentz-görbe, melynek szélessége  $(4/T_2^2 + 2T_1/T_2\Omega_w^2)^{1/2}$ .

### 8.2.2. T<sub>2</sub> becslése Z-scan módszerrel

Az előző fejezet végén azt kaptuk, hogy ha a próba impulzus frekvenciájával pásztázzuk a mintát a beíró impulzus frekvenciája körül, akkor a jel átvitelét egy olyan haranggörbe határozza meg, melynek félértékszélesség-négyzzete

$$\sigma^2 = \frac{4}{T_2^2} + \frac{2T_1}{T_2} \Omega_w^2 \,. \tag{8.39}$$

Ha mozgatjuk a mintát a fókuszáló lencse fókuszpontja körül, akkor a  $\Omega_w$  Rabi-frekvencia változik. A Raylaigh-hossztól távol a félértékszélesség-négyzete így függ a távolságtól:

$$\sigma^{2}(z) = \frac{4}{T_{2}^{2}} + \frac{2T_{1}}{T_{2}} \left(\frac{dE}{\hbar}\right) = \frac{4}{T_{2}^{2}} + \frac{B}{\left(z_{1} - z_{0}\right)^{4}} = \frac{4}{T_{2}^{2}} + \frac{B}{z^{4}},$$
(8.40)

ahol  $z_0 = f$  a lencse fókusztávolsága és  $z_1$  a minta és a detektor közti távolság. A számolás során felhasználtam, hogy mivel a nyaláb z-vel arányosan tágul, így a térnek  $z_1^2$ -tel arányos felületen kell eloszlania.

A mérés során a diódalézert közel maximális telejsítménnyel üzemeltettük, amely 100mW. Ekkor kaptunk stabil jelet. A lézerfény ki-be kapcsolását az AOM kristály végezte. A frekvenciamodulációt viszont a lézerbe épített piezoelektromos kristállyal végeztük, mert az AOM frekvenviatartománya túl kicsinek bizonyult. A beíró impulzus hossza tipikusan 4000-5000µs volt. A próba impulzust 200 $\mu$ s alatt pásztáztuk a kívánt tartományon, mely 600MHz nagyságú volt. A lézer vonalszélessége 1MHz körüli, így egy frekvencián 1/3  $\mu$ s volt a próba impulzus hossza.

A félértékszélességek minden z-hez egy Lorentz-görbe illesztés segítségével tehetjük meg (Az ábrán látható grafikon a z = 12cm-hez tartozik):



A félértékszélesség 10 különböző pontban felvett értéke alapján a

$$f(z) = A + \frac{B}{z^4} \tag{8.41}$$

görbét illesztettem. Az illesztett görbe a következő ábrán látható:



az illesztés alapján  $T_2$  értéke alulról megbecsülhető:

$$T_2 = \sqrt{1/A} = 90 \pm 2 {
m ns}$$
 .

### 8.2.3. $T_1$ becslése

A beíró és próba impulzusok közötti késleltetés változtatható a mérés során. Ekkor a (8.36) képletben a  $W_0(\delta)$ -nak egy időfejlesztett alakját kell behelyettesíteni. A (8.19) alapján, szabad fejlődés során  $W_0(\delta)$  exponenciálisan lecseng  $\exp(-\gamma t)$  időfüggéssel. Ezért mérve a próba impulzus elnyelési görbéjének magasságát a késleltetési idő függvényében a  $\gamma$  bomlási ráta meghatározható. A következő ábra a mért Lorentz-görbék magasságának időfüggését mutatja:



A görbére exponenciális függvényt illesztve azt kapjuk, hogy  $\gamma^{-1} \approx 2254 \pm 29 \mu s$ . Ez egy igen hosszú, miliszekundumos élettartam.

# Irodalomjegyzék

- [1] L.D. Landau, E.M. Lifsic: *Elméleti fizika II: Klasszikus erőterek*, (Tankönyvkiadó, Budapest, 1976).
- [2] Geszti Tamás: Kvantummechanika, (TYPOTEX, Budapest, 2007).
- [3] Nagy Károly: Kvantummechanika, (Tankönyvkiadó, Budapest).
- [4] A. Nussbaum, R.A. Phillips: *Modern optika mérnököknek és kutatóknak*, (Műszaki Könyvkiadó, 1982).
- [5] B.E.A. Saleh and M.C. Teich: *Photonics*, (Wiley-Interscience; 1 edition, 1991).