

Neutrínóoszilláció és kvantumösszefonódás részletes vizsgálata

Meszéna Balázs

2010. május 26.

Témavezető: Patkós András

Tartalomjegyzék

1. A kísérleti helyzet	2
2. Az oszcilláció standard leírása	6
3. Bomlás során keletkező neutrínók leírása	8
3.1. Az oszcilláció közelítő formulája	8
3.2. Numerikus számolások	13
4. A neutrínó "hullámfüggvénye"	13
5. Sűrűségmátrix	18
5.1. Közegen való áthaladás	19

Bevezetés

Az elmúlt fél évszázadban a neutrínófizika a kísérleti részecskefizika fontos részterületévé vált. A dolgozatban a neutrínófajták egymásbaalakulásának, a neutrínóoszcillációnak elméleti leírásával foglalkozunk. Az első szakaszban, bevezetesként ismertetünk néhány, az oszcilláció jelenségét bizonyító kísérletet. Ezt követően, felidézzük a jelenség egyszerűsített, jól ismert levezetését. Ebből megkaphatjuk a legfontosabb összefüggést: az oszcillációs hossz és a neutrínótömegek közti összefüggést. Azonban látni fogjuk, hogy ez a leírás elméleti szempontból nem tekinthető tisztának. Ez motiválja a dolgozat fő részét, melyben egy részecskebomlás során keletkező neutrínó-lepton pár összefonódott állapotának elemzéséből származtatjuk az oszcillációt. Ez a leírás is, mint ahogy a standard tárgyalás, egydimenziós egyenesvonalú terjedést leíró lesz.

A 3.1 szakaszban levezetünk egy közelítő formulát az oszcillációra a szokásos leíráshoz képest új paraméterekkel, melyek meghatározzák az oszcilláció részleteit. Ennek eredményeként olyan jelenségeket vizsgálunk meg, melyeket a standard formalizmus nem tartalmaz. Ezek után a fenti modellben a közelítéseket nem tartalmazó képletet használva numerikusan is megvizsgáljuk az oszcillációt, és ezt összevetjük a közelítő képlettel. Az ezt követő szakaszban megvizsgáljuk a neutrínó megtalálási valószínűségét a tér és az idő függvényében. Végül megkonstruáljuk a neutrínó sűrűség-mátrixát, amelynek fejlődését vizsgáljuk a neutrínónyaláb anyagon való áthaladása során.

1. A kísérleti helyzet

1964-ben John Bahcall végzett először részletes számítást a Napban zajló fúziós folyamatokat leíró Napmodellel a keletkező neutrínó fluxusra. A számítást a kísérleti kimutatás célja motiválta. A neutrínók észlelése nehéz feladat, mivel a neutrínók nagyon gyengén hatnak kölcsön az anyaggal. Így a detektoroknak kis hatásfokú, hatalmas berendezéseknek kell lenniük.

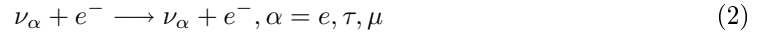
Az első meghatározó mérés a témában R. Davis nevéhez fűződik. Ez volt a Homestake kísérlet az 1960-as években, amely a klórnak neutrínó besugárzás hatására bekövetkező argonná alakulásán alapult. A kutatók a föld alá telepítettek egy 600 tonna tetraklór-etilént tartalmazó tartályt. A beérkező neutrínók reakcióba léptek a klóratomokkal:



A keletkező argon radioaktív, melyet a kísérletiek kémiai módszerekkel néhány hetente kigyűjtöttek a tartályból és megmérték az aktivitását. Ezzel állapították meg mennyi neutrínó érkezett be.

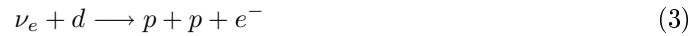
A kísérlet során a Napból jövő neutrínófluxusra jóval kisebb értéket mértek a kutatók, mint azt várták. Sokan azonban nem bíztak ebben a mérésben a rengeteg hibaforrása miatt. A kísérletben azt találták, hogy átlagosan naponta 0.5 argon atom keletkezik, azaz néhány atomot kellett kigyűjteni a hatalmas tartályból!

Ennél megbízhatóbb méréseket végeztek a Japánban található Super-Kamiokande (SK) detektorral 1998-ban. Ez egy 1000m-rel a föld alatt lévő 50000 tonnás víztartályból áll, melynek falán fotoelektron-sokszorozók vannak. A detektálás alapja a



reakció során meglökődött elektron által kibocsátott Cserenkov-sugárzás. Ez egy kúp mentén történik, a tartály falán ennek vetületét láthatjuk. A detektor szintén elektron-neutrínóra a legérzékenyebb (ennek a folyamatnak a legnagyobb a hatáskeresztmetszete). A mérések eredménye itt is az volt, hogy szignifikánsan kevesebb neutrínót mértek, mint az várható volt.

Ezek magyarázatának a neutrínóoszillációt javasolták, mely szerint a különböző fajtájú („ízű”) neutrínók egymásba alakulhatnak. Így a Napban keletkező elektron-neutrínók egy részét tau-, illetve müon-neutrínó formájában kell keresnünk! Ehhez egy olyan detektorra volt szükség, amely érzékeny mindhárom ízre. Ezért hozták létre 1999-ben a Kanadában lévő Sudbury Neutrino Observatory-t (SNO), mely 2000m-rel a föld alatt 1000 tonnányi nehézvizet tartalmazott. A detektálás alapja a következő reakciók voltak:



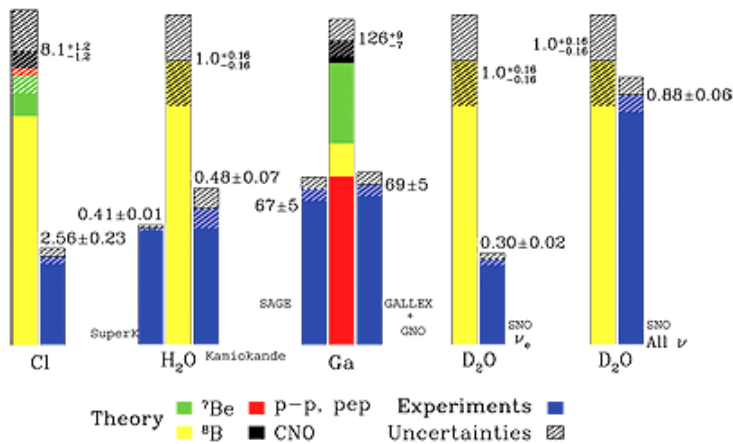
Ezek közül a kegyfontosabb a középső reakció, mivel az egyenlő mértékben érzékeny mindhárom neutrínó-fajtára.

A kísérletek eredményét és az oszcilláció nélküli elméleti várakozást az 1. ábra foglalja össze. Az utolsó oszlopon látszik az SNO-ban mért teljes neutrínófluxus és a Napmodellből számolt elméleti érték egymáshoz viszonyított értéke. Láthatjuk, hogy a két érték a hibán belül megegyezik.

A második természeti neutrínókkal megfigyelt jelenség az atmoszférikus neutrínókkal kapcsolatos. A légkörben lévő atommagok és a kozmikus sugárzás erősen kölcsönhat egymással és pionok keletkeznek. Utóbbi egy müonra és müon-neutrínóra bomlik:



Total Rates: Standard Model vs. Experiment
Bahcall–Serenuelli 2005 [BS05(OP)]



1. ábra. A Nap-neutrínó kísérletekben mért neutrínófluxusok és elméleti jóslatok összehasonlítása. Forrás: <http://indico.cern.ch/getFile.py/access?resId=1&materialId=slides&confId=57523>

A müon pedig tovább alakul pozitronná, elektron-neutrínóvá, valamint anti-müon-neutrínóvá.

$$\mu^+ \longrightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu. \quad (7)$$

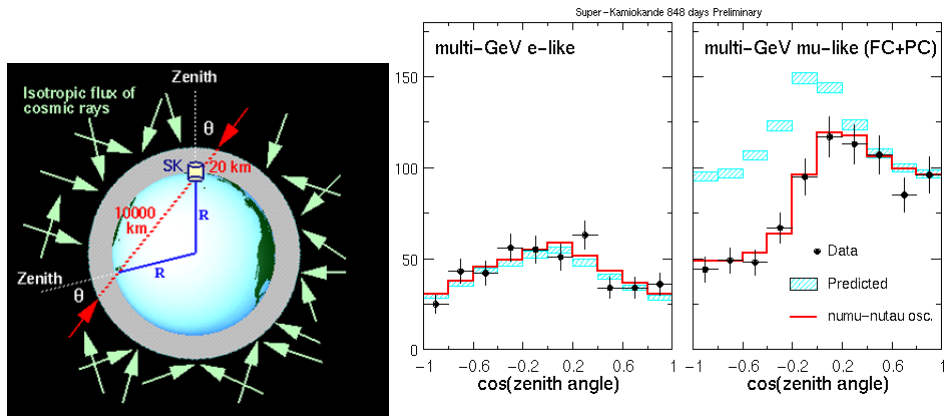
Ebből azt várjuk, hogy a detektált ν_μ : ν_e arány 2:1 lesz. A Super-Kamiokande-ban vizsgálták 1998-tól kezdve az elektron-, illetve müon-neutrínó fluxust a bejövő neutrínók iránya és a zenit közt bezárt szög függvényében. Ennek eredményét láthatjuk a 2. ábrán[6]. Látható, hogy a zenit felől érkező neutrínókra nagyjából teljesül a 2:1-es arány, azonban a Föld túoldaláról érkező neutrínókra egyáltalán nem. Ezt a jelenséget is magyarázza az oszcilláció elmélete, miszerint a távolról érkező müonneutrínók egy része tauneutrínóvá alakul.

Léteznek reaktoros kísérletek is, melyek atomerőműben termelődő izotópok gyenge bomlásából származó, mesterséges neutrínónyalábbal dolgoznak. 2005-ben a KamLand detektorral mérték a környező reaktorokban inverz béta-bomlással keletkező anti-elektron-neutrínófluxust és a beérkező neutrínók energiáját. Így a spektrumról kaptak információkat. A 3. ábrán[5] látható az elektron-neutrínó megtalálási valószínűsége L_0/E_ν függvényében, ahol L_0 a reaktor és a detektor távolsága, E_ν pedig a beérkező neutrínó energiája. Ez az egyetlen eddigi olyan kísérlet, ahol közvetlenül sikerült egy oszcillációs periódust kimérni.

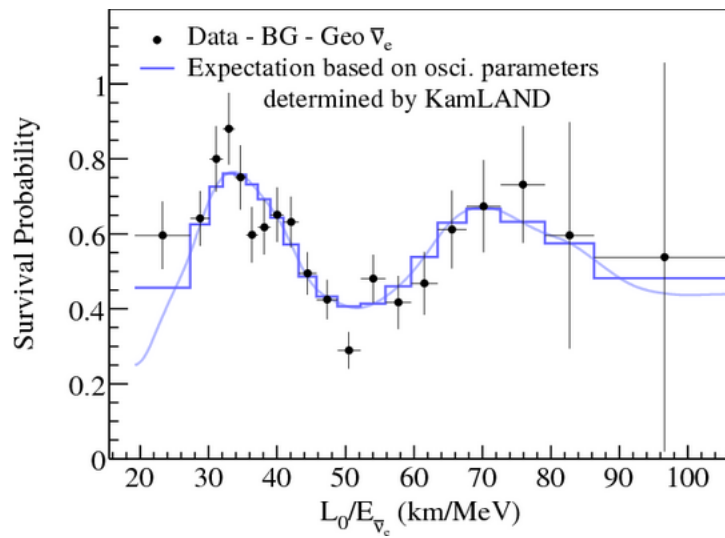
Megemlítjük még a K2K kísérletet, melyben a KEK gyorsítóból jövő pionokat irányítottak a Super-Kamiokande felé. A mérés elrendezése a 4. ábrán látszik. 12 GeV-es protonnyaláb csapódott egy alumínium targetbe, ahol pionok keletkeztek. Ezeket egy 200 méteres bomlási csőbe fókuszálták, ahol az alábbi reakció megy végbe:

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu. \quad (8)$$

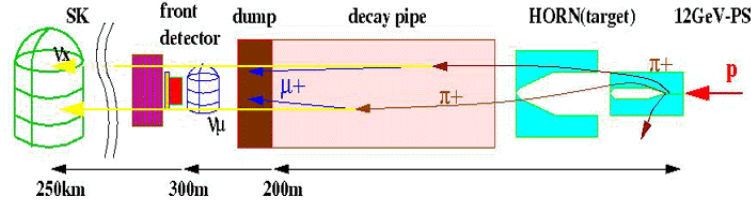
A neutrínók egy közeli detektorhoz érkeztek, mely a SK-detektor kicsinyített mása. Ezek után a



2. ábra. SK detektor elhelyezkedése az atmoszférikus neutrínók mérésében (balra). Elektron-, illetve müion-neutrínófluxus a zenitszög függvényében (jobbra).



3. ábra. A KamLAND mérés eredménye. Az elektron-neutrínó megtalálási valószínűsége L_0/E_{ν_e} függvényében.



4. ábra. A K2K kísérlet elvi felépítése. Forrás: <http://neutrino.kek.jp/intro/k2k.html>

nyaláb tovább haladt a 250km-re lévő Super-Kamiokande detektorhoz. Így össze tudták hasonlítani a közeli és távoli detektorokba érkező neutrínók számát. Ezzel a méréssel is az oszcilláció jelenségét sikerült megerősíteni. Látható, hogy a pion bomlásában keletkező neutrínók fontos szerepet kapnak a kísérletekben.

Ugyanezen az elven működik az USA-ban lévő MINOS kísérlet. Itt a neutrínók a Fermilab-ban keletkeznek, továbbá itt található a közeli kis detektor is. A távoli, nagy detektor ettől 735km-re, Észak Minnesotában a Soudan bányában helyezkedik el.

2. Az oszcilláció standard leírása

Sok esetben a három neutrínó keveredésének leírása helyett két neutrínóval is lehet tárgyalni a jelenséget közelítőleg. Pl. a müon-neutrínó elsősorban tau-neutrínóvá alakul.

Tekintsük át a neutrínóoszcilláció szokásos, egyszerű levezetését két neutrínó oszcillációjára korlátozódva! A $\hbar = 1$, $c = 1$ egységrendszert használjuk. Eszerint az íz sajátállapotok (f_1, f_2) nem esnek egybe a tömeg sajátállapotokkal:

$$|f_1\rangle = \cos\theta|a\rangle + \sin\theta|b\rangle, \quad (9)$$

$$|f_2\rangle = -\sin\theta|a\rangle + \cos\theta|b\rangle, \quad (10)$$

ahol θ a keveredési szög. Egy reakció során íz sajátállapotok keletkeznek, amik nem stacionáriusak.

$$|\Psi(0)\rangle = |f_1\rangle \quad (11)$$

$$|\Psi(t)\rangle = \cos\theta|a\rangle \exp(-iE_a t) + \sin\theta|b\rangle \exp(-iE_b t), \quad (12)$$

ahol $E_a = \sqrt{m_a^2 + p^2}$ a p impulzusú, m_a tömegű neutrínó energiája. A valószínűsége annak, hogy t idő múlva f_1 ízű neutrínót találunk a következő:

$$P_1 = \cos^4\theta + \sin^4\theta + \frac{1}{2}\sin^2(2\theta)\cos(E_a - E_b)t. \quad (13)$$

Mivel a neutrínó tömege a kinetikus energiájához képest kicsi $E_a - E_b \approx \frac{m_a^2 - m_b^2}{2p} = \frac{\Delta m^2}{2p}$. Általában az oszcillációt nem az idő függvényében vizsgáljuk, hanem a keletkezés helyétől való eltávolodás függvényében, vagy rögzített távolságnál az energia függvényében (ld. 3. ábra). Mivel a neutrínó gyakorlatilag fénysebességgel terjed $x \approx t$. Így

$$P_1 = \cos^4\theta + \sin^4\theta + \frac{1}{2}\sin^2(2\theta)\cos\frac{\Delta m^2}{2p}x. \quad (14)$$

Ha három neutrínó keveredését vizsgáljuk, a fenténél bonyolultabb lesz az oszcillációs görbe. Ilyen oszcillációk láthatóak az általam készített számítógépes Mathematica demonstráción[3], ahol a keveredési szögek és a neutrínó tömegértékek változtathatók.

Az oszcillációs modell paramétereinek az 1. fejezet kísérleteinek együttes leírásával mért értékei (forrás: http://en.wikipedia.org/wiki/Neutrino_oscillation):

$$\theta_{12} = 33.9^{+2.4}_{-2.2}^\circ, \quad (15)$$

$$\theta_{23} = (45 \pm 7)^\circ, \quad (16)$$

$$\Delta m_{21}^2 = 8.0^{+0.6}_{-0.4} \cdot 10^{-5} eV^2, \quad (17)$$

$$|\Delta m_{23}^2| \approx |\Delta m_{31}^2| = 2.4^{+0.6}_{-0.5} \cdot 10^{-3} eV^2. \quad (18)$$

Az (1,2) indexű adatok a napneutrínó jelenséget meghatározó paraméterek. A (2,3) indexűek pedig a müon-neutrínó tau-neutrínóba alakulásának paraméterei. Továbbá θ_{13} -ról tudjuk (ami a $\nu_\tau \rightarrow \nu_e$ átalakulásért felelős), hogy 3° -nál kisebb, így a müon-neutrínó oszcillációját jól közelíthetjük 2 fajta neutrínó figyelembe vételével (mint ahogy azt tettük).

Látható, hogy Δm_{23}^2 -nek, illetve Δm_{31}^2 -nek az előjelét nem ismerjük, így kétféle sorrendje lehet a tömegértékeknek. Az egyik lehetőség a normál tömegspektrum: $m_1 < m_2 \ll m_3$. A másik az invertált spektrum: $m_3 \ll m_1 < m_2$.

Ezek ismeretében már meg tudjuk állapítani, hogy mikor tárgyalhatunk egy jelenséget két neutrínó figyelembevételével három helyett. Amennyiben müon-neutrínó keletkezik egy folyamatban, akkor tau-neutrínó fog elsősorban keletkezni, mivel $|\Delta m_{23}| \gg \Delta m_{21}$.

A levezetés és a kapott eredmény megragadja a legfontosabb tulajdonságát a jelenségnek, azonban több kérdés is felmerül vele kapcsolatban.

1. A számolásban nem törődtünk a neutrínó koordinátatérbeli hullámfüggvényével, azonban a $x \approx t$ helyettesítés csak akkor értelmes, ha a részecske jól lokalizált (helybizonytalansága sokkal kisebb, mint az a távolság, amit a neutrínó megtesz miközben egy periódusnyit oszcillál). Ehhez a neutrínó impulzusának elég határozatlannak kell lennie.
2. Másrésről a levezetésben határozott impulzussal számoltunk (nem is beszélve arról, hogy a két neutrínó diszperziós relációjába ugyanazt a p értéket írtuk), tehát a valódi bizonytalanság csak kicsi lehet. Világos, hogy a neutrínót hullámcsomagként lehet csak elképzelni, melynek impulzusbizonytalansága teljesíti a fenti követelményeket[1].
3. Amennyiben a határozott tömegű neutrínókat síkhullámként kezeljük, felmerül a kérdés, hogyan tud két különböző frekvenciájú hullám interferálni.
4. Egy másik érdekességet is érezhetünk kvalitatívan, amiről a fenti eredmény semmit nem tud. A két különböző tömegű neutrínó csoportsebessége egy kicsit eltér egymástól, így hosszú idő múlva a hozzájuk tartozó, adott kiterjedésű hullámfüggvények átfedése megszűnik[1](a gyorsabb elhagyja a lassabbat). Mivel így az interferencia jellegű tag megszűnik, az oszcillációnak is le kell csengenie. Ezt követően állandó számú neutrínót találunk minden ízből. Pl. f_1 neutrínó megtalálási valószínűsége a következő lesz:

$$P_1 = \cos^4 \theta + \sin^4 \theta. \quad (19)$$

5. A levezetésben a neutrínó impulzusa határozott volt, energiája pedig határozatlan. Ezt a tulajdonságát kézzel raktuk bele. Megkérdezhetjük, hogy miért nem határozott energiával és határozatlan impulzussal számoltunk. Vagy továbbmenve: miért nem volt az energia és az impulzus is határozatlan?
6. Tudjuk továbbá, hogy keletkeznek egyéb részecskék is a neutrínók mellett egy folyamatban. Ezeknek szintén van energiájuk, impulzusuk, így ahhoz, hogy az energia-, illetve impulzuserővel elszámoljunk, ezeket is figyelembe kell venni.

Ezek vezetnek ahhoz az igényhez, hogy a jelenség elméletét megértsük precízebben, kevesebb feltételezéssel. A fentiekből világos továbbá, hogy ehhez egy olyan konkrét, teljesebb kvantummechanikai modell szükséges, amely a bomlást kellő részletességgel írja le.

3. Bomlás során keletkező neutrínók leírása

3.1. Az oszcilláció közelítő formulája

A neutrínók nem forrásmentesen keletkeznek, hanem egy bomlás során. Tárgyalásunkat a jelenség elején kezdjük: a bomló részecskénél. Majd a neutrínó és a bomlás során keletkezett másik részecske együttes hullámfüggvényét analizálva fogjuk az oszcillációt értelmezni. A jelenség prototípusa a pion bomlás: $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$, általában ezt fogjuk a szemünk előtt tartani. Azonban az oszcilláció részletei megértésének, illetve numerikus vizsgálatok céljából nemcsak a fenti reakció adataival fogunk dolgozni, hanem az adatokat egy széles tartományban hangoljuk. Továbbá egydimenziós modellel dolgozunk. A közelítő számolás alapötlete, valamint a kapott eredmények egy része az [2] cikkben is megtalálható, azonban a dolgozatban a számolás menete részben eltér a cikktől, melynek eredményeként egy általánosabb, több részletet tartalmazó kompakt formulát kapunk.

A két neutrínó-tömegállapotba való bomlást két külön csatornának tekintjük. Meg fogjuk határozni a keletkezett neutrínó-müon kétrészecske hullámfüggvényt külön arra a két esetre amikor m_a , illetve m_b tömegű neutrínó keletkezik. A bomlás során keletkezett állapot

$$|\Psi(x_1, x_2, t)\rangle = \cos(\theta)|a\rangle\psi_a(x_1, x_2, t) + \sin(\theta)|b\rangle\psi_b(x_1, x_2, t). \quad (20)$$

Itt tehát ψ_a (ψ_b) az m_a (m_b) tömeghez tartozó térbeli hullámfüggvény, $|a\rangle$ (illetve $|b\rangle$) pedig az egyik íz-térbeli tömegsajátállapot. A hullámfüggvényeket Weisskopf-Wigner közelítéssel [4] határozzuk meg. Először felírjuk a szabad, bomló pion hullámfüggvényét. Az M tömegű, Γ tömegbizonytalanságú (azaz szélességű) pion hullámcsomag a következő alakú az exponenciális bomlástörvény szerint:

$$\psi_{\pi_0} = \int dp f(p) \exp[ipx - (iE_p + M\Gamma/2E_p)t], \quad (21)$$

ahol a p impulzushoz tartozó energia: $E_p = \sqrt{p^2 + M^2}$. Mivel Γ a nyugalmi rendszerbeli félszélesség, ez mozgó rendszerben $M\Gamma/E_p$ -vé transzformálódik. A normáltság miatt $\int |f(p)|^2 = \frac{1}{2\pi}$.

Ekkor, elegendően hosszú idő után, mikor az összes pion elbomlott (azaz $t \gg E_p/M\Gamma$), a Weisskopf-Wigner közelítésben a müon és neutrínója összefonódott hullámfüggvénye [2] alakképlete szerint:

$$\psi_\gamma = N \int dp_1 \int dp_2 f(p) \frac{\exp(ip_1 x_1 + ip_2 x_2 - i(E_1 + E_2)t)}{E_1 + E_2 - E_p + iM\Gamma/2E_p}, \quad (22)$$

ahol a γ index az a , vagy b értékeket veheti fel, $p = p_1 + p_2$. A fenti képlet levezetésének vázolata a Függelékben található. Az 1 index utal valamelyik határozott tömegű neutrínóra, a 2-es pedig a müonra. N a normálási tényező $N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\Gamma M |v_{12}|/E_P}$, itt P az $f(p)$ függvény maximumhelye. A számolás során feltételezzük, hogy ez a maximum elég éles, azaz P sokkal nagyobb, mint az impulzus bizonytalansága. Ehhez hasonlóan jelöljük a keletkező részecskék impulzusainak legvalószínűbb értékét P_1 , illetve P_2 -vel. Ekkor $v_{12} = v_1 - v_2 = P_1/E(P_1) - P_2/E(P_2)$ a legvalószínűbb relatív sebessége a két részecskének. Mivel a neutrínó gyakorlatilag fénysebességgel halad: $v_1 \approx 1$, $v_{12} = 1 - v_2$ (feltételezzük, hogy a neutrínó jobbra halad a pozitív irányba).

Ebben a pontban azt vizsgáljuk, mekkora annak a valószínűsége, hogy müon-neutrínót detektálunk bármilyen helykoordinátával. Ekkor tehát a müont nem észleljük, így x_2 koordinátára kiintegrálunk. Gyakorlatban a mérés egy adott méretű (emberi léptékekhez képest meglehetősen nagy) detektorral történik. Amennyiben ennek mérete nagyobb, mint a neutrínó helybizonytalansága, úgy egy valódi kísérletben a neutrínó hullámfüggvényének részleteit nem tudjuk mérni, csak a detektor méretének megfelelő intervallumon történő integrálját (azonban a detektor méretének pontosságával meg tudjuk mondani, hol van a neutrínó a detektálás pillanatában). Mint látni fogjuk a 4. szakaszban, a neutrínó térbeli szétkentsége legalább $1/\Gamma$ a pion nyugalmi rendszerében. Pl. pion bomlás esetén $1/\Gamma$ néhány méter nagyságrendű, míg a detektorok mérete több tíz méter. Ekkor tehát x_1 -re ki kell integrálnunk a detektor méretének megfelelően. Ha azonban ez sokkal nagyobb, mint a neutrínó helybizonytalansága, úgy korlát nélkül végezhetjük az integrálást.

A müon-neutrínó állapot: $\cos(\theta)|a\rangle + \sin(\theta)|b\rangle$. Így ez a valószínűség a következő:

$$P = \cos^4 \theta + \sin^4 \theta + 2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \text{Re}I, \quad (23)$$

ahol $I = \int dx_1 \int dx_2 \psi_a^* \psi_b$. Ennek a mennyiségnek a kiszámolása okozza a nehézséget, ezt fogjuk közelítőleg megtenni.

Elvégezve a koordinátákra vonatkozó integrált:

$$I = (2\pi N)^2 \int dp_1 dp_2 \frac{|f(p)|^2 \exp(i(E_a - E_b)t)}{(E_a + E_2 - E_p - iM\Gamma/2E_p)(E_b + E_2 - E_p + iM\Gamma/2E_p)}, \quad (24)$$

ahol $E_a = \sqrt{m_a^2 + p_1^2}$. Mivel a neutrínó tömege kicsi a tipikus impulzusához képest, az előző képletet sorbafejthetjük: $E_a - E_b = \frac{m_a^2 - m_b^2}{2p_1} = \frac{\Delta m^2}{2p_1}$.

P_1 , illetve P_2 -t energia- és impulzusmegmaradásból határozhatjuk meg. A neutrínó tömegét elhanyagolva:

$$P_1 + P_2 = P, \quad (25)$$

$$|P_1| + \sqrt{P_2^2 + m^2} = \sqrt{M^2 + P^2}, \quad (26)$$

ahol m a müon tömege.

Most fejtünk sorba a (24) kifejezésben a számlálóban és a nevezőben $x = p_1 - P_1$, illetve $y = p_2 - P_2$ szerint lineáris rendig. Továbbá használjuk a $v = P/E_P$ jelölést:

$$(2\pi N)^2 \exp(i \frac{\Delta m^2}{2P_1} t) \int dp_1 dp_2 \frac{|f(p)|^2 \exp(-i \frac{\Delta m^2}{2} \frac{x}{P_1^2} t)}{(\frac{m_a^2}{2P_1} + (1-v)x + (v_2-v)y - iM\Gamma/2E_P)} \frac{1}{(\frac{m_b^2}{2P_1} + (1-v)x + (v_2-v)y + iM\Gamma/2E_P)}.$$

Megmutatjuk, hogy ha ezekkel a közelítésekkel élünk, akkor az integrál faktorizálódik. Térjünk át az integrálásokban az $\alpha = p_1 + p_2 (= p)$, illetve a $\beta = (1-v)x + (v_2-v)y$ változókra. Ebben a pontban a továbbiakban $E_2 = E(P_2) = \sqrt{P_2^2 + m^2}$:

$$I = (2\pi N)^2 \exp(i \frac{\Delta m^2}{2P_1} t) \frac{E_2}{E_2 - P_2} F(t) G(t), \quad (27)$$

ahol

$$F = \int d\alpha |f(\alpha)|^2 \exp(-i \frac{\Delta m^2}{2P_1^2} \frac{v-v_2}{1-v_2} (\alpha - P)t) \quad (28)$$

$$G = \int d\beta \frac{\exp(-i \frac{\Delta m^2}{2P_1^2} \frac{\beta}{1-v_2})}{(\frac{m_a^2}{2P_1} + \beta - iM\Gamma/2E_P)(\frac{m_b^2}{2P_1} + \beta + iM\Gamma/2E_P)}. \quad (29)$$

Szétbontottuk tehát a két integrált, mindkettő egy Fourier-transzformáció. $F(t)$ lényegében $|f|^2$ (a pion hullámsomagjának) transzformáltja, míg G egy konkrét integrál, amit reziduum-tétel segítségével az alsó félsíkot körbezárva el is végezhetünk:

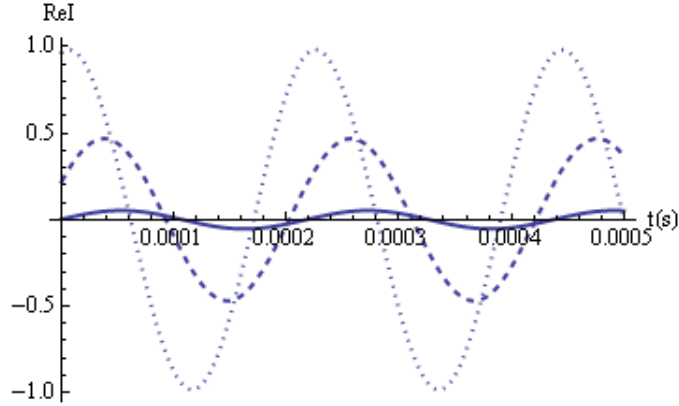
$$G(t) = \frac{2\pi}{-\frac{\Delta m^2}{2P_1} i + M\Gamma/E_P} \exp(-\frac{\Delta m^2}{4P_1^2} \frac{M\Gamma}{E_P(1-v_2)} t) \quad (30)$$

A végeredmény tehát:

$$I = \exp(i \frac{\Delta m^2}{2P_1} t) F(t) \frac{2\pi}{-\frac{\Delta m^2}{2P_1} \frac{E_P}{M\Gamma} i + 1} \exp(-\frac{\Delta m^2}{4P_1^2} \frac{M\Gamma}{E_P(1-v_2)} t). \quad (31)$$

A kifejezés első tényezője a 2. fejezetben levezetett, koszinuszos oszcillációt adja meg. Ettől a kapott formulánk három tényezőben különbözik. Nagy t -re az oszcilláció az utolsó tényező szerint exponenciálisan csökken. Minél nagyobb Γ , annál gyorsabb ez a lecsengés. Hasonló a helyzet $F(t)$ -vel, mivel ez a kezdeti impulzuseloszlás Fourier-transzformáltja. Így minél nagyobb a pion impulzus bizonytalansága, annál keskenyebb lesz $F(t)$ függvény. Ez a két tag a neutrínó impulzus bizonytalanságával áll kapcsolatban. Minél bizonytalanabb, annál több frekvenciájú oszcillációt kell összegeznünk, amik bizonyos idő után kioltják egymást (koherenciájuk megszűnik).

Érdekes (31) harmadik tényezője, ami egy komplex szorzó. Ennek abszolút értéke $A = \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}$, fázisa $\delta = -\arctan(\eta)$, $\eta = \frac{\Delta m^2}{2P_1} \frac{E_P}{M\Gamma}$. Ez akkor játszik szerepet, ha a Γ szélesség nagyon keskeny, összemérhető $\frac{\Delta m^2}{2P} \frac{E_P}{M}$ -vel (ez pion-bomlás esetén nem teljesül, ott ez a tag elhanyagolható). Ez azt jelenti, hogy a bomló részecske élettartama összemérhetővé válik az oszcilláció periódusidejével. Ekkor a koszinuszos oszcilláció amplitúdója lecsökken, fázisa eltolódik. Ennek szemléletes magyarázata a következő: mivel nem tudjuk a neutrínó keletkezésének pillanatát,



5. ábra. Kis Γ értékeknél (hosszú élettartam esetén) az első pár oszcilláció ábrázolása. A pöttyös görbénél $\Gamma = 10^{-10}eV$, a szaggatottnál $\Gamma = 10^{-11}eV$, a folytonosnál $\Gamma = 10^{-12}eV$.

különbözőjű fázisú rezgéseket kell összegeznünk. Minél nagyobb a pion élettartama, annál szélesebb időintervallumot kell összegeznünk. Az eredmény egy kisebb amplitúdójú, eltolt fázisú szinuszos rezgés. Amennyiben az élettartam nagyon nagy, úgy minden információnk elvesz, mikor keletkezett a neutrínó, így az oszcilláció megszűnik. Ez a tényező megjelenik [2]-ben is, míg az első kettő a fent vázolt módosított számolásunkból jön ki.

Vizsgáljuk meg ezeket az effektusokat különböző Γ és impulzusbizonytalanság mellett. Legyen a szemléltetéskor használt konkrét impulzuseloszlás egy ablakfüggvény:

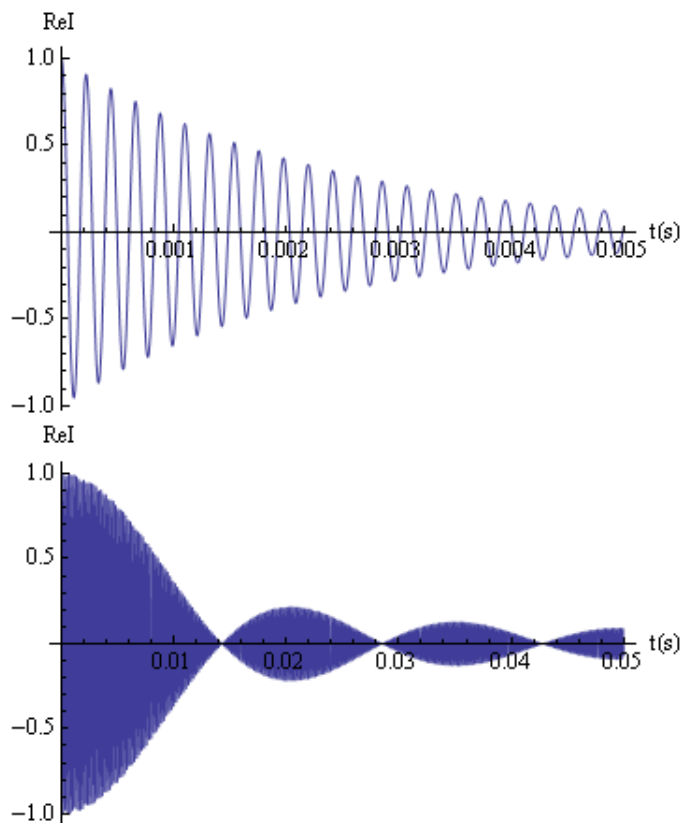
$$f(p) = \frac{1}{\sqrt{4\pi d}} \quad (32)$$

amennyiben $-d < p < d$, ezen kívül pedig nulla.

A példákban $M = 130MeV$, $m = 100MeV$ (azaz megközelítőleg a pion, illetve a müon tömege), $\Delta m^2 = 10^{-3}eV^2$ (ez szintén egy reális adat), a bomló részecske impulzusának várható értéke nulla (azaz P zérus). Ekkor az oszcillációs idő nagyságrendje $10^{-4}s$. Ezen adatok mellett az 5. ábrán látható az első néhány oszcilláció különböző kicsi Γ értékek mellett. Látható, hogy minél kisebb Γ , az oszcilláció amplitúdója annál kisebb. Valamint a fellépő fázistolás annál nagyobb (maximum $\pi/2$). Ez tehát az az eset, amikor a bomló részecske élettartama összemérhetővé válik (majd nagyobb lesz), mint az oszcillációs idő. Ne feledjük, hogy a közelítés csak akkor jó, ha $t \gg 1/\Gamma$. Ebben az esetben ez azt jelenti, hogy az első néhány oszcillációig nem érvényes a grafikon. Itt Γ nem a pion-bomlásból származó érték, hanem annál kisebb. Abban a folyamatban $\Gamma = 2.6 \cdot 10^{-8}eV$, azaz az itt illusztrált hatás elhanyagolható.

A 6. ábrán az oszcilláció lecsengését láthatjuk. A fenti görbén Γ nagy, és d hozzá képest kicsi, így a lecsengést Γ határozza meg, exponenciális alakú lesz. Ez a Γ érték sokkal nagyobb, mint a pion valódi szélessége. Ennek csak az az oka, hogy valódi adat esetén a grafikon áttekinthetetlen lesz, mert nagyon sok oszcilláció lezajlik a lecsengésig. Valódi adat esetén a lecsengés idejének nagyságrendje

$$\tau \approx \frac{P_1^2}{\Delta m^2} \frac{1}{\Gamma} \approx 10^{32} \frac{1}{MeV} \approx 10^{10}s \approx 300év. \quad (33)$$



6. ábra. Az ábrákon a kezdeti tömegbizonytalanságból, illetve impulzusbizonytalanságból származó lecsengés. Az első ábrán $\Gamma = 1MeV$, $d = 10^{-5}MeV$, a másodikon $\Gamma = 10^{-5}MeV$, $d = 1MeV$.

Tehát nagyságrendileg 10^{14} oszcilláció következik be addig. Ez azt jelenti, hogy egy szupernóvában keletkező neutrínó esetén jelentős ez az effektus. A lenti görbén a lecsengést az impulzus bizonytalansága dominálja. Ennek alakja $f(p)$ -től függ, annak Fourier-transzformáltja. Ablakfüggvény esetén tehát $\frac{\sin t}{t}$ profilú.

Amennyiben a neutrínó elég jól lokalizált az oszcillációs hosszhoz képest, az idő helyébe most is helykoordinátát írhatunk (mert ebben az esetben a fenti kiintegrálás egy szűk helytartományra vonatkozik, most pedig ennek a tartománynak pl. a közepét írhatjuk), ahogy azt a standard leírásban tettük.

A fenti eset nem áll fent, amikor az 5. ábrán látható jelenség számottevő. Ugyanis, ennek feltétele a következő:

$$\frac{2P_1}{\Delta m^2} \gg \frac{1}{\Gamma}, \quad (34)$$

azonban ez nem igaz mikor a bomló részecske élettartama (szintén $1/\Gamma$) az oszcillációs idővel összemérhetővé válik.

Hangsúlyozzuk, hogy itt egyetlen bomló pion kvantum bizonytalanságáról van szó. Egy

kísérletben a neutrínónyaláb impulzuseloszlása jóval szélesebb egyszerűen azért, mert az anyarészecske nyalábja (ez esetben a pionnyaláb) különböző energiájú részecskéket tartalmaz. Ugyanez igaz természetes neutrínóforrások is. Például egy szupernóva robbanás során az elsődleges neutrínókon kívül keletkeznek többek között pionok is. Ezek bomlásából további neutrínók jönnek létre.

Becsüljük meg ezen pionok termikus bizonytalanságának nagyságrendjét. A csillag összeomlása során a hőmérséklet $kT \sim 10MeV$ körüli. Nem-relativisztikus közelítéssel élve a pionok sebességeloszlására Boltzmann-eloszlást tételezünk fel. Ekkor a momentumok: $\bar{v}^2 = \frac{8kT}{\pi m}$, $\overline{v^2} = \frac{3kT}{m}$. A pionok impulzusszélességére tehát mondhatjuk: $m\sqrt{\overline{v^2} - \bar{v}^2} = \sqrt{mkT \cdot 0.45} \approx 25MeV$.

3.2. Numerikus számolások

Ebben a pontban a közelítő (31) eredményt hasonlítjuk össze a numerikusan számolt értékekkel. Ehhez térjünk vissza (24) képlethez. Arra az esetre korlátozódunk megint, amikor $P = 0$ és $f(p)$ az előző pontban leírt ablakfüggvény. Egy közelítéssel élünk: a számlálóban szereplő E_p helyett M -et írunk. Ezzel másodrendű hibát vétünk csak, hisz $\frac{\partial E_p}{\partial p} = 0$ a $p = 0$ helyen. Ekkor adódik:

$$I = (2\pi N)^2 \int dp_1 dp_2 \frac{|f(p)|^2 \exp(i(E_a - E_b)t)}{(E_a + E_2 - M - i\Gamma/2)(E_b + E_2 - M + i\Gamma/2)}. \quad (35)$$

Ablakfüggvény esetén a p_2 szerinti integrál egzaktul elvégezhető. A kifejezés meglehetősen hosszú, jelöljük csak $H(p_1)$ -el. Tehát

$$I = (2\pi N)^2 \int dp_1 H(p_1) \exp(i(E_a - E_b)t) \quad (36)$$

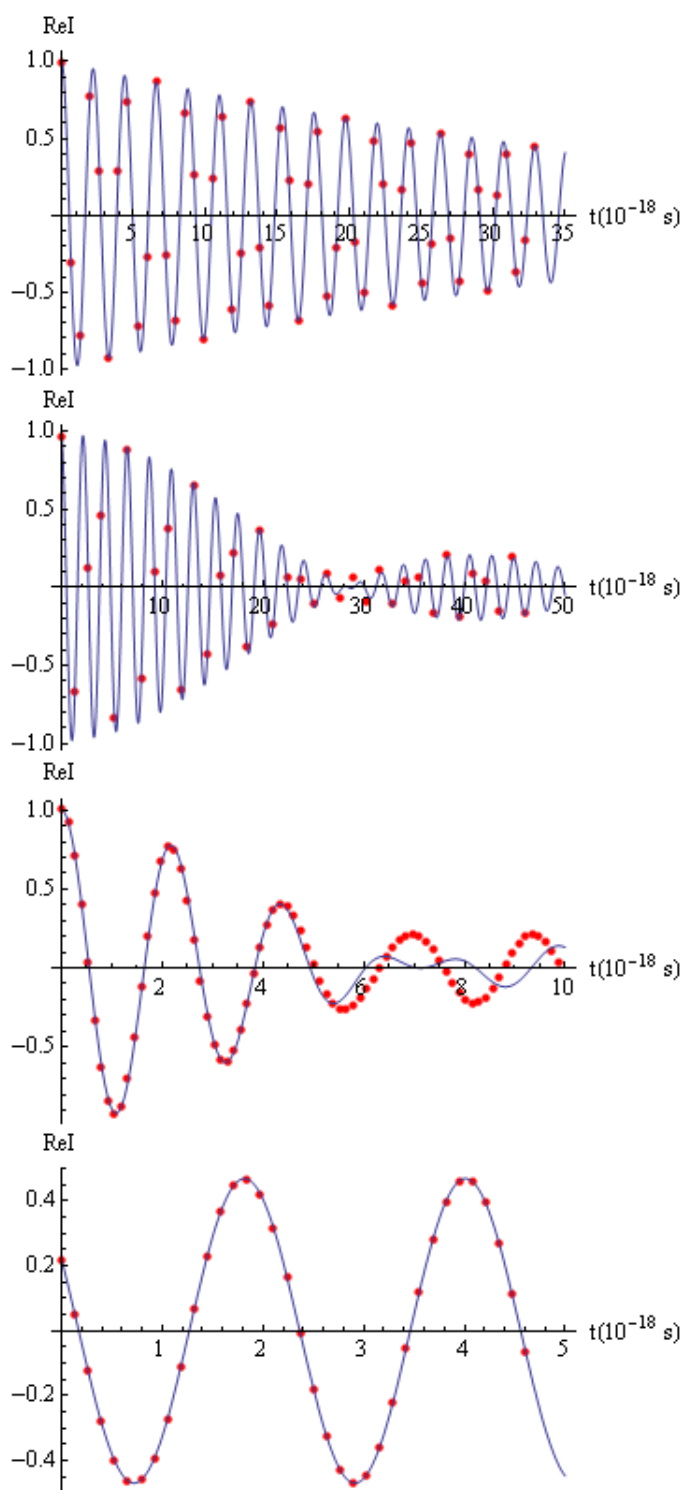
egyszeres integrál adódik, amit numerikusan vizsgáltam a Mathematica program segítségével. A numerikus integrál elvégzése nem könnyű: az integrandusban szerepel egy gyorsan oszcilláló tag és egy erősen szinguláris tag is. Ezek miatt numerikusan nem írhattam kísérleti paramétereket az integrálba. A részecskefizika energiái (ebben az esetben M , Δm^2 , illetve Γ) túlságosan különböző nagyságrendűek, ezért nem tudja a program stabilan, rövid időn belül kiszámolni a kívánt értéket. Így $\Delta m^2 = 0.1MeV^2$ értékkel dolgozunk ebben a pontban.

A 7. ábrán demonstrálunk négy paraméterbeállítást. Láthatjuk, hogy aránylag lassú lecsengés esetén nagyon pontos az egyezés. A második esetben akkor látunk egy kicsiny eltérést, ha a burkoló nulla értéket vesz föl, azonban lényegében itt is a közelítő formulára illeszkedő pontokat láthatunk. Jelentős eltérést akkor kapunk, ha (a közelítés feltételét megsértve) a lecsengés időtartama összemérhető az oszcillációs idővel, azaz néhány oszcilláció után a lecsengés jelentős.

4. A neutrínó "hullámfüggvénye"

Ebben a szakaszban az előzőnél megpróbálunk többet mondani a neutrínóról. Nemcsak arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy adott időpontban milyen eséllyel találunk egy adott fajta neutrínót bárhol a térben, hanem arra is, hogy hol találtuk. A leptont továbbra sem detektáljuk, így az ő koordinátájára integrálnunk kell. Ekkor a helytől függő megtalálási valószínűség:

$$P(x_1) = \cos^4 \theta \int dx_2 |\psi_a|^2 + \sin^4 \theta \int dx_2 |\psi_b|^2 + 2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) Re I(x_1) \quad (37)$$



7. ábra. Numerikus eredmények összehasonlítása a közelítő formulával. A folytonos görbe a közelítő formula, míg a pontok a numerikus számítások eredményei. Felülről az első grafikonon $d = 1 \text{ MeV}$, $\Gamma = 0.5 \text{ MeV}$, a másodikon $d = 5 \text{ MeV}$, $\Gamma = 0.01 \text{ MeV}$, a harmadikon $d = 20 \text{ MeV}$, $\Gamma = 1 \text{ MeV}$, a negyediken $d = 0.01 \text{ MeV}$, $\Gamma = 1 \text{ keV}$.

ahol $I(x_1) = \int dx_2 \psi_a^* \psi_b$.

Technikailag egy hármas integrált kell elvégeznünk. Az előző alponthoz hasonlóan $P = 0$ -t vizsgálunk, és a nevezőben E_p -t M -mel közelítjük. Ekkor

$$I(x) = 2\pi N^2 \int dp_1 dp_2 dq_1 \frac{f^*(p_1 + p_2) f(q_1 + p_2) \exp(i(q_1 - p_1)x - i(E_{q_1} - E_{p_1})t)}{(E_{p_1} + E_2 - M - i\Gamma/2)(E_{q_1} + E_2 - M + i\Gamma/2)}. \quad (38)$$

Ha f -et ablakfüggvénynek vesszük, akkor $q_1 - p_1 = s > 0$ esetén $f^*(p_1 + p_2) f(q_1 + p_2) \neq 0$, ha $-p_1 - d < p_2 < -q_1 + d$, ez akkor lehetséges, ha $0 < s < 2d$. Fordítva, ha $s < 0$, $f^*(p_1 + p_2) f(q_1 + p_2) \neq 0$, ha $-q_1 - d < p_2 < -p_1 + d$, $-2d < s < 0$. Csakúgy mint az előző pontban, a p_2 -es integrál elvégezhető, melynek eredményét $G(q_1, p_1)$, valamint $J(q_1, p_1)$ -el jelöljük s előjelétől függően (a két eset az integrálási határokból különbözik). Ekkor:

$$I_+(x) = 2\pi N^2 \int_{2d > s > 0} dp_1 dq_1 \exp(isx - i(E_{q_1} - E_{p_1})t) \cdot G(q_1, p_1). \quad (39)$$

Hasonlóan I_- -nál J szerepel, $I = I_+ + I_-$.

A kettős numerikus integrál a Mathematicában a „LocalAdaptive” módszerrel végeztem, miközben a „PrecisionGoal” 5-ös értékre volt állítva (utóbbi opció áll kapcsolatban a numerikus pontossággal).

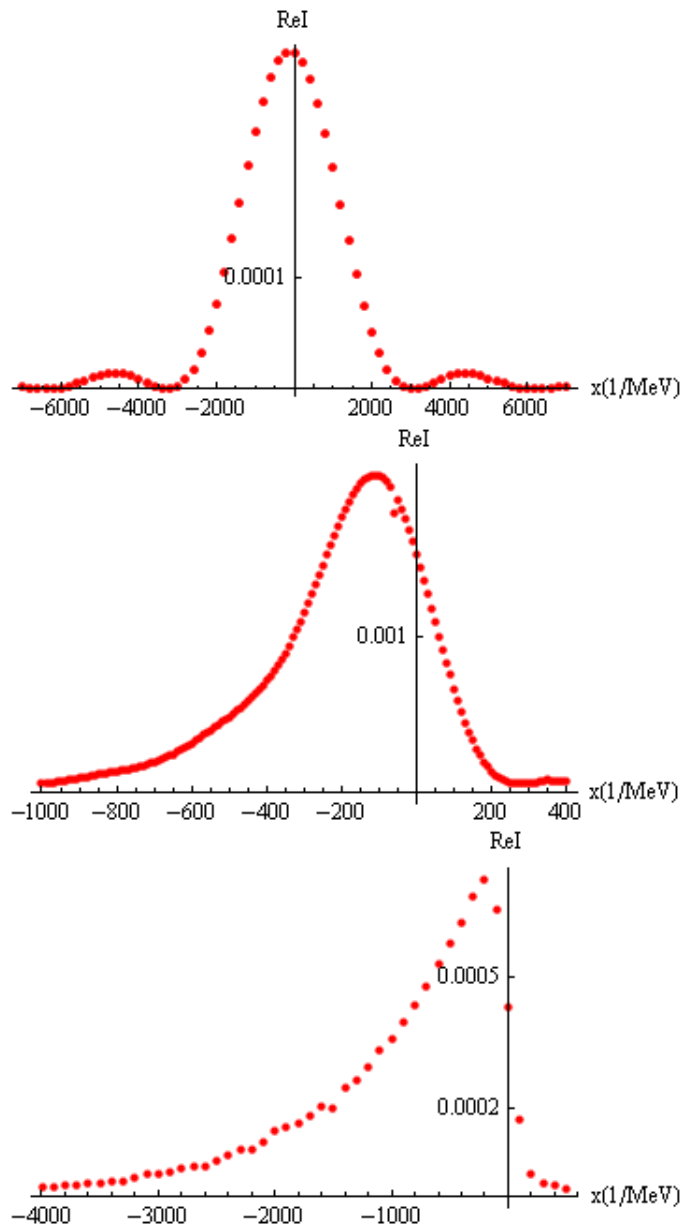
Nézzük meg a megtalálási valószínűség alakját különböző Γ és d értékek mellett (8. ábra). Itt technikailag a $t = 0$ állapot van ábrázolva, azonban ekkor még nem érvényes a közelítés (nincs még keletkezett neutrínó). Később azonban (ha a lecsengéstől eltekintünk) a profil ugyanígy néz ki, amikor épp maximális erősítés van (csak a koordinátatengelyen balra eltolódik a függvényalak). Amennyiben d lényegesen kisebb, mint Γ , egy szimmetrikus görbét kapunk, melynek szélessége $\sim 1/d$. Γ -t csökkentve a görbe jobb oldalának alakja változatlan marad, bal oldala viszont szélesedik, egyre aszimmetrikussabbá válik a grafikon. Mikor Γ lényegesen kisebb lesz a baloldali farok kiterjedése kb. $\sim 1/\Gamma$ lesz.

A kezdeti megtalálási valószínűség ezen alakját kvalitatívan is megérthetjük. Ha Γ nagy, azaz a bomlás pillanatszerű, akkor a neutrínó elkentségét a kezdeti pion hullámcsomag elkentsége határozza meg. Utóbbi azonban szimmetrikus, így a kapott jelalak is az, melynek határozatlansága így nagyságrendileg $1/d$. Ha azonban Γ kicsi, nem tudjuk $1/\Gamma$ pontosságnál jobban, hogy a neutrínó mikor keletkezett. Így azt sem, mekkora utat tett meg, mégha a keletkezésének $1/d$ helybizonytalansága kicsi is. Ekkor annak a valószínűségét, hogy a neutrínó egy adott helyen van, az határozza meg, hogy mikor keletkezett a bomlás során, ennek valószínűségeloszlása pedig exponenciális. Ezt úgy lehet szemléletesen látni, hogy sok piont képzelünk el. Ekkor a pionsokaság aktivitása időben exponenciális. Ekkor tehát a jelalak aszimmetrikus.

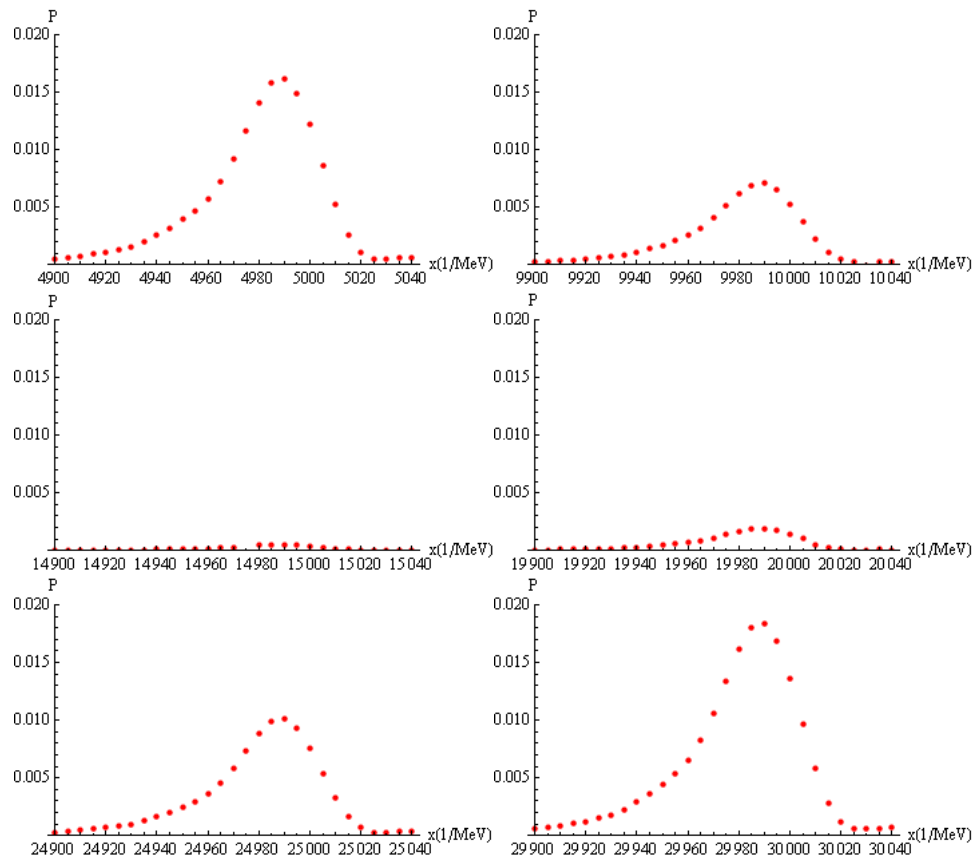
Amennyiben d és Γ értéke nagyságrendileg megegyezik, az előző két magyarázatot kell összerakni. Visszatérve a sok pion képhez, a jelalak maximumától jobbra azok a neutrínók adnak járulékat, amik $t \approx 0$ -ban keletkeztek. Ezek szétkentsége a pionforrás szétkentségéből adódik ($1/d$). A maximumtól balra a jelalak alakját, szélességét pedig az adja, hogy még $1/\Gamma$ ideig keletkeznek neutrínók (egyre kevesebb számban).

A 9. ábrán a teljes megtalálási valószínűség $-P(x)$ - időbeli oszcillációja látható egy perióduson keresztül. A neutrínó tömegek $m_a^2 = 0.02 MeV^2$, illetve $m_b^2 = 0.01 MeV^2$. Továbbá $d = 0.1 MeV$, $\Gamma = 0.05 MeV$ volt. Két egymást követő ábra között $3.3 \cdot 10^{-18} s$ időkülönbség van, a tengelyen növekvő x -értékek jelzik a neutrínócsomag haladását.

Természetesen nagyon hosszú idő múltán az oszcilláció lecseng és a függvényalak állandósul, ha a hullámcsomag szétfolyásától eltekintünk.



8. ábra. A megtalálási valószínűség a hely függvényében a $t = 0$ pillanatban. Az első ábrán $d = 0.001\text{MeV}$, $\Gamma = 0.01\text{MeV}$, a másodikon $d = 0.01\text{MeV}$, $\Gamma = 0.005\text{MeV}$, a harmadikon $d = 0.01\text{MeV}$, $\Gamma = 0.001\text{MeV}$.



9. ábra. A helyfüggő megtalálási valószínűség időbeli fejlődése (oszillációja). A grafikonok időben balról jobbra haladva következnek.

A 2. fejezet kérdéssorozatának lévő 4. pontjában már megsejtettük a lecsengést. Okként pedig a különböző tömegű neutrínókomponsek szétcsúszását hoztuk fel. Ismerve az oszcilláció időfüggését, valamint a hullámcsomag alakját, vizsgáljuk meg ezt az állítást!

A (31) képletből látszik, hogy a lecsengés karakterisztikus idejét (τ_1) Γ , illetve d paraméterek közül a nagyobbik határozza meg:

$$\tau_1 \sim \frac{P_1^2}{\Delta m^2 \max(\Gamma, d)}. \quad (40)$$

Ahhoz, hogy megállapítsuk, hogy a lecsengés oka kizárólag a szétcsúszás, becsüljük meg, ez mekkora idő elteltével következik be. A két különböző tömegű neutrínókomponens sebességkülönbségének nagyságrendje (az irreleváns 2-es faktortól eltekintve): $\Delta v = \Delta(P_1/E_1) \sim \Delta m^2/P_1^2$. A hullámcsomagok kiterjedésének nagyságrendjét pedig Γ és d közül a kisebbik határozza meg: $l \sim 1/\min(\Gamma, d)$. Így a szétcsúszás karakterisztikus idejére

$$\tau_2 \sim \frac{P_1^2}{\Delta m^2 \min(\Gamma, d)} \quad (41)$$

adódik.

Látható, hogy a két nagyságrend csak akkor egyezik meg, ha $\Gamma \sim d$. Amennyiben valamelyik paraméter nagyságrendekkel eltér a másiktól, így a lecsengés lényegesen hamarabb következik be, mint a szétcsúszás. Az első pillanatra meglepő jelenség oka, hogy az ebben a szakaszban számolt megtalálási valószínűség a lepton koordinátáira ki van integrálva. A (24) interferencia tagban azonban a kétrészecske ψ_γ hullámfüggvényeket kell összeszoroznunk (és csak azt követően lehet a lepton koordinátájára integrálni). Ezek kiterjedése azonban kisebb, mint a megtalálási valószínűség.

d megbecslése nehéz (kissé önkényes) feladat. Ennek egy lehetséges módja az alábbi gondolat. A K2K kísérletben a pionok elbomlása egy mintegy 200m-es bomlási csőben történik. Feltesszük, hogy a pionok helybizonytalansága ennél nem sokkal kisebb, pl. $\Delta x \sim 10m$. Ekkor az impulzus bizonytalansága $d \sim 2 \cdot 10^{-8} eV$. Ez megegyezik Γ nagyságrendjével, tehát τ_1 és τ_2 nagyságrendje is nagyjából azonos, azaz 300 év körül van (ld. (33)).

5. Sűrűségmátrix

Láthatjuk, hogy a neutrínót csak a műionnal összefonva tudjuk tiszta hullámfüggvényként leírni. Ha csak a neutrínó adataival akarunk dolgozni, akkor az ő sűrűségmátrixát kell megkonstruálnunk. Ebben a szakaszban ezt tesszük meg.

A teljes rendszer sűrűségoperátora a hullámfüggvényekkel felírva a tömegsajátállapotok segítségével (az időfüggés jelölését elhagyva):

$$\begin{aligned} |\Psi \rangle \langle \Psi| &= \cos^2 \theta \psi_a^*(x_1, x_2) \psi_a(y_1, y_2) |a \rangle \langle a| + \sin^2 \theta \psi_b^*(x_1, x_2) \psi_b(y_1, y_2) |b \rangle \langle b| \\ &+ \sin \theta \cos \theta \psi_a^*(x_1, x_2) \psi_b(y_1, y_2) |a \rangle \langle b| + \sin \theta \cos \theta \psi_b^*(x_1, x_2) \psi_a(y_1, y_2) |b \rangle \langle a|. \end{aligned} \quad (42)$$

Amennyiben a lepton koordinátáit nem mérjük, úgy azokra ki kell átlagolni. Sűrűségeoperátor formalizmusban ez azt jelenti, hogy a műonnak megfelelő koordinátákat egybeejtjük és integrálunk rá. A csak neutrínóadatokat tartalmazó sűrűségoperátor tehát:

$$\hat{\rho} = \cos^2 \theta \phi_{aa} |a\rangle\langle a| + \sin^2 \theta \phi_{bb} |b\rangle\langle b| + \sin \theta \cos \theta \phi_{ab} |a\rangle\langle b| + \sin \theta \cos \theta \phi_{ba} |b\rangle\langle a|, \quad (43)$$

ahol

$$\phi_{\alpha\beta}(x, y) = 2\pi N^2 \int dp_1 dp_2 dq_1 \frac{f^*(p_1 + p_2) f(q_1 + p_2) \exp(i(q_1 y - p_1 x - E_{q_1} + E_{p_1})t)}{(E_{p_1} + E_2 - M - i\Gamma/2)(E_{q_1} + E_2 - M + i\Gamma/2)}. \quad (44)$$

Az α, β indexek rendre az $E_{p_1}(m_\alpha)$ és az $E_{q_1}(m_\beta)$ diszperziós relációban szereplő tömegre utalnak.

Ha csak az íz-térbeli viselkedés érdekel minket, ki kell átlagolni a koordináta-térre. Ez úgy történik, hogy az x, y „indexeket” egybeejtjük, és a helykoordinátára integráljuk a kifejezést. Így tömeg-bázisban a kapott sűrűségmátrix:

$$\rho_m = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & I \sin \theta \cos \theta \\ I^* \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Láthatjuk, hogy ennek kiszámításának nehéz részét (I számolását) az előző szakaszokban már megtettük. Az íz-bázisról tömeg-bázisra való áttérést a vektorok között az

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (46)$$

mátrix végzi. Így a redukált sűrűségmátrixot íz-bázisban a $\rho = U^{-1} \rho_m U$ képlet segítségével határozhatjuk meg.

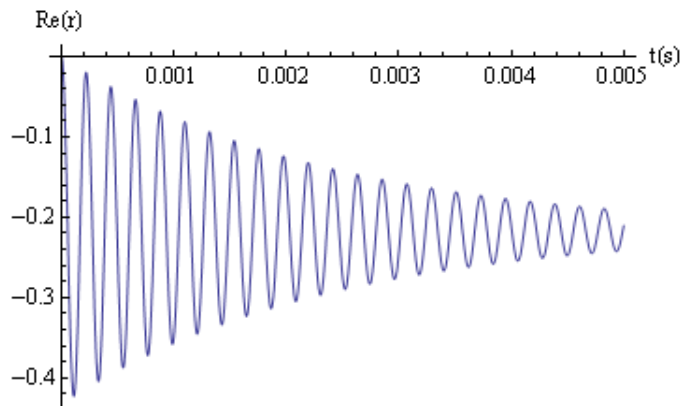
$$\rho = \begin{pmatrix} \cos^4 \theta + \sin^4 \theta + \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) \operatorname{Re} I & \frac{1}{2} (i \cdot \operatorname{Im} I + \cos(2\theta) \operatorname{Re} I - \cos(2\theta)) \sin(2\theta) \\ \frac{1}{2} (-i \cdot \operatorname{Im} I + \cos(2\theta) \operatorname{Re} I - \cos(2\theta)) \sin(2\theta) & \frac{1}{2} (1 - \operatorname{Re} I) \sin^2(2\theta) \end{pmatrix} \quad (47)$$

A diagonális elemek a kétféle íz megtalálási valószínűségei. Pl. a bal felső elem megegyezik (23) kifejezéssel. Az off-diagonális elemek írják le a koherenciát. Legyen $\rho_{12} = r$. Látszik, hogy ez is oszcillál ugyanazzal a frekvenciával, mint a valószínűségek. Láttuk, hogy hosszú idő után I lecseng és így $r - \frac{1}{4} \sin(4\theta)$ -hez tart nagy t -re. $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, illetve $\frac{\pi}{2}$ esetén tisztán képzetes (így r nullához tart hosszú idő elteltével). A valódi keveredési szögek a mai tudásunk alapján $\theta_{13} \sim 0$, $\theta_{12} \sim 34^\circ$, $\theta_{23} \sim 45^\circ$ körüli értékek. A 10. ábrán $\operatorname{Re}(r)$ -et láthatjuk $\theta = \frac{\pi}{6}$ esetén.

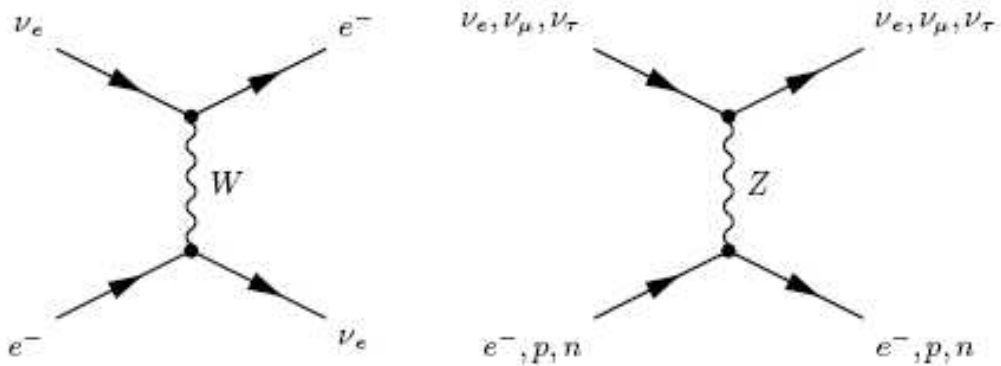
5.1. Közegen való áthaladás

Ebben a részben megvizsgáljuk egy bomló részecskéből származó neutrínó terjedését, mely anyagon halad át.

Közegben a neutrínók gyenge kölcsönhatás révén reakcióba lépnek a közeget alkotó részecskékkel. Ez lehet töltött-, vagy semleges áramú reakció. Semleges áramú reakcióban a lepton mindhárom fajta neutrínóval Z bozont cserélve kölcsönhat. A neutrínófajták azonos módon vesznek részt, így ez az oszcilláció jelenségét nem befolyásolja. Töltött áramú reakció során a neutrínók a velük azonos fajtájú leptonnal egy W bozon kicserélésével hatnak kölcsön. Elektromagnetikus neutrínó esetén pl.: $\nu_e + e^- \longrightarrow \nu_e + e^-$ (lásd 11. ábra).



10. ábra. A sűrűségmátrix off-diagonális elemeinek valós része az idő függvényében $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\Gamma = 1\text{MeV}$, $d = 10^{-5}\text{MeV}$, $\Delta m^2 = 10^{-3}\text{eV}^2$ paraméterállításoknál.



11. ábra. Elektronneutrínó elektronon való szóródása töltött, illetve semleges áramú reakcióval.

Ezen folyamat Hamilton-sűrűsége alacsony energiákon[9]:

$$\mathcal{H}(x) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_e(x)\gamma^\alpha(1 - \gamma^5)e(x)] [\bar{e}(x)\gamma_\alpha(1 - \gamma^5)\nu_e(x)], \quad (48)$$

ahol G_F a Fermi-állandó, γ -k a szokásos γ mátrixok, $e(x)$, $\nu(x)$ az elektron-, illetve neutrínó téroperátorok.

Ezt másik alakba is írhatjuk, ahol az elektrontér operátorok egymás mellett helyezkednek el:

$$\mathcal{H}(x) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_e(x)\gamma^\alpha(1 - \gamma^5)\nu_e(x)] [\bar{e}(x)\gamma_\alpha(1 - \gamma^5)e(x)], \quad (49)$$

Amennyiben a közeget alkotó elektronokat statisztikus sokaságnak tekintjük, a fenti operátor helyett annak átlagát vehetjük a sokaságra. Ezt úgy tehetjük meg, hogy a második zárójelben szereplő operátor helyett, annak adott elektronállapotok között vett várható értékének statisztikus átlagát vesszük.

Ezzel a módszerrel egy átlagos potenciált származtathatunk le melyben az elektronneutrínók mozognak: $V = \sqrt{2}G_F N_e$, ahol N_e az elektronok számsűrűsége az anyagban.[9] Ez egy törésmutató jellegű tag. Természetesen ennek a potenciálnak az alakja azonos müon-, illetve tauneutrínókra is, amennyiben a hozzájuk tartozó lepton is jelen van a közegben.

Vizsgáljuk meg a bomló részecskéből származó neutrínót, mely közegen halad át. Az egyszerűség kedvéért egy olyan modellben dolgozunk, ahol a közegben jelenlévő leptonok íze megegyezik a bomlás során keletkező neutrínók ízével. Amennyiben az atmoszférában pion-bomlásból keletkező neutrínók Földön való áthaladását szeretnénk leírni, akkor már három neutrínófajta keveredését kell figyelembe vennünk. Ugyanis a keletkező müon-neutrínók tau-neutrínóba alakulnak elsősorban, a Földben viszont elektronok találhatóak.

A sűrűségmátrix időfejlődését leíró egyenlet közegben az impulzustérben diagonális elemekre [7] alapján a Fermi állandóban első rendig:

$$i\dot{\rho}_p = [H, \rho_p] = \left[\frac{O}{2p} + \sqrt{2}G_F N D, \rho_p \right] \quad (50)$$

ahol $D = \text{diag}(1, 0)$. Itt az első tag felelős az oszcillációért:

$$O = U^{-1} \begin{pmatrix} m_a^2 & 0 \\ 0 & m_b^2 \end{pmatrix} U, \quad (51)$$

a második pedig az anyag leptonjaival való kölcsönhatást írja le a fent vázolt módon. Legyen $c = 2\sqrt{2}G_F N$. Ennek értéke a közeg sűrűségének függvényében (feltételezve, hogy a közeget elektromosan semleges atomos anyag tölti ki) $c = 7.63 \cdot 10^{-14} eV \left(\frac{\sigma}{g/cm^3} \right)$ [8], ahol σ a közeg sűrűsége. Ez egy négy ismeretlenből álló lineáris differenciálegyenlet-rendszer, amit tagonként kiírva:

$$i\dot{\rho}_{11} = -i\dot{\rho}_{22} = -\frac{\Delta m^2}{4p}(\rho_{12} - \rho_{21}) \sin(2\theta), \quad (52)$$

$$i\dot{\rho}_{12} = -\frac{\Delta m^2}{4p}(2\rho_{12} \cos(2\theta) + (\rho_{11} - \rho_{22}) \sin(2\theta)) + (c/2)\rho_{12}, \quad (53)$$

$$i\dot{\rho}_{21} = -\frac{\Delta m^2}{4p}(2\rho_{21} \cos(2\theta) + (\rho_{11} - \rho_{22}) \sin(2\theta)) - (c/2)\rho_{21}. \quad (54)$$

A leíráshoz a kezdeti (a közegbe történő behatolás előtti) sűrűségmátrixot impulzus-bázisban kell felírunk. Ennek alakja tömeg-bázisban (43)-gyel egyezik meg, azonban most ($t = 0$ -ban) a (44) képletet a Fourier-transzformáltjára kell cserélnünk:

$$\phi_{\alpha\beta}(p_1, q_1, 0) = (2\pi N)^2 \int dp_2 \frac{f^*(p_1 + p_2)f(q_1 + p_2)}{(E_{p_1} + E_2 - M - i\Gamma/2)(E_{q_1} + E_2 - M + i\Gamma/2)}. \quad (55)$$

Amennyiben $\Delta m^2/p_1 \ll \Gamma$ (valamint $\Delta m^2/q_1 \ll \Gamma$), a fenti $\phi_{\alpha\beta}(p_1, q_1, 0) = \phi(p_1, q_1)$ kifejezés független az α, β tömegindexektől. Így le lehet választani a mátrixelemekből. Ekkor íz-bázisban a kezdeti sűrűségmátrix:

$$\rho(0) = \phi(p_1, q_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Az egyenlet megoldása a sűrűségmátrix (2,2)-es elemére (azaz az átalakulás valószínűségére):

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{22}}{\phi(p, p)} = r_{22}(p) &= \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{\sqrt{\Delta m^4 + c^2 \cdot p^2 - 2c \cdot p \cdot \Delta m^2 \cos(2\theta)}}{2p} t\right) \right). \\ &\cdot \frac{\Delta m^4 \sin^2(2\theta)}{\Delta m^4 + c^2 \cdot p^2 - 2c \cdot p \cdot \Delta m^2 \cos(2\theta)}. \end{aligned} \quad (56)$$

Áttekinthetőbbé válik a kifejezés, ha bevezetjük az (impulzustól függő) effektív tömegkülönbség paramétert: $\Delta m_p^2 = \sqrt{\Delta m^4 + c^2 \cdot p^2 - 2c \cdot p \cdot \Delta m^2 \cos(2\theta)}$. Az nem-diagonális elemekre a következő kifejezés adódik:

$$r_{12} = \frac{1}{2} \sin(2\theta) \frac{\Delta m^2}{\Delta m_p^4} \left[(c \cdot p - \Delta m^2 \cos(2\theta)) \left(1 - \cos\left(\frac{\Delta m_p^2}{2p} t\right) \right) + i \Delta m_p^2 \sin\left(\frac{\Delta m_p^2}{2p} t\right) \right]. \quad (57)$$

Továbbá r_{21} ennek komplex konjugáltja.

Amennyiben az impulzustól független átalakulás valószínűségére vagyunk kíváncsiak, úgy a kiszámolt, impulzustérben diagonális elemeket kell összeintegrálnunk:

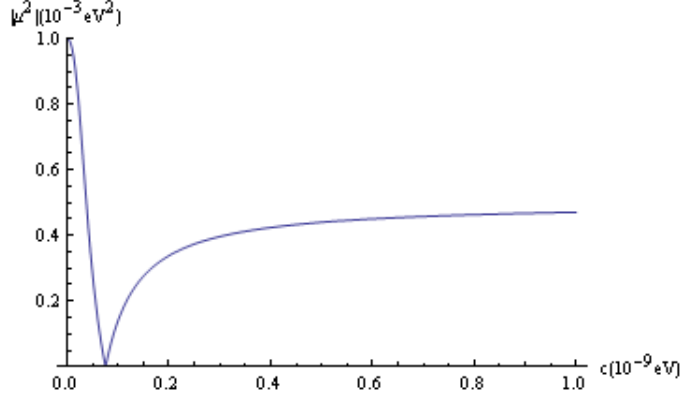
$$P = (2\pi N)^2 \int dp_2 dp_1 \frac{|f(p_1 + p_2)|^2 (1 - \cos((\Delta m_{p_1}^2/2p_1)t)) \sin^2(2\theta)/2}{(E_{p_1} + E_2 - E_p - iM\Gamma/2E_p)(E_{p_1} + E_2 - E_p + iM\Gamma/2E_p)} \frac{\Delta m^4}{\Delta m_{p_1}^4}. \quad (58)$$

A nevezőben lévő Δm_p^4 miatt az átalakulás különböző neutrínó-impulzusok mellett rezonancia-szerű: egy bizonyos impulzustartományban van csak jelentős átalakulás. Ez az MSW effektus[10]. Feltételezzük azonban, hogy ennek a tartománynak a szélessége jóval nagyobb, mint a neutrínó impulzusbizonytalansága. Így ezt a lassan változó tényezőt kiemeljük az integrál elé és az átlagos impulzussal helyettesítjük p -t. Ekkor a következő alakot kapjuk:

$$P = \frac{\Delta m^4}{\Delta m_{P_1}^4} \sin^2(2\theta) \frac{1}{2} (1 - \text{Re}J), \quad (59)$$

ahol a kiszámítandó integrál

$$J = (2\pi N)^2 \int dp_2 dp_1 \frac{|f(p_1 + p_2)|^2 \exp(i(\Delta m_{p_1}^2/2p_1)t)}{(E_{p_1} + E_2 - E_p - iM\Gamma/2E_p)(E_{p_1} + E_2 - E_p + iM\Gamma/2E_p)}. \quad (60)$$



12. ábra. A lecsengést meghatározó $|\mu^2|$ paraméter c függvényében. $\Delta m^2 = 10^{-3}eV^2, m = 100MeV, M = 130MeV, \theta = \pi/6$.

Ezek után ugyanúgy sorbafejtünk a nevezőben, illetve az exponenciális függvény argumentumában, mint a 3.1-es szakaszban. A különbséget a megváltozott tömegparaméter okozza. Most:

$$\frac{\Delta m_{p_1}^2}{2p_1} \approx \frac{\Delta m_{P_1}^2}{2P_1} - \frac{\mu^2}{2P_1^2}(p_1 - P_1), \quad (61)$$

$$\mu^2 = \frac{-c \cdot P_1 \Delta m^2 \cos(2\theta) + \Delta m^4}{\Delta m_{P_1}^2}, \quad (62)$$

ahol μ^2 lehet negatív is.

Így a vákuumbeli esetből (24) a lecsengésért felelős tagokat a $\Delta m^2 \rightarrow \mu^2$ helyettesítéssel kaphatjuk meg:

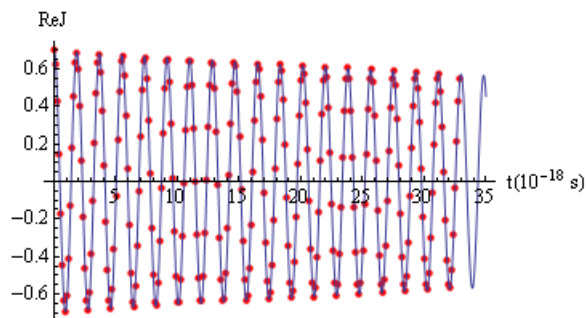
$$J = \exp\left(i \frac{\Delta m_{P_1}^2}{2P_1} t\right) F(t) 2\pi \exp\left(-\frac{|\mu^2|}{4P_1^2} \frac{M\Gamma}{E_P(1-v_2)} t\right), \quad (63)$$

$$F = \int d\alpha |f(\alpha)|^2 \exp\left(-i \frac{\mu^2}{2P_1^2} \frac{v-v_2}{1-v_2} (\alpha - P) t\right). \quad (64)$$

Az exponenciálisan lecsengő tagban az abszolútérték jel azért kell, mert a 3.1 pontban elvégzett Cauchy-integrált negatív μ^2 esetén a felső felsíkon haladó kontúron kell elvégezni.

Láthatjuk, hogy az oszcilláció frekvenciáján kívül (mely jólismert az irodalomban) az oszcilláció lecsengésének karakterisztikus ideje is függ c (valamint P_1) értékétől. c értékét növelve kezdetben nő, $c = \frac{\Delta m^2}{P_1 \cos(2\theta)}$ -t elérve végtelenné válik a közelítő képletben. Valójában a (61) első tagja tűnik el, nagyságrendekkel megnövelve a lecsengési időt. Reális adatokkal ($\Delta m^2 = 10^{-3}eV^2, P_1 = 10MeV, \theta = \pi/6$) $c = 2 \cdot 10^{-10}eV$ adódik, ami $\sigma \sim 2000g/cm^2$ -es közegsűrűségnek felel meg. Ez tehát $2000N_A/cm^3$ leptonsűrűséget jelent, ahol N_A az Avogadro-szám. Összehasonlításképpen: a Nap belsejében lévő elektron sűrűség kb. $200N_A/cm^3$ [9]. Ez a jelenség tehát nagy, de csillagászati objektumokban reális sűrűségnél jelentkezik.

Tovább növelve c -t $|\mu^2|$ nő, majd $\Delta m^2 \cos(2\theta)$ -hoz konvergál.



13. ábra. ReJ az idő függvényében a közelítő formula, valamint az egzakt integrál numerikus kiértékelése alapján. $\Delta m^2 = 0.1 MeV^2$, $\Gamma = 0.5 MeV$, $d = 0.1 MeV$, $c = 5 keV$, $m = 100 MeV$, $M = 130 MeV$, $\theta = \pi/6$.

A 13. ábrán látható ReJ integrál az idő függvényében. A folytonos görbe a közelítő formulát ábrázolja, míg a pontok az egzakt integrál numerikus értékei. A 14. ábrán ugyanez a mennyiség látható különböző c értékek mellett.

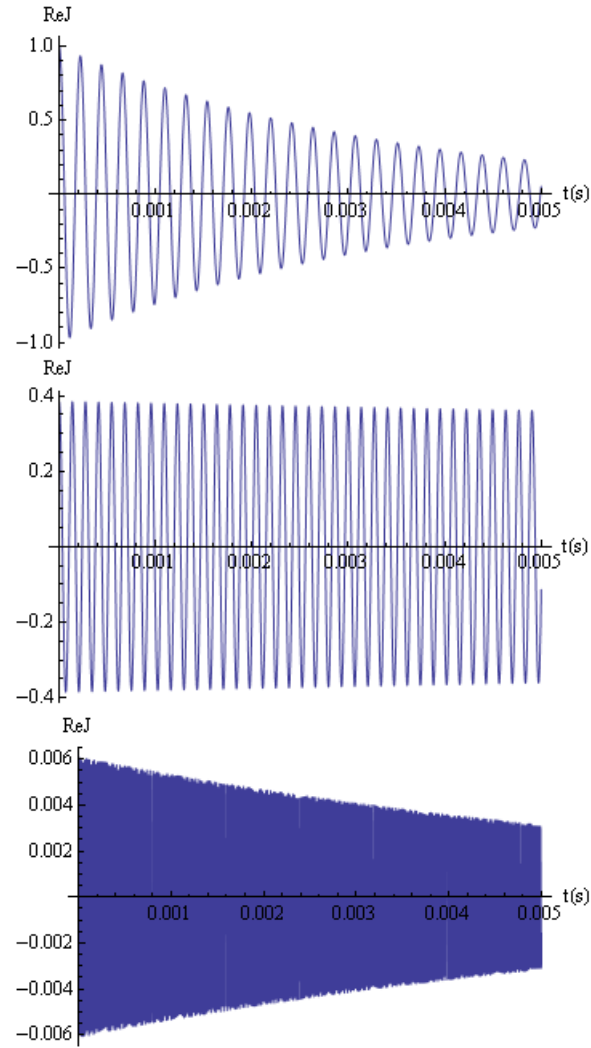
Összefoglalás

A dolgozatban a neutrínóoszilláció elméletével foglalkoztam. Elsősorban elvi kérdéseket foglaltunk meg, melyek az oszcilláció standard leírásánál merülnek fel, azzal nem megválaszolhatók. Az irodalomban a mai napig előfordulnak viták, félreértések az oszcillációval kapcsolatban a jól használható, ám intuitív tárgyalás miatt. A konkrét (hullámcsomagon alapuló) modellen való elemzés lehetőséget ad arra, hogy rávilágítson az oszcilláció létrejöttének feltételeire, továbbá elkerüljük az önkényes (gyakran látszólag önellentmondó) feltevéseket.

A standard formalizmus ismertetése után egy bomlási reakciót elemezve a neutrínó-lepton összefont hullámfüggvényét vizsgálva jutottam el egy oszcillációs formuláig. Ez bizonyos paramétertartományok és időtartományok esetén visszaadja a szokásos képletet, ezen túl kvantitatív eredményt ad az oszcilláció lecsengéséről, valamint az oszcilláció amplitúdójáról kis bomlási szélesség mellett.

Ezek után numerikus eredményekkel hasonlítottam össze a közelítő formulát, melyből láthatuk, hogy a közelítés jól működik olyan extrém esetektől eltekintve, mikor a lecsengés karakterisztikus ideje összemérhető az oszcillációs hosszal. Majd a neutrínó megtalálási valószínűségét számoltam ki a hely, és idő függvényeként. Itt azt találtam, hogy a profil alakjának baloldalát a Γ szélesség, jobboldalát a d impulzus profil szélesség határozza meg.

Az utolsó szakaszban a neutrínó sűrűségmátrixát konstruáltam meg. Az lecsengés eredményeképpen tömegbázisban a nemdiagonális elemek eltűnnek, míg íz bázisban konstanshoz tartanak. Vizsgáltam továbbá a sűrűségmátrix alakulását a neutrínók anyagon való áthaladása során. Itt az ismert tulajdonságokon kívül (effektív tömegkülönbség, MSW effektus) a lecsengési paraméter változását határoztam meg. Érdekes módon a közeg sűrűségének (vagy vele ekvivalens módon a neutrínó impulzusának) egy meghatározott értékénél a lecsengés drasztikusan lecsökken.



14. ábra. ReJ időfüggése különböző anyagsűrűség mellett. Fentről lefelé az ábrákon c értéke növekszik: $0eV$, $7 \cdot 10^{-11}eV$, $5 \cdot 10^{-10}eV$. Mindegyik görbe esetén $\Gamma = 0.7MeV$, $d = 10^{-5}MeV$, $\Delta m^2 = 10^{-3}eV^2$, $m = 100MeV$, $M = 130MeV$, $\theta = \pi/6$.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani korábbi témavezetőmnek, Bajnok Zoltánnak, aki első évfolyamos koromban is tudott TDK témával szolgálni. Köszönettel tartozom továbbá e diploma témavezetőjének, Patkós Andrásnak a dolgozat megírásában nyújtott segítségéért, szövegének (többszöri) figyelmes áttanulmányozásáért.

Függelék

(22) képlet levezetése

Vegyünk egy p határozott impulzusú bomló piont. Írjuk fel a pion, neutrínó, müion együttes állapotvektorát a következő alakban:

$$|\phi\rangle = b_0(t) \exp(-iE_p t) |\pi\rangle + \sum_{p_1, p_2} b_{p_1, p_2}(t) \exp(-i(E_1 + E_2)t) |p_1 p_2\rangle, \quad (65)$$

ahol $|p_1 p_2\rangle$ egy olyan határozott impulzusú állapot, melyben a neutrínónak p_1 , a müionnak p_2 az impulzusa. Tudjuk, hogy $b_{p_1, p_2}(0) = 0$, továbbá $b_0(t)$ időben lecseng.

Weisskopf-Wigner közelítést használunk az együtthatók kiszámításához. [4] (13.52) képletének analógiájára (183. oldal) az együtthatókra a következő egyenletrendszer igaz:

$$\dot{b}_0(t) = -i \sum_{p_1 p_2} \exp(i(E_p - E_1 - E_2)t) W_{0p_1 p_2} b_{p_1 p_2}, \quad (66)$$

$$\dot{b}_{p_1 p_2} = -i \exp(-i(E_p - E_1 - E_2)t) W_{p_1 p_2 0} b_0(t), \quad (67)$$

ahol $W_{p_1 p_2 0}$ a bomlásért felelős Hamilton-operátor rész mátrixeleme.

Legyen a pion energia-szélessége a nyugalmi rendszerében Γ . Ekkor egy olyan rendszerben, melyben p impulzusa van, ez a szélesség $\frac{\Gamma M}{E_p}$. Tudjuk, hogy b_0 exponenciálisan cseng le az előbbi paraméterrel. [4] (13.55) képlete analógiájára:

$$b_0(t) = \exp\left(-\frac{\Gamma M}{2E_p} t\right). \quad (68)$$

Ezt visszaírva (67)-be és felintegrálva kapjuk:

$$b_{p_1 p_2} = W_{p_1 p_2 0} \frac{\exp(-i(E_p - E_1 - E_2 - i\frac{\Gamma M}{2E_p})t) - 1}{E_p - E_1 - E_2 - i\frac{\Gamma M}{2E_p}}. \quad (69)$$

Feltételezzük, hogy $W_{p_1 p_2 0}$ nem függ az impulzusoktól, továbbá elegendő idő elteltével nézzük a rendszert. Ekkor már a pion elbomlott, a számlálóban az első tag elhanyagolható. Ekkor a neutrínó-müion hullámfüggvénye:

$$\psi_p = N \int dp_1 \frac{\exp(ip_1 x_1 + ip_2 x_2 - i(E_1 + E_2)t)}{E_1 + E_2 - E_p + iM\Gamma/2E_p}, \quad (70)$$

ahol $p_2 = p - p_1$

Ha a pion nem határozott impulzusú, hanem egy $f(p)$ függvénnyel jellemezhető, akkor a végeredményt is meg kell szorozni $f(p)$ -vel és össze kell integrálni p -re. Ekkor megkapjuk a [2]-ben közölt formulát, ami jelen dolgozatban a (22) képlet.

Hivatkozások

- [1] Boris Kayser, Phys Rev. D 24 (1981) 110
- [2] M. Nauenberg, Phys. Lett., B447 (1999) 23., <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9812441>
- [3] Balázs Meszéna, Neutrino oscillation, The Wolfram demonstrations project, <http://demonstrations.wolfram.com/NeutrinoOscillations/>
- [4] Geszti Tamás: Kvantummechanika, Typotex kiadó, Budapest, 2007
- [5] The KamLand Collaboration, Phys. Rev. Lett. 100, 221803 (2008), arXiv:0801.4589 [hep-ex]
- [6] The Super-Kamiokande Collaboration, Phys. Rev. D 71, 112005 (2005), hep-ex/0501064
- [7] G. Sigl and G. Raffelt, Nucl. Phys. B406, 423 (1993)
- [8] M. Honda, Y. Kao, N. Okamura, T. Takeuchi, arXiv:hep-ph/0602115
- [9] Carlo Giunti, Chung W. Kim: Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics, Oxford University Press, 2007
- [10] S.P Mikheev, A. Yu. Smirnov, Sov. J. Nucl. Phys 42, 913(1985)