

# Kvantum-soktestprobléma ultrahideg atomokkal optikai rezonátorban

**Kónya Gábor**

Fizika Bsc. III.

**Szakedolgozat**



Témavezető: **Domokos Péter**

Szilárdtestfizikai és Optikai Kutatóintézet  
Kvantumoptikai és Kvantuminformatikai Osztály

Belső konzulens: **Csordás András**

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar  
Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

Budapest, 2010. május

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>2</b>
<b>2. Bose-Einstein kondenzátum átlagtér-elmélete</b>	<b>4</b>
2.1. Kölcsönhatás nélküli atomok . . . . .	4
2.2. Az atomok közötti kölcsönhatás figyelembevétele . . . . .	5
<b>3. Másodkvantálás</b>	<b>6</b>
3.1. Bozonok másodkvantált formalizmusának alapjai . . . . .	6
3.2. Módusfüggvények szerinti kifejtés . . . . .	7
<b>4. Bose-Einstein kondenzátum optikai rezonátorban</b>	<b>10</b>
4.1. A modell alapjai . . . . .	10
4.2. Módusok szerinti kifejtés . . . . .	12
<b>5. Két módusos közelítő modell</b>	<b>15</b>
5.1. Spin-reprezentáció . . . . .	15
5.2. Analógia a Dicke-moddal . . . . .	16
5.3. Holstein-Primakoff reprezentáció . . . . .	17
5.4. Felbontás átlagtérre és akörüli kis fluktuációkra . . . . .	18
5.5. Taylor-sorfejtés . . . . .	19
5.6. Átlagterek meghatározása . . . . .	21
5.7. A fluktuációk vizsgálata . . . . .	23
5.8. Heisenberg-képbeli dinamika . . . . .	25
5.9. Sajátfrekvenciák meghatározása . . . . .	26
5.10. A környezet visszahatása a rendszerre . . . . .	27
<b>6. Az összes módust figyelembe vevő modell</b>	<b>30</b>
6.1. Felbontás átlagtérre és fluktuációkra . . . . .	31
6.2. Az átlagterek meghatározása . . . . .	33
6.3. A fluktuációk vizsgálata . . . . .	35
6.4. Gerjesztési spektrum: kvázirészecskék . . . . .	38
6.5. A normál fázisban fellépő fluktuációk vizsgálata . . . . .	41
6.6. A modell alapállapotának vizsgálata tetszőleges fázisban . . . . .	42
6.7. Összefonódási mértékek . . . . .	47
<b>7. Összefoglalás</b>	<b>52</b>
<b>8. Köszönetnyilvánítás</b>	<b>53</b>

# 1. Bevezetés

”It would indeed be remarkable if Nature fortified herself against further advances in knowledge behind the analytical difficulties of the many-body problem.”

Max Born, 1960

A hideg atomok és molekulák lézerefénnyel történő manipulációja manapság gyorsan fejlődő terület és alkalmas tereppé vált a fizika fundamentális jelenségeinek mind elméleti, mind kísérleti tanulmányozására. Az utóbbi időkben megjelent a gyengén kölcsönható atomok körében fellépő soktest-effektusok tanulmányozásának igénye. Szabad térben mozgó atomok esetén az elektromágneses mező mechanikai hatása ritkán produkál ilyen effektusokat. Egy atomfelhő törésmutatóját általában jó közelítéssel az egyatomos polarizálhatóság és az optikai sűrűség szorzata adja.

Egészen megváltozik a helyzet, ha az atomokat egy üregrezonátor belsejében helyezzük el és ez az elrendezés rengeteg érdekes jelenséghez vezet. Ennek az alapvető oka az, hogy a rezonátor belsejében a fotonok jó pár körutat megtesznek a két tükör között és minden út során kölcsönhatnak a bentlévő atomokkal. Így az atomok visszahatása a térre jelentőssé válik. A lézerek által kifejtett külső erőkkal szemben az üreg belsejében az atomokra ható erő erősen függ a rezonátor módus dinamikájától, amit viszont az atomok befolyásolnak jelentősen. Mivel az összes atom ugyanahhoz a rezonátor módushoz csatolódik, ezért ebben az elrendezésben akkor is felléphetnek kollektív jelenségek, ha az atomfelhő sűrűsége kicsi, vagyis az atomok egymás közötti kölcsönhatása elhanyagolható. Az elméleti érdekességük mellett a kollektív jelenségek kísérletileg is jól vizsgálhatók: ezek a kísérletek ma a kvantumoptika frontvonalának részét képezik [1–7].

Numerikus szimulációk alapján elméletileg megjósolt [8,9] és kísérletileg is ellenőrzött [10] tény, hogy optikai rezonátorba helyezett hideg atomok termális felhője fázisátalakuláson megy keresztül, ha az atomokat oldalról, az üreg tengelyére merőleges irányból egy lézerral pumpáljuk. A fázisátalakulás a gerjesztő lézerefény intenzitásának változtatása közben figyelhető meg. A kritikus pumpaerősség alatt az atomok homogén eloszlásban töltik ki a rezonátor beljését és az általuk a rezonátorba szórt lézerefotonok destruktívan interferálnak, ami az átlagos optikai mezőerősséget zérussá teszi. A kritikus pont felett az előbbi állapot instabillá válik és az atomok maguktól egy periodikus rácsba rendeződnek, aminek periódushosszát az üregmódus hullámhossza szabja meg. Ebben az elrendeződésben a rezonátorba szórt fotonok konstruktív módon interferálnak és erős elektromágneses mezőt hoznak létre benne. A sugárzási mező egy periodikus potenciált hoz létre a rezonátorban: ez a periodikus potenciál felel az atomok alkotta rács egybentartásáért.

Ugyanez a jelenség játszódhat le Bose-Einstein kondenzációt szenvedett ultrahideg atomokkal is [11] és ezt az effektust tanulmányozzuk a jelen dolgozatban, zérus hőmérsékleten. Megjegyezzük, hogy az elrendezés kísérletileg is megvalósítható [12], továbbá más pumpálási mechanizmus esetén további érdekes jelenségek, például optikai bistabilitás is létrehozható benne [13,14].

A dolgozat felépítése a következő: a 2. fejezetben áttekintjük az átlagtér-elmélet keretében a kondenzátum leírásához használt eszköztárat. A 3. fejezetben induktívan

felépítjük a másodkvantálás formalizmusát, amivel az átlagtér körüli kvantumos fluktuációk leírhatóak. A dolgozat tárgyát képező modell a 4. fejezetben kerül definiálásra, valamint néhány általános következtetés is levonásra kerül.

Az 5. fejezet az általunk nemrég publikált [15]-ös cikk gondolatmenetét követi. A fázisátalakulásnak egy minimum-modelljét adjuk, amiben csak két kondenzátum-módust veszünk figyelembe. Megmutatjuk, hogy ez a modell analóg a kvantumoptika szakirodalmában jól ismert Dicke-moddal [26], amiben szintén egy fázisátalakulás figyelhető meg [16]. Ebben a közelítésben egzakt analitikus formulát tudunk adni a stationáris állapotban a rezonátor-módust és a kondenzátumot leíró átlagterekre. Meghatározzuk továbbá az átlagtér körüli kvantumos fluktuációk sajátfrekvenciáit is és leírjuk a Heisenberg-képbeli dinamikát. Végül azt is megvizsgáljuk, hogy a rezonátor veszteségessége miatt a környezettel való csatolás milyen visszahatást eredményez a rendszer dinamikájára.

A 6. fejezetben kiterjesztjük vizsgálatainkat az összes kondenzátum-módusra. Egyszerű iterációs algoritmust adunk az átlagterek meghatározására. A fluktuációk sajátfrekvenciáinak meghatározása és a gerjesztési spektrumot leíró kvázirészecskék bevezetése után figyelmünket a rendszer alapállapotára fordítjuk. Kiszámoljuk az alapállapot korrelációs mátrixát és segítségével mennyiségi jellemezést adunk a az atomok és a rezonátor között fellépő összefonódásra. Az elméleti eredményeket numerikus szimulációkból származó ábrákkal szemléltetjük.

## 2. Bose-Einstein kondenzátum átlagtér-elmélete

### 2.1. Kölcsönhatás nélküli atomok

Vizsgáljunk  $N \gg 1$  db nemrelativisztikus bozont, amik egy külső  $V(\mathbf{r})$  potenciálban mozognak. A bozonok alkotta gáz legyen elég híg ahhoz, hogy a részecskék közötti kölcsönhatást elhanyagolhassuk. A rendszer hőmérséklete legyen  $T = 0 K$ . Jól ismert, hogy ekkor rendszerünkben egy Bose-Einstein kondenzátum fog létrejönni: Az atomok mindannyian ugyanazt a  $\psi(\mathbf{r}, t)$  egyrészecske-kvantumállapotot fogják elfoglalni. Ez az állapot kielégíti az egyrészecskés Schrödinger-egyenletet:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}, t) \quad (2.1)$$

A hullámfüggvényt célszerű a teljes részecskeszámra normálni:

$$\int_V |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r = N \quad (2.2)$$

Most  $\rho = |\psi|^2$  jelentése tehát részecskeszám-sűrűség. A (2.1)-es egyenlet megoldását a következő alakban kereshetjük:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mu t\right) \quad (2.3)$$

Az egyrészecskés kvantummechanikában megszokottól a (2.3)-as egyenlet annyiban tér el, hogy az energia helyét a  $\mu$  kémiai potenciál foglalta el. Ennek szemléletes jelentése: egyetlen részecske energiája. Természetesen kiszámolhatjuk a rendszer összenergiáját is: ehhez az egyetlen részecskét leíró Hamilton-operátort "szendvicselnünk" kell  $\psi$ -vel. Az egyrészecske-kvantummechanikában ez a formula a részecskék energiájának várható értékét adta, most azonban a normálás átdefiniálása (2.2) miatt a rendszer összenergiáját kapjuk:

$$E[\psi^*, \psi] = \int_V \psi^*(\mathbf{r}, t) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}, t) d^3r \quad (2.4)$$

Egy parciális integrálás elvégzése után az energiát szimmetrikusabb alakban is felírhatjuk:

$$E[\psi^*, \psi] = \int_V \left( \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi(\mathbf{r}, t)|^2 + V(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) d^3r \quad (2.5)$$

A (2.5)-ös egyenletből leolvasható a kinetikus és a potenciális energiasűrűség formulája. A potenciális energia sűrűségét láthatóan a részecskeszám-sűrűség és a potenciálfüggvény szorzata adja.

Az energia  $\psi^*$  és  $\psi$  funkcionáljaként állt elő. Számoljuk ki a  $\frac{\delta E}{\delta \psi}$  és  $\frac{\delta E}{\delta \psi^*}$  funkcionális deriváltakat. Ehhez vizsgáljuk meg, hogy  $\psi$  egy kis  $\delta \psi$  megváltoztatása mekkora  $\delta E$  változást okoz az energiában. A funkcionális deriváltak definícióját a következő összefüggés adja:

$$\delta E[\psi^*, \psi] = \int_V \left( \frac{\delta E}{\delta \psi^*} \delta \psi^* + \frac{\delta E}{\delta \psi} \delta \psi \right) d^3r \quad (2.6)$$

(2.5)-t megvariálva:

$$\delta E = \int_V \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \delta\psi^* \nabla \psi + \nabla \psi^* \nabla \delta\psi) + V(\mathbf{r}) (\delta\psi^* \psi + \psi^* \delta\psi) d^3r \quad (2.7)$$

Két darab parciális integrálás elvégzése után:

$$\delta E = \int_V \left[ \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(\mathbf{r}) \psi \right) \delta\psi^* + \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi^* + V(\mathbf{r}) \psi^* \right) \delta\psi \right] d^3r, \quad (2.8)$$

amit (2.6)-al összevetve leolvashatjuk a funkcionális deriváltakat. Vegyük észre, hogy a  $\psi^*$  szerinti derivált épp a Schrödinger-egyenlet jobb oldalát adja. A mozgásegyenletet tehát a következő általános formában, a rendszer energiájából származtatva írhatjuk föl:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = \frac{\delta E}{\delta \psi^*}(\mathbf{r}, t) \quad (2.9)$$

## 2.2. Az atomok közötti kölcsönhatás figyelembevétele

Most vizsgáljuk meg, hogy hogyan tudnánk kiterjeszteni a Bose-Einstein kondenzátumot leíró elméletet az egymással ütköző atomok esetére. Az ütközést rövid hatótávolságú, ún. kontakt kölcsönhatásként írhatjuk le, amit a kvantummechanikában s-hullámú szórással kezelünk. Mivel a kölcsönhatás azonos helyen lévő részecskepárok között jön létre, a kölcsönhatási energiasűrűségnek arányosnak kell lennie a részecskeszám-sűrűség négyzetével. (2.5)-t tehát a következőképpen általánosíthatjuk:

$$E[\psi^*, \psi] = \int_V \left( \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi(\mathbf{r}, t)|^2 + V(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 + \frac{g}{2} |\psi(\mathbf{r}, t)|^4 \right) d^3r, \quad (2.10)$$

ahol  $g$  a kölcsönhatás erősségét jellemző állandó. (2.9) felhasználásával könnyen felírhatjuk a rendszer mozgásegyenletét is:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) + g |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \psi(\mathbf{r}, t) \quad (2.11)$$

(2.11) a szakirodalomban *Gross-Pitaevskii egyenlet* néven ismert. A dolgozat további részében nem foglalkozom az atomok közötti kölcsönhatással, de az itt leírtakhoz hasonló módon azt a későbbi modellekbe is be lehetne építeni.

### 3. Másodkvantálás

A jelen fejezetben egy induktív módszert adunk a másodkvantált formalizmus, vagyis a nemrelativisztikus kvantumtérelmélet felépítésére. A részletes deduktív tárgyaláshoz a [17]-es jegyzethez irányítjuk az olvasót. Fotonokra a nemrelativisztikus elmélet természetesen nem alkalmazható: az elektromágneses mező kvantálásához lásd [19, 20].

#### 3.1. Bozonok másodkvantált formalizmusának alapjai

Az eddigiekben az atomokat egy  $\psi(\mathbf{r}, t)$  egyrészecske-hullámfüggvénnyel írtuk le. Első pillantásra azt gondolnánk, hogy az így adott leírás kvantumos, mivel formuláink nagymértékű analógiát mutatnak az egyrészecskes kvantummechanika megfelelő képleteivel. A valóság azonban az, hogy az egyrészecskes esetben kvantumos leírás a sokrészecskes esetben klasszikus hullámként való leírásnak felel meg. Mivel  $|\psi|^2$  jelentése most részecskeszám-sűrűség, az elméletünk teljesen determinisztikus, kvantum-fluktuációk aligha szerepelhetnek benne. Az is nyilvánvaló, hogy a (2.2)-es egyenletben  $N$  helyébe tetszőleges valós számot is írhatunk: a matematikai modellben sehol sem tükröződik az a megkötés, hogy  $N$ -nek egész számnak kell lennie. Vagyis az eddigi modellünk csak az atomok hullámtulajdonságait írja le, a részecskék számának kvantáltságát nem tartalmazza.

A klasszikus elméletünket tehát kvantálni kell. A későbbiekben látni fogjuk, hogy a másodkvantált térelméletünkkel nemcsak a Bose-Einstein kondenzátumot tudjuk tárgyalni, ahol az összes atom egyetlen állapotban van. Ehelyett tetszőleges különböző állapotokban lévő atomokat, sőt változó részecskeszámú rendszereket is leírhatunk vele. A kvantálás úgy történik, hogy a dinamikai változót egy Hilbert-téren ható operátorral helyettesítjük.  $\psi(\mathbf{r}, t)$  helyébe a  $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$  eltüntető-,  $\psi^*(\mathbf{r}, t)$  helyébe pedig a  $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)$  keltő-operátor lép.

Mivel az operátorok függenek az időtől, ezért a Heisenberg-képben vagyunk. Egy unitér transzformációval az időfejlődést leválaszthatjuk az operátorokról. A Schrödinger-képben tehát egyszerűen  $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ -t írhatunk.

A  $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$  operátor egy  $\mathbf{r}$  helyen lévő atomot tud létrehozni. Nézzünk erre egy példát. Jelölje  $|0\rangle$  a rendszer vákuum-állapotát. Tekintsük a  $|\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\rangle = \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_1)\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_2)|0\rangle$  állapotot. Ez két db atomot ír le, melyek közül az egyik az  $\mathbf{r}_1$ , a másik az  $\mathbf{r}_2$  helyen tartózkodik. Hasonlóan értelmezhető a  $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$  eltüntető-operátor hatása is.

Az imént bevezetett operátorokra bozonok esetén kommutátor-relációkat kell előírnunk. Ehhez idézzük fel a harmonikus oszcillátor kvantálásánál látott hasonló relációkat. Az  $\hat{a}$  eltüntető- és az  $\hat{a}^\dagger$  keltő-operátorra ott a következő relációkat kaptuk:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (3.1a)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}] = 0 \quad (3.1b)$$

$$[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0 \quad (3.1c)$$

Ezen relációk természetes általánosítását posztuláljuk most  $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ -re:

$$[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')] = \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.2a)$$

$$[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}(\mathbf{r}')] = 0 \quad (3.2b)$$

$$[\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')] = 0 \quad (3.2c)$$

(3.2c)-t alkalmazva a fenti példákra:

$$|\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\rangle = \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_1)\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_2)|0\rangle = \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_2)\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_1)|0\rangle = |\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)\rangle, \quad (3.3)$$

ami világosan mutatja, hogy az általunk leírt részecskék *bozonok*. A teljes részecskeszám operátorát a (2.2)-es formula általánosítása adja:

$$\hat{N} = \int_V \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) d^3r \quad (3.4)$$

Vagyis  $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r})$  a részecskeszám-sűrűség operátora.

A rendszer Hamilton-operátorát a (2.4)-es egyenlet általánosításával kaphatjuk meg:

$$\hat{H} = \int_V \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) d^3r \quad (3.5)$$

A (2.9)-es klasszikus mozgásegyenlet helyébe a  $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$  operátor Heisenberg-képbeli mozgásegyenlete lép:

$$\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)] \quad (3.6)$$

(3.5)-öt behelyettesítve:

$$\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{\hbar} \int_V [\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t), \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)] \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}') \right) \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t) d^3r' \quad (3.7)$$

(3.2a) felhasználásával egyszerűen kiadódik a jobboldal:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \quad (3.8)$$

ami az (2.1)-es egyenlet operátoros megfelelője.

## 3.2. Módusfüggvények szerinti kifejtés

A  $V \rightarrow \mathbb{C}$  négyzetesen integrálható függvények terén ( $V \subset \mathbb{R}^3$ ) vegyünk egy teljes ortonormált rendszert. A függvényeket jelölje  $u_k(\mathbf{r})$ . Ezek a függvények adják meg a lehetséges egyrészecske-állapotokat. Az ortonormáltságot kifejező reláció:

$$\int_V u_k^*(\mathbf{r}) u_l(\mathbf{r}) d^3r = \delta_{kl} \quad (3.9)$$



A teljességi reláció pedig:

$$\sum_k u_k(\mathbf{r}) u_k^*(\mathbf{r}') = \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.10)$$

Fejtsük ki  $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ -t az imént bevezetett módusfüggvények szerint:

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sum_k \hat{c}_k u_k(\mathbf{r}) \quad (3.11)$$

A kifejtési együtthatóként definiált  $\hat{c}_k$  operátor az  $u_k(\mathbf{r})$  egyrészecske-hullámfüggvénnyel jellemzett állapotban lévő atomot tüntet el, adjungáltja pedig egy ilyen állapotú atomot kelt. Ezek az operátorok egymástól független kvantumos harmonikus oszcillátorokat írnak le. Ezért a következő kommutátor-relációknak kell eleget tenniük:

$$[\hat{c}_k, \hat{c}_l^\dagger] = \delta_{kl} \quad (3.12a)$$

$$[\hat{c}_k, \hat{c}_l] = 0 \quad (3.12b)$$

$$[\hat{c}_k^\dagger, \hat{c}_l^\dagger] = 0 \quad (3.12c)$$

Ezek a relációk fejezik ki azt a tényt, hogy az egyes módusokban elhelyezett részecskék *bozonok*. A kvantumtérelméletünk Hilbert-terét a harmonikus oszcillátorok Hilbert-tereinek direkt szorzata adja. Ezt a teret *Fock-térnek* nevezzük.

A (3.2a) kommutátor-reláció (3.12a)-tól természetesen nem független: le kell ellenőriznünk a két posztulátum konzisztenciáját. Ehhez helyettesítsük be a (3.11)-es kifejtést (3.2a)-ba:

$$\begin{aligned} [\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')] &= \sum_{k,l} u_k(\mathbf{r}) u_l^*(\mathbf{r}') \underbrace{[\hat{c}_k, \hat{c}_l^\dagger]}_{\delta_{kl}} = \sum_k u_k(\mathbf{r}) u_k^*(\mathbf{r}') \\ &= \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (3.13)$$

A két kifejezés egyenlőségét tehát a (3.10)-es teljességi reláció biztosítja. A másik két kommutátor-reláció konzisztenciája hasonló módon ellenőrizhető. Érdekes kihangsúlyozni az imént felmerült kérdés tipikus voltát: a későbbiekben gyakran fogjuk majd azt vizsgálni, hogy bizonyos transzformációk milyen hatással vannak a kommutátor-relációkra.

Az  $u_k(\mathbf{r})$  módusban lévő atomok számát a  $\hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k$  operátor adja meg. A teljes részecskeszámot a (3.11) kifejtésnek a (3.4)-es egyenletbe való behelyettesítésével kapjuk meg:

$$\hat{N} = \int_V \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) d^3r = \sum_{k,l} \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_l \underbrace{\int_V u_k^*(\mathbf{r}) u_l(\mathbf{r}) d^3r}_{\delta_{kl}} = \sum_k \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k \quad (3.14)$$

A teljes részecskeszámot tehát az egyes módusokban lévő részecskék számának összege adja, ahogy a fizikai szemlélet alapján várhattuk. Hasonló számolással kapjuk (3.5)-ből a rendszer Hamilton-operátorát:

$$\hat{H} = \sum_{k,l} \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_l \int_V u_k^*(\mathbf{r}) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right) u_l(\mathbf{r}) d^3r \quad (3.15)$$

Az  $u_k(\mathbf{r})$  függvényeket célszerű az egyrészecskes Hamilton-operátor sajátfüggvényeinek választani.

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r})\right) u_k(\mathbf{r}) = \epsilon_k u_k(\mathbf{r}), \quad (3.16)$$

ahol az  $\epsilon_k$  energiaszintek monoton növényő sorozatot alkotnak. (3.16)-ot a fenti formulába helyettesítve és (3.9)-et kihasználva kapjuk a végeredményt:

$$\hat{H} = \sum_k \epsilon_k \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k \quad (3.17)$$

A (3.17)-es egyenlet fizikai tartalma nyilvánvaló: az  $\epsilon_k$  energiájú módusban lévő atomok száma  $\hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k$ . A (3.17)-es egyenlet tehát azt fejezi ki, hogy a rendszer teljes energiája az őt alkotó egyes atomok energiáinak összegeként áll elő. Ez az állítás azért igaz, mert az atomok közötti kölcsönhatást elhanyagoltuk.

A  $T = 0K$  hőmérsékletű Bose-Einstein kondenzátum esetében természetesen az összes atom a legkisebb energiájú  $u_0(\mathbf{r})$  módusban tartózkodik. Most igazolódott azon korábbi kijelentésünk, hogy a másodkvantált formalizmusban tetszőleges különböző állapotban lévő atomok is leírhatók, a Bose-Einstein-kondenzátum leírása a formalizmusnak csupán speciális esete.

## 4. Bose-Einstein kondenzátum optikai rezonátorban

”The whole is more than the sum of its parts.”

Arisztotelész: Metafizika

### 4.1. A modell alapjai

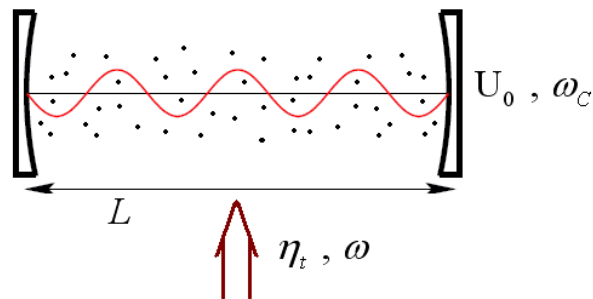
A dolgozat további részében egy optikai rezonátorba helyezett,  $N$  atomból álló, zérus hőmérsékletű Bose-Einstein kondenzátum kölcsönhatását vizsgáljuk a rezonátorbeli elektromágneses mezővel. Az EM mezőnek csak egyetlen, kvázi-rezonáns módusával foglalkozunk, aminek a körfrekvenciája  $\omega_C$ . ( A jelölés az angol cavity szóból származik, ami magyarul üreget jelent. ) A kondenzátum atomjait oldalról koherensen pumpáljuk egy  $\omega$  körfrekvenciájú lézerrésszel (1. ábra).

Az atomok lehetséges belső állapotai közül csak kettőt veszünk figyelembe, egy alap- és egy gerjesztett állapotot. Jelölje  $\omega_A$  az atomi átmeneti frekvenciát a két állapot között. Az üreg rezonanciafrekvenciáját és az atomi átmeneti frekvenciát célszerű a gerjesztő lézerrésszel kapcsolni. Ezért vezessük be a  $\Delta_C = \omega - \omega_C$  és

$\Delta_A = \omega - \omega_A$  elhangolásokat. Alkalmazzunk az atomokhoz képest nagy vörös elhangolást, vagyis  $\omega$ -t válasszuk  $\omega_A$ -nál jóval kisebbre. Ekkor  $\Delta_A$  abszolút értékben jóval nagyobb lesz a spontán emisszióból származó természetes vonalszélességnél. Ebben az esetben az atomok nem tudják tartósan elnyelni a lézerről érkező fotonokat. (2. ábra)

Az energia-idő határozatlansági reláció miatt egy nagyon rövid időtartamra az energia bizonytalansága mégis elég nagy lehet ahhoz, hogy az atom elnyelje a fotont, de a kis időtartam letelte után újra ki kell bocsájtania azt. Végeredményben tehát az atom elnyelni nem, szórnival tudja a fotonokat. A lézerről érkező fotonok tehát az atomokon történő szóródással bekerülhetnek a rezonátorba.

Természetesen az üregben tartózkodó fotonok is kölcsönhatnak az atomokkal. Ez a kölcsönhatás diszperzív: az atomok megváltoztatják a rezonátorban körbe-körbe rohanó fotonok optikai úthosszát, vagyis eltolják a frekvenciájukat. A diszperzív kölcsönhatás erősségét modellünkben az  $U_0 = g_{Rabi}^2/\Delta_A$  paraméter jellemzi. Itt  $g_{Rabi}$  az ún. egyfotonos Rabi-frekvencia, ami egy atom és az üregbeli EM mező kölcsönhatásának erősségét adja meg frekvencia egységekben. A vörös elhangolás miatt  $\Delta_A < 0$  és így  $U_0 < 0$ . Az atomokon való szóródás segítségével megvalósított transzverz pumpálás erősségét pedig az  $\eta_t = \Omega_{Rabi} \cdot g_{Rabi}/\Delta_A$  paraméter méri. Itt  $\Omega_{Rabi}$  a lézerrésszel tartozó Rabi-frekvencia. A képletekből látható, hogy mind  $U_0$ , mind  $\eta_t$  frekvencia dimenziójú.



1. ábra. A kísérleti elrendezés.

Az egyszerűség kedvéért csak az üregrezonátor tengelyének irányába mutató  $x$  térdimenziót vesszük figyelembe a modellben. Az üreg hosszát jelölje  $L$ . Az üreg módusfüggvénye ebben az esetben  $\cos(kx)$ , ahol  $k \cdot L$  egész számú többszöröse  $\pi$ -nek. A másodkvantált formalizmusnak megfelelően az atomokat a  $\hat{\Psi}(x)$ , a vizsgált rezonátor-módust pedig az  $\hat{a}$  eltüntető-operátorral, illetve adjungáltjaikkal írjuk le.

A valóságban az üregrezonátorból irreverzibilis módon fotonok léphetnek ki, ami a rendszert nyílttá teszi. Ezzel az effektussal itt az (5.10) alfejezetet leszámítva nem foglalkozunk, a rendszert zártnak tekintjük és a Hamilton-operátorának az alapállapotát keressük.

**Mértékegység-rendszer:** Mostantól

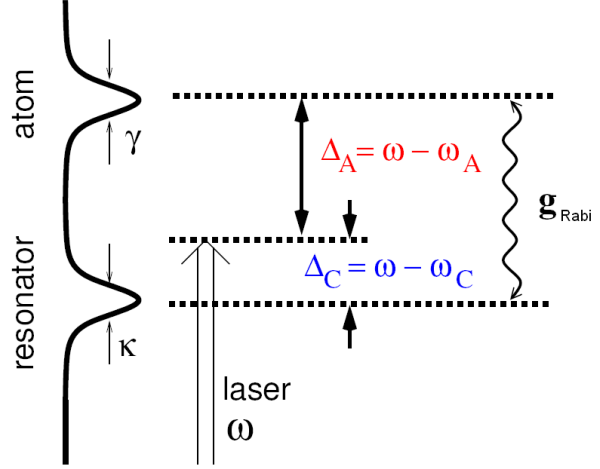
$\hbar = 1$  egységrendszert használok az egész dolgozatban. Ez lehetővé teszi a körfrekvencia és az energia szavak szinonimaként való használatát.

A sokrészecskés Hamilton-operátor az  $\omega$  pumpafrekvenciával együtt oszcilláló vonatkoztatási rendszerben:

$$\hat{H} = -\Delta_C \hat{a}^\dagger \hat{a} + \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \hat{\Psi}^\dagger(x) \left( -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} \cos^2(kx) + \eta_t \cos(kx) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \right) \hat{\Psi}(x) dx \quad (4.1)$$

(4.1) első tagja a rezonátorban lévő fotonok összenergiáját adja meg:  $-\Delta_C = \omega_C - \omega$  a fotonok energiája az új vonatkoztatási rendszerben,  $\hat{a}^\dagger \hat{a}$  pedig a fotonok számát megadó operátor. A második tag az atomok mozgási energiája: ezt a tagot már a korábbiakban is láttuk. A harmadik tag írja le az atomok és az üreg közötti kölcsönhatást. A kölcsönhatási energia sűrűsége látható módon arányos a fotonszámnak és az atomszám-sűrűségnek  $(\hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x))$  a szorzatával. Ezen tag hatása kétféleképpen is interpretálható: egyrészt az atomokra nézve egy  $U_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} \cos^2(kx)$  effektív potenciált jelent, aminek a mélysége arányos a fotonszámmal. Másrészt  $\hat{a}^\dagger \hat{a}$  kiemelése után ez a tag (4.1) első tagjával is összevonható: innen látszik, hogy a kölcsönhatási tag a fotonok szempontjából a  $-\Delta_C$  frekvencia eltolását eredményezi.

Végül a negyedik tag írja le a pumpáló lézerfény hatását: az  $(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$  résznek köszönhetően a rezonátorba fotonok léphetnek be és ki. Az atomok szerepe a pumpálásnál abból látható, hogy ebben a tagban is megjelenik az atomszám-sűrűség: minél több atom van egy adott helyen, a be- és kiszórás annál nagyobb mértékű ott. Végül megjegyzem, hogy az atomok szempontjából ez a tag is egy effektív potenciálként jelentkezik.



2. ábra. A paraméterek.

## 4.2. Módusok szerinti kifejtés

A (4.1) harmadik és negyedik tagjában fellépő  $\cos^2(kx)$  és  $\cos(kx)$  függvények miatt célszerű az

$$\left\{ \sqrt{\frac{1}{L}}, \left\{ \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(nkx) \right\}_{n=1}^{\infty}, \left\{ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(nkx) \right\}_{n=1}^{\infty} \right\} \quad (4.2)$$

teljes ortonormált rendszert használni  $\hat{\Psi}(x)$  kifejtéséhez. Mivel a két effektív potenciálban csak a hely páros függvényei szerepelnek, ezért a paritásszimmetria miatt a páros és a páratlan módusfüggvényekkel jellemzett módusok nem csatolódnak egymáshoz. Ez matematikailag onnan látható, hogy az ilyen csatolásoknál páratlan függvények origóra szimmetrikus intervallumra vett integráljai jelennek meg, amik mindig 0-t adnak. Tudjuk, hogy  $U_0 = \eta_t = 0$  esetén az összes atom a legalacsonyabb (nulla) mozgási energiájú homogén módusban van. Azt akarjuk majd vizsgálni, hogy  $U_0$  és  $\eta_t$  értékét változtatva miként megy át az atomok egy része a magasabban fekvő módusokba. Az előbbiekből következik, hogy legalulról átmenet csak a páros függvényekkel jellemzett módusokba lehetséges. Tehát  $\hat{\Psi}(x)$  kifejtésénél a páratlan függvényekkel nem is kell foglalkoznunk:

$$\hat{\Psi}(x) = \sqrt{\frac{1}{L}} \hat{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(nkx) \hat{c}_n \quad (4.3)$$

Helyettesítsük be a (4.3)-as kifejtést (4.1)-be. A fellépő integrálok könnyen kiszámolhatók és a következő eredmények adódnak:

A teljes részecskeszám:

$$\hat{N} = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_n \quad (4.4)$$

A mozgási energiában fellépő tag:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \hat{\Psi}^\dagger(x) \left( -\frac{d^2}{dx^2} \hat{\Psi}(x) \right) dx = k^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_n \quad (4.5)$$

A pumpálásnál fellépő tag:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \hat{\Psi}^\dagger(x) \cos(kx) \hat{\Psi}(x) dx &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \hat{c}_0^\dagger \hat{c}_1 + \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_0 \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_{n+1} + \hat{c}_{n+1}^\dagger \hat{c}_n \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

A diszperzív kölcsönhatást leíró tagnál:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \hat{\Psi}^\dagger(x) \cos^2(kx) \hat{\Psi}(x) dx &= \frac{1}{2} \hat{c}_0^\dagger \hat{c}_0 + \frac{3}{4} \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1 + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_n + \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \hat{c}_0^\dagger \hat{c}_2 + \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_0 \right) + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_{n+2} + \hat{c}_{n+2}^\dagger \hat{c}_n \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

A fenti formulákat (4.1)-be visszahelyettesítve megkapjuk a teljes Hamilton-operátor módusok szerint kifejtett alakját:

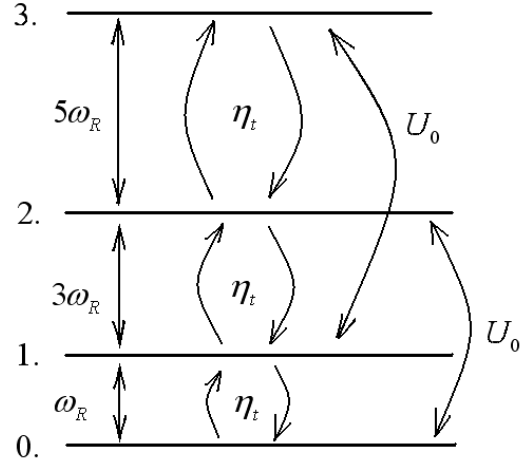
$$\begin{aligned}
\hat{H} = & -\Delta_C \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_R \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_n \\
& + \frac{\sqrt{2}}{2} \eta_t (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \left( \left( \hat{c}_0^\dagger \hat{c}_1 + \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_0 \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_{n+1} + \hat{c}_{n+1}^\dagger \hat{c}_n \right) \right) \\
& + \frac{1}{4} U_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} \left\{ 2 \hat{c}_0^\dagger \hat{c}_0 + 3 \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1 + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_n + \sqrt{2} \left( \hat{c}_0^\dagger \hat{c}_2 + \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_0 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_{n+2} + \hat{c}_{n+2}^\dagger \hat{c}_n \right) \right\}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

A (4.8)-as egyenlet láthatóan igen bonyolult lett. Az értelmezéshez ezért koncentráljunk a benne szereplő  $\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_n$  típusú tagokra. A  $j = n$  esetben már tudjuk, hogy a  $\hat{c}_n^\dagger \hat{c}_n$  tag az  $n$ . módusban lévő atomok számát adja, szorzótényezője pedig az ebben a módusban helyet foglaló egyetlen atom energiáját mondja meg. Például az első sor második tagjából leolvashatjuk, hogy az  $n$ . módushoz tartozó mozgási energia  $n^2 \omega_R$ , ahol bevezettem az  $\omega_R = \frac{k^2}{2m}$  jelölést. Ennek szemléletes jelentése a következő: ha egy atom kibocsájt egy  $k$  hullámszámú fotont, akkor az impulzusmegmaradás miatt az atom visszalökődik és éppen  $\omega_R$  energiára tesz szert. A jelölés az angol *recoil energy* szóból ered, ami magyarul visszalökődési energiát jelent. A lézerfényvel lökdösött ultrahideg atomok mozgási energiájának ez a természetes alapegysége.

A  $j \neq n$  esetben a  $\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_n$  tag egy átmenetet ír le a két módus között: (az operátor hatását jobbról balra kiértékelve) az előbb eltüntet egy atomot az  $n$ . módusból, majd kelt egyet a  $j$ . módusban. Az is látható, hogy ezek a tagok mindig párban, a  $(\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_n + \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_j)$  összeg alakjában lépnek fel. Az  $n \rightarrow j$  és a  $j \rightarrow n$  átmenetek súlya  $\hat{H}$ -ban tehát azonos. Erre azért van szükség, hogy  $\hat{H}$  önadjungáltsága biztosított legyen, ami unitér időfejlődést, vagyis időben reverzibilis dinamikát eredményez.

(4.8)-ból azt is leolvashatjuk, hogy az  $\eta_t$ -s tagokra  $j = n + 1$ , az  $U_0$ -as tagokra pedig  $j = n + 2$ . Tehát a pumpálás a szomszédos módusok között lépteti az atomokat, a diszperzív kölcsönhatás pedig a kettő távolságra levők között. A "módusok alkotta létrát" szemlélteti a 3. ábra.

Természetesen merül fel az a kérdés, hogy a fenti "létrán" a kölcsönhatási tagok milyen magasra tudják felléptetni az egyes atomokat? Ezért vizsgáljuk meg a szomszédos módusok mozgási energiában mért távolságát:  $((n + 1)^2 - n^2) \omega_R = (2n + 1) \omega_R$ , vagyis



3. ábra. A módusok alkotta létra.

fölfelé haladva a szomszédos módusok távolsága folyamatosan nő. Következésképpen tetszőlegesen nagy kölcsönhatási paraméterértékek esetén is csak véges sok módus fog részt venni a dinamikában és egy bizonyos határ felett az összes módus betöltetlen marad. A rendszerünk tehát egy effektív levágást tartalmaz.

## 5. Két módusos közelítő modell

Mivel a (4.8)-as Hamilton-operátor igen bonyolult struktúrájú, ezért vizsgálatainkat célszerű néhány egyszerűsítő föltevés mellett végezni. Tegyük fel, hogy  $U_0$  értéke elég kicsi. Ebben az esetben csak a szomszédos módusok között jöhet létre átmenet. Amennyiben  $\eta_t$  értéke sem túl nagy, átmenet csak a 0. és az 1. módus lesz. A fázisátalakulásnak egy minimum-modelljét kaphatjuk tehát azáltal, ha csak a  $\hat{c}_0$  és  $\hat{c}_1$  módusokat vesszük figyelembe. A (4.3)-as Fourier-kifejtés ezzel a következőképpen egyszerűsödik:

$$\hat{\Psi}(x) = \sqrt{\frac{1}{L}} \hat{c}_0 + \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(kx) \hat{c}_1 \quad (5.1)$$

A teljes részecskeszámot ekkor a  $\hat{N} = \hat{c}_0^\dagger \hat{c}_0 + \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1$  operátor adja meg, a Hamilton-operátor pedig:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -\Delta_C \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_R \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1 + \frac{1}{4} U_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} \left\{ 2 \hat{c}_0^\dagger \hat{c}_0 + 3 \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1 \right\} \\ & + \frac{\sqrt{2}}{2} \eta_t (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \left( \hat{c}_0^\dagger \hat{c}_1 + \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_0 \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

### 5.1. Spin-reprezentáció

Rögzítsük le a rendszerben lévő atomok számát  $N$ -re:

$$\hat{c}_0^\dagger \hat{c}_0 + \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1 = N \quad (5.3)$$

Matematikailag ez a feltétel azt jelenti, hogy vizsgálódásainkat a teljes Hilbert-térről leszűkítjük egy olyan alterre, amelyen az  $\hat{N}$  operátor felveszi az  $N$  sajátértéket. Az  $N$  db atomunk mindegyike a  $\hat{c}_0$  vagy a  $\hat{c}_1$  által leírt módusok valamelyikében van.

Alkalmazzuk most a *Schwinger-reprezentációt* [25]. Rendeljünk hozzá a rendszerhez egy  $N/2$ -es spint:  $S_z$  értéke legyen  $-N/2$ , ha az összes atom az alap-, illetve  $+N/2$ , ha mindegyikük a gerjesztett állapotban foglal helyet. A két szélsőérték között  $S_z$  értéke  $\pm 1$  -enként változhat, ami egy atom átmenetelének felel meg az egyik módusból a másikba.

Vezessük be a következő spin-operátorokat:

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2} \left( \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1 - \hat{c}_0^\dagger \hat{c}_0 \right) \quad (5.4a)$$

$$\hat{S}_+ = \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_0 \quad (5.4b)$$

$$\hat{S}_- = \hat{c}_0^\dagger \hat{c}_1 \quad (5.4c)$$

Az  $\hat{S}_z$  operátor a gerjesztett és az alapállapotban lévő atomok számának különbségétől függ: ez eleget tesz a fenti tulajdonságoknak. Az  $\hat{S}_\pm$  operátorok pedig léptetőoperátorok, amelyek egy atom átugrását írják le egyik módusból a másikba. (5.3) és (5.4a) segítségével a két módus betöltési számai is megadhatóak:

$$\hat{c}_0^\dagger \hat{c}_0 = \frac{N}{2} - \hat{S}_z \quad (5.5a)$$

$$\hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1 = \frac{N}{2} + \hat{S}_z \quad (5.5b)$$



A definíciók alapján könnyen ellenőrizhető a következő kommutátor-relációk teljesülése:

$$[\hat{S}_-, \hat{S}_+] = -2\hat{S}_z \quad (5.6a)$$

$$[\hat{S}_z, \hat{S}_+] = +\hat{S}_+ \quad (5.6b)$$

$$[\hat{S}_z, \hat{S}_-] = -\hat{S}_- \quad (5.6c)$$

Végül a Hamilton-operátort is felírhatjuk a spinváltozókkal:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -\Delta_C \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_R \left( \hat{S}_z + \frac{N}{2} \right) + \frac{1}{4} U_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} \left( \hat{S}_z + \frac{5}{2} N \right) \\ & + \frac{\sqrt{2}}{2} \eta_t (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (\hat{S}_+ + \hat{S}_-) \end{aligned} \quad (5.7)$$

A további vizsgálatokat megkönnyíti majd, ha a  $(\Delta_C, \omega_R, U_0, \eta_t)$  paraméterek használatáról áttérünk a  $(\delta_C, \omega_R, u, y)$  paraméternégyesre. A definíciók:

$$\delta_C = \Delta_C - \frac{1}{2} N U_0 \quad (5.8a)$$

$$u = \frac{1}{4} N U_0 \quad (5.8b)$$

$$y = \sqrt{2N} \eta_t \quad (5.8c)$$

A Hamilton-operátor az új paraméterekkel kifejezve:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -\delta_C \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_R \left( \hat{S}_z + \frac{N}{2} \right) + \frac{u}{N} \hat{a}^\dagger \hat{a} \left( \hat{S}_z + \frac{N}{2} \right) \\ & + \frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{N}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (\hat{S}_+ + \hat{S}_-) \end{aligned} \quad (5.9)$$

## 5.2. Analógia a Dicke-moddal

A kvantumoptika szakirodalmában behatóan tanulmányozott *Dicke-modell*  $N$  db optikai rezonátorba helyezett, rögzített, kétállapotú atom kölcsönhatását írja le a rezonátor egy módusával [26]. Az atomi átmeneti frekvenciát jelölje  $\omega_A$ , a vizsgált üregmódusét  $\omega_C$ . A csatolási állandó legyen  $\sigma$ . A Dicke-modellt leíró Hamilton-operátor:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{Dicke} = & \omega_C \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_A \left( \hat{S}_z + \frac{N}{2} \right) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (\hat{S}_+ + \hat{S}_-) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Azonnal észrevehetjük, hogy  $u = 0$  esetén a paraméterek közötti  $(-\delta_C, \omega_R, y) \leftrightarrow (\omega_C, \omega_A, \sigma)$  leképezés analógiát teremt a két modell között. Ugyanakkor jól ismert, hogy az  $N \rightarrow \infty$  termodinamikai határesetben és zérus hőmérsékleten a Dicke-modellben

egy kvantum-fázisátalakulás megy végbe [16]. A fázisátalakulás kritikus pontját a  $\sigma_{crit} = \sqrt{\omega_C \omega_A}$  összefüggés határozza meg. A  $\sigma < \sigma_{crit}$  esetben a rendszer az effektíve gerjesztetlen *normál fázisban* tartózkodik.  $\sigma > \sigma_{crit}$  esetén viszont átmegy egy kollektív és makroszkópicusan gerjesztett, ún. *”szuper-radiáns fázisba”*. Az analógia szerint mi az  $y_{crit} = \sqrt{-\delta_C \omega_R}$  pontban ( $\delta_C < 0$ ) várjuk a fázisátalakulást. Látni fogjuk, hogy a kritikus pont  $u \neq 0$  esetén sem mozdul el, sőt akkor sem, hogyha minden kondenzátum-módust figyelembe veszünk.

Bár elméleti szempontból a két modell ekvivalens, kísérleti nézőpontból korántsem az. A Dicke-modellnél a fázisátalakulási pontot az optikai tartományban várjuk, ami a küszöböt dipól-csatolással elérhetetlenné teszi. A kondenzátum esetében viszont az atomok belső dinamikáját jellemző  $\omega_A$  helyébe a külső térbeli mozgásukat leíró  $\omega_R$  visszalökődési frekvencia kerül, ami *kHz*-es tartományba esik. Következésképpen a fázisátalakulási pont is lejjebb kerül és ez lehetővé teszi a kísérleti megvalósítást.

A Dicke-modell véges  $N$  esetén a kvantumkáosz jegyeit hordja magán. Mi ezekkel a jegyekkel a továbbiakban nem foglalkozunk, csak a termodinamikai határesetet vizsgáljuk, ahol a modell egzaktul megoldható.

Jelölje az üregrezonátor belsejének térfogatát  $V$ . A *termodinamikai határesetet* az  $N \rightarrow \infty$  és  $V \rightarrow \infty$  limesszel értelmezzük, miközben az  $N/V$  részecskeszám-sűrűséget állandóan tartjuk. A Rabi-frekvencia (itt nem közölt) definíciójából következik, hogy  $g_{Rabi} \sim 1/\sqrt{V}$ . Emiatt  $U_0 \sim 1/V$  és  $\eta_t \sim 1/\sqrt{V}$ . Az újonnan bevezetett paraméterekre ez az  $u \sim N/V$  és  $y \sim \sqrt{N/V}$  arányosságokat eredményezi. Következésképpen ezek a paraméterek a termodinamikai határesetben állandóak.

### 5.3. Holstein-Primakoff reprezentáció

Vegyünk egy bozonikus  $\hat{b}$  operátort a szokásos kommutátor-relációkkal:

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1 \quad (5.11a)$$

$$[\hat{b}, \hat{b}] = 0 \quad (5.11b)$$

$$[\hat{b}^\dagger, \hat{b}^\dagger] = 0 \quad (5.11c)$$

A *Holstein-Primakoff reprezentáció* az  $\hat{S}_z$  és  $\hat{S}_\pm$  operátorok (5.6)-ban megadott kommutátor-algebráját az (5.11)-es algebra felhasználásával állítja elő [27]. A leképezés a következő:

$$\hat{S}_z = \hat{b}^\dagger \hat{b} - \frac{N}{2} \quad (5.12a)$$

$$\hat{S}_+ = \hat{b}^\dagger \sqrt{N - \hat{b}^\dagger \hat{b}} \quad (5.12b)$$

$$\hat{S}_- = \sqrt{N - \hat{b}^\dagger \hat{b}} \hat{b} \quad (5.12c)$$

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy az (5.6)-os relációk valóban kielégülnek. Az (5.11)-es relációkból tudjuk, hogy  $\hat{b}^\dagger$  egy keltő-operátor. De mit kelt? A gerjesztési kvantumok száma:

$$\hat{b}^\dagger \hat{b} = \hat{S}_z + \frac{N}{2} = \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1, \quad (5.13)$$

ahol a második lépésben (5.5b)-t használtuk. Innen látjuk, hogy  $\hat{b}$  gerjesztési kvantumai a gerjesztett módusban lévő atomok. A  $\langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle \leq N$  feltétel miatt  $\hat{b}$  Hilbert-terének nem minden állapota értelmes fizikailag. A fizikai állapotok egy véges dimenziós alteret alkotnak, melynek bázisa:  $\{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |N\rangle\}$ . A termodinamikai határesetben ez az alter átmege a teljes Hilbert-térbe. A Holstein-Primakoff reprezentáció segítségével felírt Hamilton-operátor:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -\delta_C \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_R \hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{u}{N} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{b}^\dagger \hat{b} \\ & + \frac{1}{2} y (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \left( \hat{b}^\dagger \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{N}} + \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{N}} \hat{b} \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

#### 5.4. Felbontás átlagtérre és akörüli kis fluktuációkra

Az (5.14)-es  $\hat{H}$  két csatolt harmonikus oszcillátort ír le. A csatolás bonyolult alakja miatt az egzakt kvantumos megoldást nem tudjuk meghatározni. Ezért egy *átlagtér*-közelítést alkalmazunk. Az  $\hat{a}$  és  $\hat{b}$  operátorokat felbontjuk a várható értékükre és az akörüli kvantumos oszcillációkat leíró tagokra. A várható értékekről feltételezzük, hogy időben állandóak. A fluktuációkat kis mennyiségként kezeljük. A módszer a termodinamikai határesetben egzakt eredményre vezet.

Legyen  $\langle \hat{a} \rangle = \sqrt{N} \alpha$  és  $\langle \hat{b} \rangle = \sqrt{N} \beta$ . A  $\sqrt{N}$  szorzót itt azért célszerű bedefiniálni, hogy majd később  $N \rightarrow \infty$ -re  $\alpha$  és  $\beta$  konstans legyen. Az  $\alpha$  és  $\beta$  számokról feltesszük, hogy valóságok. A későbbiekben látni fogjuk, hogy ez a feltevés *önkonzisztens*: olyan egyenleteket fogunk kapni rájuk, amelyeknek valós gyökeik lesznek. Hajtsunk végre egy eltolási transzformációt az operátorokon:

$$\hat{a} \rightarrow \sqrt{N} \alpha + \hat{a} \quad (5.15a)$$

$$\hat{b} \rightarrow \sqrt{N} \beta + \hat{b} \quad (5.15b)$$

**Konvenció:** Komplex szám és operátor összegét úgy értelmezzük, hogy a számot egy egységoperátorral megszorozva beágyazzuk az operátorok terébe.

Mivel az egységoperátor mindennel kommutál, így a transzformáció a kommutátor-relációkon nem változtat. Az eltolás után  $\langle \hat{a} \rangle = 0$  és  $\langle \hat{b} \rangle = 0$ , az új operátorok tehát a kvantum-fluktuációkat írják le. A teljes fotonszám operátora a következőképpen transzformálódik:

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} \rightarrow \left( \sqrt{N} \alpha + \hat{a} \right)^\dagger \left( \sqrt{N} \alpha + \hat{a} \right) = N \alpha^2 + \sqrt{N} \alpha (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) + \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (5.16)$$

Ennek várható értéke:

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \rightarrow N \alpha^2 + \underbrace{\sqrt{N} \alpha (\langle \hat{a}^\dagger \rangle + \langle \hat{a} \rangle)}_0 + \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \quad (5.17)$$

Vagyis a teljes fotonszám egy koherens, klasszikus részből és az ahhoz járuló inkoherens kvantum-korrekciónból áll össze. Ugyanez igaz a gerjesztett atomok számára is:

$$\langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle \rightarrow N \beta^2 + \underbrace{\sqrt{N} \beta (\langle \hat{b}^\dagger \rangle + \langle \hat{b} \rangle)}_0 + \langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle \quad (5.18)$$

Mivel a gerjesztett atomok maximális száma  $N$  és  $\langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle \geq 0$ , ezért  $\beta^2 \in [0, 1]$   
A teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy az eltolás egy unitér hasonlósági transzformációként is felfogható. Vezessük be a

$$\hat{D}_{\hat{a}}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}) \quad (5.19)$$

unitér eltolási operátort [19, 21]. Igazolható, hogy:

$$\hat{D}_{\hat{a}}^\dagger(\sqrt{N}\alpha) \hat{a} \hat{D}_{\hat{a}}(\sqrt{N}\alpha) = \sqrt{N}\alpha + \hat{a} \quad (5.20)$$

és  $\hat{b}$ -re is hasonló transzformációt végezhetünk. A Hamilton-operátor az eltolás hatására

$$\hat{H} \rightarrow \hat{D}_{\hat{b}}^\dagger(\sqrt{N}\beta) \hat{D}_{\hat{a}}^\dagger(\sqrt{N}\alpha) \hat{H} \hat{D}_{\hat{a}}(\sqrt{N}\alpha) \hat{D}_{\hat{b}}(\sqrt{N}\beta) \quad (5.21)$$

módon transzformálódik. A hasonlósági transzformáció  $\hat{H}$  spektrumán nem változtat.

## 5.5. Taylor-sorfejtés

Az eltolás utáni Hamilton-operátor:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -\delta_C \left( N \alpha^2 + \sqrt{N} \alpha (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) + \hat{a}^\dagger \hat{a} \right) \\ & + \omega_R \left( N \beta^2 + \sqrt{N} \beta (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) + \hat{b}^\dagger \hat{b} \right) \\ & + \frac{u}{N} \left( N \alpha^2 + \sqrt{N} \alpha (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) + \hat{a}^\dagger \hat{a} \right) \left( N \beta^2 + \sqrt{N} \beta (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) + \hat{b}^\dagger \hat{b} \right) \\ & + \frac{1}{2} y \left( 2\sqrt{N} \alpha + \hat{a}^\dagger + \hat{a} \right) \left( \left( \sqrt{N} \beta + \hat{b}^\dagger \right) \sqrt{1 - \frac{N \beta^2 + \sqrt{N} \beta (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) + \hat{b}^\dagger \hat{b}}{N}} + \text{adj.} \right) \end{aligned} \quad (5.22)$$

Ezt a formulát most az  $(\hat{a}, \hat{b})$  (kicsinynek tekintett) változópárban másodrendig sorbafejtjük. A gyökös kifejezés sorfejtését a  $\sqrt{1 - \epsilon} \approx 1 - \frac{1}{2} \epsilon - \frac{1}{8} \epsilon^2$  Taylor-sor segítségével végezhetjük:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \beta^2 - \frac{\sqrt{N} \beta (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) + \hat{b}^\dagger \hat{b}}{N}} &= \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{1 - \left( \frac{\sqrt{N} \beta (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) + \hat{b}^\dagger \hat{b}}{N(1 - \beta^2)} \right)} \\ &\approx \sqrt{1 - \beta^2} \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{N} \beta (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) + \hat{b}^\dagger \hat{b}}{N(1 - \beta^2)} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{\sqrt{N} \beta (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) + \hat{b}^\dagger \hat{b}}{N(1 - \beta^2)} \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (5.23)$$

amiből a másodnál magasabb rendű tagok elhagyhatóak. A sorfejtés inentől csak polinomokkal való egyszerű manipulációt jelent: fel kell bontanunk a zárójeleket és egymás mellé kell csoportosítanunk az azonos rendű tagokat. Végül egy rendenkénti kifejtéshez jutunk:

$$\hat{H} = \hat{H}^{(0)} + \hat{H}^{(1)} + \hat{H}^{(2)} + \dots \quad (5.24)$$

A nulladrendű tag:

$$\hat{H}^{(0)} = E_0(\alpha, \beta) = N \left( -\delta_c \alpha^2 + \omega_R \beta^2 + u \alpha^2 \beta^2 + 2y \alpha \beta \sqrt{1 - \beta^2} \right) \quad (5.25)$$

Az elsőrendű tag:

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(1)} = & \sqrt{N} \left( (-\delta_c + u \beta^2) \alpha + y \beta \sqrt{1 - \beta^2} \right) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \\ & + \sqrt{N} \left( (\omega_R + u \alpha^2) \beta + y \alpha \frac{1 - 2\beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \end{aligned} \quad (5.26)$$

A másodrendű tag:

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(2)} = & (-\delta_C + u \beta^2) \hat{a}^\dagger \hat{a} \\ & + \left( \omega_R + u \alpha^2 - y \frac{\alpha \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \hat{b}^\dagger \hat{b} \\ & + \frac{1}{2} y \frac{\alpha \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{1}{4} y \alpha \beta \frac{2 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^{3/2}} (\hat{b}^\dagger + \hat{b})^2 \\ & + \left( u \alpha \beta + \frac{y}{2} \frac{1 - 2\beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \end{aligned} \quad (5.27)$$

Azonnal észrevehetjük, hogy a rendek  $\sqrt{N}$  csökkenő hatványai szerint haladnak. Ez egyszerűen annak a következménye, hogyha egy  $\sqrt{N} \alpha + \hat{a}$  típusú összegből a kifejtésnél a második tagot választjuk, az eggyel nagyobb rendet, viszont kevesebb  $\sqrt{N}$  tényezőt fog eredményezni. A harmadik rendnél már  $\hat{H}^{(3)} \sim 1/\sqrt{N}$ , ami  $N \rightarrow \infty$  esetén 0-hoz tart. A sorfejtésünk tehát a termodinamikai határesetben egzakt. Gyanús lehet, hogy (5.27) harmadik sorában szerepel egy nulladrendűnek látszó tag. Ez a  $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$  reláció kihasználásával keletkezett. Viszont nem tartalmaz  $N$ -t, ami mutatja, hogy  $\hat{H}^{(2)}$ -höz tartozik.

Tisztázzuk az egyes rendek fizikai jelentését. Ehhez képzeljük el, hogy felírjuk az  $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{b}, \hat{b}^\dagger)$  operátor-négyes mozgásegyenleteit Heisenberg-képben. Ezek:

$$\frac{d}{dt} \hat{a}(t) = i[\hat{H}, \hat{a}(t)] \quad (5.28a)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{b}(t) = i[\hat{H}, \hat{b}(t)] \quad (5.28b)$$

és adjungáltjaik. A kommutátor-relációk alapján könnyen meggondolható ökölszabály, hogy a  $\hat{H}$ -ban fellépő  $n$ -edrendű tagok a mozgásegyenletekben  $(n - 1)$ -ed rendű tagokként jelentkeznek. A nulladrendű  $\hat{H}^{(0)} = E_0(\alpha, \beta) \hat{I}$  tag mindenkivel kommutál, így

kiesik a mozgásegyenletekből. Az  $E_0(\alpha, \beta)$  tényező az energia nullszintjét tolja csak el: a sorfejtésnél viszonyítási alapnak tekintett,  $(\alpha, \beta)$  párral jellemzett koherens állapot energiáját adja. A fluktuációk energiája erre az energiára tevődik rá.

$\hat{H}^{(2)}$  a mozgásegyenletekben lineáris tagokat eredményez. Ezek a tagok határozzák majd meg a klasszikus állapot körüli fluktuációk sajátfrekvenciáit.  $\hat{H}^{(1)}$  pedig konstans tagok megjelenéséhez vezet. Tehát a következő alakú lineáris egyenletrendszerre számítunk:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{a}(t) \\ \hat{a}^\dagger(t) \\ \hat{b}(t) \\ \hat{b}^\dagger(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{\hat{H}^{(2)}} \begin{pmatrix} \hat{a}(t) \\ \hat{a}^\dagger(t) \\ \hat{b}(t) \\ \hat{b}^\dagger(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}}_{\hat{H}^{(1)}} \quad (5.29)$$

Vegyük az egyenletrendszer mindkét oldalának várható értékét.

Az eltolás óta  $\langle \hat{a} \rangle = \langle \hat{a}^\dagger \rangle = \langle \hat{b} \rangle = \langle \hat{b}^\dagger \rangle = 0$ , így az egyenletrendszer baloldala és jobboldalának első fele is azonosan 0. Következésképpen a  $\hat{H}^{(1)}$ -ből származó konstans vektor nem léphet fel. Csak akkor nem jutunk ellentmondásra, ha az  $(\alpha, \beta)$  párt úgy választjuk meg, hogy (5.26)-ban az  $(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$  és  $(\hat{b}^\dagger + \hat{b})$  tényezők együtthatóit kinullázzuk. Ez ugyanis  $\hat{H}^{(1)} = 0$ -t eredményez. A sorfejtés tehát megadja nekünk azt a pontot is, ami körül sorfejtenünk kell.

## 5.6. Átlagterek meghatározása

(5.26)-ban a 2 tényező kinullázásával a következő egyenletrendszert kapjuk  $(\alpha, \beta)$ -ra:

$$(-\delta_c + u\beta^2) \alpha = -y\beta \sqrt{1 - \beta^2} \quad (5.30a)$$

$$(\omega_R + u\alpha^2) \beta = -y\alpha \frac{1 - 2\beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (5.30b)$$

Most látjuk igazolódni két korábban tett kijelentésünket. Egyrészt  $\alpha$ -ra és  $\beta$ -ra valós egyenletrendszert adódott, másrészt ez az egyenletrendszer csak olyan paramétereket tartalmaz, amelyek a termodinamikai határesetben állandóak. Ezek a tulajdonságok pedig az  $(\alpha, \beta)$  párra is át fognak öröklődni. Az egyenletrendszer triviális megoldása  $\alpha = \beta = 0$ , ami a normál fázist írja le. Tegyük fel, hogy  $\alpha \neq 0$  és  $\beta \neq 0$ . A két egyenlet szorzatából a következőt kapjuk:

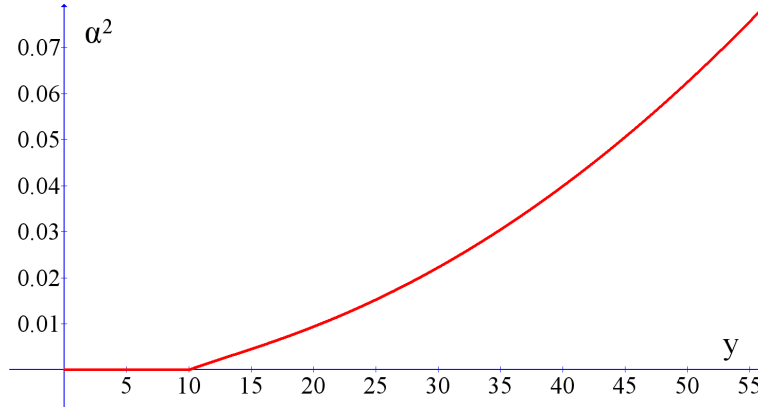
$$(-\delta_c + u\beta^2) (\omega_R + u\alpha^2) = y^2 (1 - 2\beta^2) \quad (5.31)$$

$\alpha^2$ -et kifejezhetjük (5.30a)-ból:

$$\alpha^2 = y^2 \frac{\beta^2 (1 - \beta^2)}{(-\delta_c + u\beta^2)^2} \quad (5.32)$$

Ezt (5.31)-be helyettesítve rendezés után egy másodfokú egyenletet kapunk  $\beta^2$ -re:

$$\frac{u}{\delta_c} \beta^4 - 2\beta^2 + \frac{\omega_R \delta_c + y^2}{\omega_R u + y^2} = 0, \quad (5.33)$$



4. ábra. A koherens fotonok száma  $N$ -re vonatkoztatva ( $\alpha^2$ ), a pumpálás erősségének ( $y$ ) függvényében. A paraméterek:  $\omega_R = 1$ ,  $\delta_C = -100$ ,  $u = -0,1$ ,  $y_{crit} = 10$ .

ahol  $\omega_R u + y^2 \neq 0$ -t feltételeztünk. Az egyenletből elsőként a fázisátalakulási pontot, vagyis a kritikus  $y_{crit}$  értéket határozzuk meg. Tudjuk, hogy a fázisátalakulási pontban  $\beta$  értéke folytonosan változik. Ezért  $y \rightarrow y_{crit}+$  esetén  $\beta^2 \rightarrow 0$ , így (5.33)-ból:

$$y_{crit}^2 = -\delta_C \omega_R \quad (5.34)$$

A Dicke-moddal való analógia alapján  $u = 0$  esetén éppen ezt vártuk. Most azt is beláttuk, hogy a kritikus pont helye  $u \neq 0$  esetén is ezzel a formulával adható meg. (5.33)-ban célszerű  $\omega_R$ -et  $y_{crit}$ -tel kifejezni:

$$\frac{u}{\delta_C} \beta^4 - 2\beta^2 + \frac{y^2 - y_{crit}^2}{y^2 - \frac{u}{\delta_C} y_{crit}^2} = 0 \quad (5.35)$$

Ennek az egyenletnek keressük  $\beta^2 \in [0, 1]$  intervallumba eső megoldását a  $\delta_C < 0$ ,  $u \leq 0$ ,  $\omega_R > 0$ ,  $y \geq y_{crit}$  paramétertartományban.

$u = 0$  esetén a megoldás azonnal fölírható:

$$\beta^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{y_{crit}^2}{y^2} \right) \quad (5.36)$$

Most tegyük föl, hogy  $u \neq 0$ . Az egyenlet diszkriminánsa:

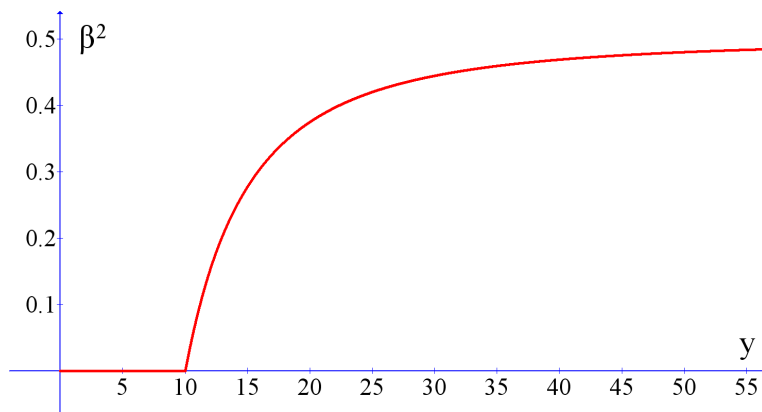
$$D = 4 \left( 1 - \frac{u}{\delta_C} \frac{y^2 - y_{crit}^2}{y^2 - \frac{u}{\delta_C} y_{crit}^2} \right) \geq 0 \quad (5.37)$$

Egyszerűen meggyőződhetünk arról, hogy ez kétféleképpen lehetséges:

- **1. eset:**  $\delta_C \leq u < 0$  és  $y_{crit}^2 \leq y^2$
- **2. eset:**  $u < \delta_C < 0$  és  $y_{crit}^2 \leq y^2 < \frac{u}{\delta_C} y_{crit}^2$

Számunkra az 1. eset az érdekes, mivel  $u$  értékéről a kétmódusos modell megalkotásánál feltettük, hogy kicsi. A  $[0, 1]$  intervallumba eső megoldást a megoldóképletből a  $-$  előjel választásával kapjuk:

$$\beta^2 = \frac{\delta_C}{u} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{u}{\delta_C} \frac{y^2 - y_{crit}^2}{y^2 - \frac{u}{\delta_C} y_{crit}^2}} \right) \quad (5.38)$$



5. ábra. A koherensen gerjesztett atomok aránya ( $\beta^2$ ) a pumpálás erősségének ( $y$ ) függvényében. Az ábráról leolvasható, hogy  $y \rightarrow \infty$  esetén az atomok fele lesz a gerjesztett állapotban. A paraméterek:  $\omega_R = 1$ ,  $\delta_C = -100$ ,  $u = -0,1$ ,  $y_{crit} = 10$ .

## 5.7. A fluktuációk vizsgálata

Az átlagtér körüli fluktuációkat a teljes Hamilton-operátor másodrendű tagjai írják le. Mivel  $\hat{H}^{(0)} = E_0(\alpha, \beta) \hat{I}$  és a  $\hat{H}^{(2)}$ -ben szereplő konstans tag a dinamikára nincs hatással, ezért a továbbiakban őket elhagyjuk  $\hat{H}$ -ből. Ez az energia nullpontjának átdefiniálását jelenti, amivel a későbbiekben is élni fogunk.

Tehát a használni kívánt Hamilton-operátor:

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= (-\delta_C + u\beta^2) \hat{a}^\dagger \hat{a} \\
&+ \left( \omega_R + u\alpha^2 - y \frac{\alpha\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \hat{b}^\dagger \hat{b} \\
&- \frac{1}{4} y \alpha \beta \frac{2-\beta^2}{(1-\beta^2)^{3/2}} (\hat{b}^\dagger + \hat{b})^2 \\
&+ \left( u\alpha\beta + \frac{y}{2} \frac{1-2\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (\hat{b}^\dagger + \hat{b})
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Az operátor vizsgálatához célszerű bevezetni az ún. *kvadratúra-amplitúdókat*. Ezek definíciója:

$$\hat{X}_a = \frac{1}{2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad \hat{Y}_a = \frac{1}{2i} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \tag{5.40a}$$

$$\hat{X}_b = \frac{1}{2} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \quad \hat{Y}_b = \frac{1}{2i} (\hat{b} - \hat{b}^\dagger) \tag{5.40b}$$

A kvadratúra amplitúdók önadjungált operátorok. Pongyolán szólva ezek az  $\hat{a}$  és  $\hat{b}$  operátorok "valós" és "képzetes" részei. Ez jól látható az  $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{b}, \hat{b}^\dagger)$  négyest megadó



inverz-relációkból:

$$\hat{a} = \hat{X}_a + i \hat{Y}_a \quad \hat{a}^\dagger = \hat{X}_a - i \hat{Y}_a \quad (5.41a)$$

$$\hat{b} = \hat{X}_b + i \hat{Y}_b \quad \hat{b}^\dagger = \hat{X}_b - i \hat{Y}_b \quad (5.41b)$$

$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$  -ből és  $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$  -ből (5.40) alapján adódnak a kommutátor-relációk:

$$[\hat{X}_a, \hat{Y}_a] = \frac{i}{2} \quad (5.42a)$$

$$[\hat{X}_b, \hat{Y}_b] = \frac{i}{2} \quad (5.42b)$$

és az összes többi kommutátor zérus.

A fotonok, valamint a gerjesztett atomok számának inkohereus részét megadó operátoroknak a kvadratúra-amplitúdókkal kifejezett alakja:

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{X}_a^2 + \hat{Y}_a^2 - \frac{1}{2} \quad (5.43a)$$

$$\hat{b}^\dagger \hat{b} = \hat{X}_b^2 + \hat{Y}_b^2 - \frac{1}{2} \quad (5.43b)$$

Végül pedig az új változókkal kifejezett Hamilton-operátor:

$$\hat{H} = M_0 \left( \hat{X}_a^2 + \hat{Y}_a^2 \right) + M_X \hat{X}_b^2 + M_Y \hat{Y}_b^2 + 2M_C \hat{X}_a \hat{X}_b, \quad (5.44)$$

ahol az  $M_j$  paramétereket a következő összefüggések definiálják:

$$M_0 = -\delta_C + u \beta^2 \quad (5.45a)$$

$$M_X = \omega_R + u \alpha^2 - y \alpha \beta \frac{3 - 2\beta^2}{(1 - \beta^2)^{3/2}} \quad (5.45b)$$

$$M_Y = \omega_R + u \alpha^2 - y \alpha \beta \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (5.45c)$$

$$M_C = 2u \alpha \beta + y \frac{1 - 2\beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (5.45d)$$

Vizsgáljuk meg az (5.44)-es operátor egyes tagjainak fizikai jelentését.

Az  $M_0 \left( \hat{X}_a^2 + \hat{Y}_a^2 \right)$ -es tag szintfelületei (az állandó energiájú felületek) az  $(\hat{X}_a, \hat{Y}_a)$  síkban körök. Ezzel szemben az  $M_X \hat{X}_b^2 + M_Y \hat{Y}_b^2$  tagnál a szintfelületek az  $(\hat{X}_b, \hat{Y}_b)$  síkban lévő ellipszisek. Ez pedig arra vezet, hogy a rendszer alapállapota az utóbbi síkban nem egy *koherens*, hanem egy ún. *összenyomott* (angolul *squeezed*) állapot lesz. A koherens és az összenyomott állapotok precíz matematikai tárgyalásához lásd [19, 21]. Itt most elégedjünk meg azzal a szemléletes képpel, hogy a koherens állapot a fázistérben egy "kis" körként, az összenyomott állapot pedig egy "kis" ellipszisként

jelenik meg. A "kis" szó itt azt a tulajdonságot takarja, hogy az ellipszis féltengelyeinek szorzata minimalizálja a

$$\Delta X_b \Delta Y_b \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{X}_b, \hat{Y}_b] \rangle \right| = \frac{1}{4} \quad (5.46)$$

Heisenberg-féle határozatlansági relációt.

Végül az (5.44)-ben utolsóként szereplő  $2M_C \hat{X}_a \hat{X}_b$  tag kölcsönhatást teremt a két harmonikus oszcillátor között. Ez a tag az alapállapotban egy két-módusos összenyomódást (angolul *two-mode squeezing*) okoz, ami az oszcillátorok összefonódásához vezet. A normál fázisban, vagyis a kritikus pont alatt  $\alpha = \beta = 0$  és így  $M_X = M_Y = \omega_R$ . Ebben az esetben az egy-módusos összenyomódás effektusa nem lép fel. Az alapállapot itt a két-módusosan összenyomott vákuuma lesz  $\hat{a}$ -nak és  $\hat{b}$ -nek. Ez valóban egy összefonódott állapot [28, 29].

Az alapállapotot mi a két módusos modellnél részleteiben nem vizsgáljuk, helyette a dinamikára helyezük a hangsúlyt. Az alapállapotban fellépő kvantumkorrelációk számolására majd az összes módus figyelembe vevő modellnél térünk vissza.

## 5.8. Heisenberg-képbeli dinamika

Vezessük be a  $\hat{\mathbf{v}} = (\hat{X}_a, \hat{Y}_a, \hat{X}_b, \hat{Y}_b)^T$  oszlopvektort és írjuk fel a mozgásegyenletét Heisenberg-képből:

$$\frac{d}{dt} \hat{v}_j(t) = i[\hat{H}, \hat{v}_j(t)], \quad (5.47)$$

ahol  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Az (5.42)-es kommutátor-relációk felhasználásával egy lineáris differenciálegyenlet-rendszerre jutunk:

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{M} \hat{\mathbf{v}}(t) \quad (5.48)$$

Az itt megjelenő  $\mathbf{M}$  mátrix:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & M_0 & 0 & 0 \\ -M_0 & 0 & -M_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_Y \\ -M_C & 0 & -M_X & 0 \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

Érdekes most egy rövid lineáris algebrai kitérőt tennünk. Az  $\mathbf{A}$  mátrixot *normális mátrixnak* nevezzük, ha  $\mathbf{A}$  és  $\mathbf{A}^\dagger$  a szorzásra nézve felcserélhető. Ez a definíció az adjungált értelmezésén keresztül természetesen függ a skalárszorzat választásától. Megmutatható, hogy egy mátrix pontosan akkor normális, ha sajátvektoraiból ortonormált bázis készíthető az adott skalárszorzatra nézve. [30] Mi a  $\mathbb{C}^4$ -en értelmezett standard skalárszorzatot használjuk, ami  $\mathbf{M}^\dagger = (\mathbf{M}^T)^*$ -nak felel meg. Könnyen ellenőrizhető, hogy esetünkben  $[\mathbf{M}, \mathbf{M}^\dagger] \neq \mathbf{0}$ . Az ilyen, nem normális mátrixokkal leírt lineáris rendszerek a naivan vártnál általában jóval gazdagabb viselkedést mutatnak. [31]

(5.48) megoldásához  $\mathbf{M}$  sajátérték-problémáját kell felhasználnunk.  $\mathbf{M}$  sajátértékeit jelölje  $\lambda_k$ , a megfelelő jobb- és baloldali sajátvektorokat pedig  $\mathbf{r}^{(k)}$  és  $\mathbf{l}^{(k)}$ . A jelölés az

angol left és right szavakra utal. Mindkét vektort oszlopvektornak tekintjük. Őket a következő egyenletek definiálják:

$$\mathbf{M} \mathbf{r}^{(k)} = \lambda_k \mathbf{r}^{(k)} \quad (5.50a)$$

$$\mathbf{M}^\dagger \mathbf{l}^{(k)} = \lambda_k^* \mathbf{l}^{(k)} \quad (5.50b)$$

és az (5.50b) egyenletből következően:  $\mathbf{l}^{(k)\dagger} \mathbf{M} = \lambda_k \mathbf{l}^{(k)\dagger}$

A baloldali sajátvektorok a jobboldaliakra nézve reciprok-bázist alkotnak:

$$\mathbf{l}^{(k)\dagger} \cdot \mathbf{r}^{(n)} = \delta_{kn} \quad (5.51)$$

Fejtsük ki  $\hat{\mathbf{v}}(t)$ -t normálmódusok szerint:

$$\hat{\mathbf{v}}(t) = \sum_{k=1}^4 \hat{\rho}_k(t) \mathbf{r}^{(k)}, \quad (5.52)$$

ahol  $\hat{\rho}_k(t) = \mathbf{l}^{(k)\dagger} \cdot \hat{\mathbf{v}}(t)$ . Ezt a kifejtést (5.48)-be helyettesítjük, majd  $\mathbf{l}^{(n)\dagger}$ -al beszorozzuk balról. (5.50a) és (5.51) kihasználásával a következő adódik:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_n(t) = \lambda_n \hat{\rho}_n(t) \quad (5.53)$$

A normálmódusok tehát egymástól függetlenül fejlődnek időben.

## 5.9. Sajátfrekvenciák meghatározása

Mivel hamiltoni dinamikát vizsgálunk, ezért a stabil fázisban tisztán képzetes sajátértékeket várunk:  $\lambda_n = -i\omega_n$ , ahol  $\omega_n \in \mathbb{R}$  jelöli a rendszer  $n$ -edik sajátfrekvenciáját. A sajátfrekvenciákat a

$$\det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}) = \det(\mathbf{M} + i\omega \mathbf{I}) = 0 \quad (5.54)$$

sajátérték-egyenlet határozza meg. A  $4 \times 4$ -es determináns kifejtése után  $\omega^2$ -re másodfokú egyenletet kapunk:

$$\omega^4 - (M_0^2 + M_X M_Y) \omega^2 + (M_0^2 M_X M_Y - M_C^2 M_0 M_Y) = 0 \quad (5.55)$$

Az egyenlet megoldásai  $\omega^2$ -re:

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{M_0^2 + M_X M_Y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{M_0^2 - M_X M_Y}{2}\right)^2 + M_C^2 M_0 M_Y} \quad (5.56)$$

A 4 db  $\omega_n$  érték az  $\omega_{\pm} \geq 0$  feltevés mellett:

$$(\omega_1, \omega_2) = (-\omega_+, +\omega_+) \text{ és } (\omega_3, \omega_4) = (-\omega_-, +\omega_-) \text{ ,}$$

vagyis a sajátfrekvenciák párokban bukkannak fel és a párokon belül az értékek egymás ellentettjei. Ez az időtükrözési szimmetria következménye. Az időtükrözés ugyanis minden frekvenciát a  $-1$  szerezésére változtat: a párok tehát kicserélődnek.

Vizsgáljuk meg, hogy mit kapunk  $\omega_{\pm}$ -ra a *normál fázisban*. Ekkor  $\alpha = \beta = 0$ -ból és (5.45)-ből következően  $M_0 = -\delta_C$ ,  $M_X = M_Y = \omega_R$  és  $M_C = y$ . Így:

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{\delta_C^2 + \omega_R^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta_C^2 - \omega_R^2}{2}\right)^2 + \delta_C^2 \omega_R^2 \frac{y^2}{y_{crit}^2}}, \quad (5.57)$$

ahol az  $y_{crit}^2 = -\delta_C \omega_R$  összefüggés is felhasználásra került. Rögtön látjuk, hogy  $u$  mindenhol kiesett, a normál fázisban tehát nincs hatással a dinamikára. Ezért nem tudja  $u$  nem zérus értéke elmozdítani a kritikus pontot. Az (5.57)-es formulának két fontos speciális esetét vizsgálhatjuk:

- $y = 0$  esetén  $\omega_+ = |\delta_C|$  és  $\omega_- = \omega_R$ . Ebben az esetben az atomok és az elektromágneses mező között nincs kölcsönhatás, így mindkettő a saját frekvenciájukkal rezegnek.
- $y = y_{crit}$  esetén  $\omega_+ = \sqrt{\delta_C^2 + \omega_R^2}$  és  $\omega_- = 0$ . A kritikus pontban a kisebb sajátfrekvencia zérussá válik. Ez az ún. *kritikus lelassulás* a fázisátalakulási pontok általános jellemzője. A kritikus pont felett  $\omega_-$  képzetessé válik: a normál fázis instabil lesz.

A kritikus pont közelében (5.57) alapján belátható, hogy  $\omega_- \sim \sqrt{y_{crit} - y}$ , az eltűnését jellemző kritikus kitevő tehát  $1/2$ . Ezt az értéket azonban nem szabad komolyan vennünk, ugyanis egy átlagtér-elméletből vezettük le. Az átlagtér-elmélet azonban a kritikus pont kis környezetében elromlik, mivel a fluktuációk lényeges szerephez jutnak. Az alapállapotra számolt  $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$  és  $\langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle$  inkoherens gerjesztések a fázisátalakulási pontban divergálnak, így hatásuk ott tetszőlegesen nagy  $N$  esetén sem hanyagolható el.

## 5.10. A környezet visszahatása a rendszerre

A rendszerünket mindeddig zártak tekintettük, a valóságban azonban nyílt: a rezonátor veszteségessége miatt a környezetbe  $2\kappa$  rátával fotonok lépnek ki. A környezet így egy folytonos, gyenge kvantummérést hajt végre a rendszeren, ami visszahat az utóbbi állapotára. Ez a visszahatás egy  $\xi(t)$  fehérzaj formájában jelentkezik, ami diffúziós folyamatban igyekszik kivinni a rendszert a kezdőállapotból. Az  $\hat{a}$  operátor mozgásegyenlete tehát a következőképpen módosul:

$$\frac{d}{dt}\hat{a}(t) = i[\hat{H}, \hat{a}(t)] - \kappa\hat{a}(t) + \hat{\xi}(t) \quad (5.58)$$

Magát a fotonvesztést leíró  $-\kappa\hat{a}$  tagot a továbbiakban elhanyagoljuk. Ezt az indokolja, hogy az alapállapotból kivívó *transziens* dinamikára, nem pedig a rendszer stacionárius egyensúlyi állapotára vagyunk kíváncsiak. Kezdetben pedig a domináns effektust a kvantumos zaj okozza. A  $\hat{\xi}(t)$  fehérzajt a

$$\langle \hat{\xi}(t) \rangle = 0 \quad (5.59a)$$

$$\langle \hat{\xi}(t) \hat{\xi}(t')^\dagger \rangle = 2\kappa \delta(t - t') \quad (5.59b)$$

$$\langle \hat{\xi}(t) \hat{\xi}(t') \rangle = \langle \hat{\xi}^\dagger(t) \hat{\xi}^\dagger(t') \rangle = \langle \hat{\xi}^\dagger(t) \hat{\xi}(t') \rangle = 0 \quad (5.59c)$$

formulák definiálják. A zaj várható értéke tehát 0, a  $\hat{\xi}$  és  $\hat{\xi}^\dagger$  különböző időpontokban felvett értékei pedig Dirac-delta szerűen korreláltak. Az összes többi korreláció együtt-ható zérus.

A kvadratúra-amplitúdókat érő zaj:

$$\hat{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\hat{\xi} + \hat{\xi}^\dagger) \\ \frac{1}{2i}(\hat{\xi} - \hat{\xi}^\dagger) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.60)$$

A  $\hat{\mathbf{q}}$  vektor komponensei közötti korrelációk (5.59) alapján:

$$\langle \hat{q}_i(t) \hat{q}_j(t') \rangle = D_{ij} \delta(t - t') \quad (5.61)$$

,ahol a  $\mathbf{D}$  diffúziós mátrix:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\kappa & \frac{i}{2}\kappa & 0 & 0 \\ -\frac{i}{2}\kappa & \frac{1}{2}\kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.62)$$

A megoldandó differenciálegyenlet (5.48)-hoz képest úgy módosul, hogy a jobboldalhoz hozzá kell adnunk  $\hat{\mathbf{q}}(t)$ -t.

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{M} \hat{\mathbf{v}}(t) + \hat{\mathbf{q}}(t) , \quad (5.63)$$

tehát egy lineáris, sztochasztikus differenciálegyenletet kell megoldanunk. Az ilyen egyenletek a szakirodalomban *Langevin-egyenlet* néven ismertek. A megoldást most is normálmódusok szerinti kifejtéssel állíthatjuk elő. Helyettesítsük be az (5.52)-es kifejtést (5.63)-ba, majd szorozzuk végig az egyenletet  $\mathbf{I}^{(n)\dagger}$ -al balról. Az eredmény az  $n$ -edik normálmódus differenciálegyenlete lesz:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_n(t) = \lambda_n \hat{\rho}_n(t) + \hat{Q}_n(t) , \quad (5.64)$$

ahol  $\hat{Q}_n(t) = \mathbf{I}^{(n)\dagger} \hat{\mathbf{q}}(t)$  az  $n$ -edik normálmódust gerjesztő zaj. Ezek korrelációs együtt-hatói:

$$\langle \hat{Q}_k(t) \hat{Q}_n(t') \rangle = \sum_{i,j} l_i^{(k)*} l_j^{(n)*} D_{ij} \delta(t - t') \quad (5.65)$$

A (5.64)-es egyenlet megoldása egyszerűen előállítható az állandó variálásának módszerével:

$$\hat{\rho}_n(t) = \hat{\rho}_n(0) e^{\lambda_n t} + \int_0^t dt' \hat{Q}_n(t') e^{\lambda_n(t-t')} , \quad (5.66)$$

ami alapján kiszámolhatjuk a normálmódusok korrelációs együtt-hatóinak időfüggését:

$$\langle \hat{\rho}_k(t) \hat{\rho}_n(t) \rangle = \langle \hat{\rho}_k(0) \hat{\rho}_n(0) \rangle e^{(\lambda_k + \lambda_n)t} + \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \langle \hat{Q}_k(t') \hat{Q}_n(t'') \rangle e^{\lambda_k(t-t') + \lambda_n(t-t'')} \quad (5.67)$$

Itt kihasználtuk, hogy  $\langle \hat{\rho}_n(0) \hat{Q}(t) \rangle = \langle \hat{Q}(t) \hat{\rho}_n(0) \rangle = 0$ , ha  $t > 0$ . (5.65)-öt behelyettesítve kapjuk a normálmódusok időfüggését leíró egyenlet végleges alakját:

$$\langle \hat{\rho}_k(t) \hat{\rho}_n(t) \rangle = \langle \hat{\rho}_k(0) \hat{\rho}_n(0) \rangle e^{(\lambda_k + \lambda_n)t} + \sum_{i,j} l_i^{(k)*} l_j^{(n)*} D_{ij} \frac{e^{(\lambda_k + \lambda_n)t} - 1}{\lambda_k + \lambda_n} \quad (5.68)$$

A normálmódusok és a kvadratúra-amplitúdók korrelációit (5.52) alapján a következő képletek kapcsolják össze:

$$\langle \hat{v}_p(t) \hat{v}_q(t) \rangle = \sum_{k,n} \langle \hat{\rho}_k(t) \hat{\rho}_n(t) \rangle r_p^{(k)} r_q^{(n)} \quad (5.69a)$$

$$\langle \hat{\rho}_k(0) \hat{\rho}_n(0) \rangle = \sum_{i,j} l_i^{(k)*} l_j^{(n)*} \langle \hat{v}_i(0) \hat{v}_j(0) \rangle \quad (5.69b)$$

Végül felírhatjuk a kvadratúra-amplitúdók korrelációinak időfüggését meghatározó egyenletet:

$$\langle \hat{v}_p(t) \hat{v}_q(t) \rangle = \sum_{i,j} \sum_{k,n} l_i^{(k)*} l_j^{(n)*} \left[ \langle \hat{v}_i(0) \hat{v}_j(0) \rangle e^{(\lambda_k + \lambda_n)t} + D_{ij} \frac{e^{(\lambda_k + \lambda_n)t} - 1}{\lambda_k + \lambda_n} \right] r_p^{(k)} r_q^{(n)} \quad (5.70)$$

Ezen egyenlet alapján tanulmányozhatjuk a korrelációk időbeli növekedését. A további részletekért lásd a [15]-ös cikket. Itt még annyit jegyzünk meg, hogy a kezdeti korrelációkra vonatkozó és kézenfekvőnek tűnő  $\langle \hat{v}_i(0) \hat{v}_j(0) \rangle = 0$  feltevés bajokhoz vezet, ugyanis ellentmond a határozatlansági relációnak. Kezdőállapotnak nem muszáj (5.44) alapállapotát választanunk, viszont fizikailag értelmes állapotot kell használnunk, ha jó eredményeket akarunk kapni. Egy célszerű választás lehet például az  $\hat{a}$  és  $\hat{b}$  operátorok vákuumállapotainak direkt szorzata:

$$|\psi_{kezdeti}\rangle = |0\rangle_a \otimes |0\rangle_b \neq |\psi_{alap}\rangle \quad (5.71)$$

Ezzel a választással a kezdeti korrelációk mátrixa:

$$\langle \hat{v}_i(0) \hat{v}_j(0) \rangle = \begin{pmatrix} +\frac{1}{4} & +\frac{i}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{i}{4} & +\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{1}{4} & +\frac{i}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{i}{4} & +\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad (5.72)$$

amit az (5.70)-es egyenletbe helyettesítve megkapjuk a korrelációk időbeli növekedését leíró formulát.

## 6. Az összes módust figyelembe vevő modell

”The fundamental laws necessary for the mathematical treatment of a large part of physics and the whole of chemistry are thus completely known, and the difficulty lies only in the fact that application of these laws leads to equations that are too complex to be solved.”

Paul Dirac, 1929

A továbbiakban célunk a teljes, (4.8)-as egyenlettel adott Hamilton-operátor alapállapotának és gerjesztési spektrumának vizsgálata. A kompaktabb kezelhetőség érdekében bevezetünk néhány lineáris algebrai jelölést.

Legyen  $\hat{\mathbf{c}} = (\hat{c}_0, \hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots)^T$  oszlop-, és  $\hat{\mathbf{c}}^\dagger = (\hat{c}_0^\dagger, \hat{c}_1^\dagger, \hat{c}_2^\dagger, \dots)$  sorvektor. A teljes részecskeszám operátora  $\hat{N} = \hat{\mathbf{c}}^\dagger \hat{\mathbf{c}}$ , a Hamilton-operátor pedig *kvadrátikus formából* állítható össze:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -\Delta_C \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_R \left( \hat{\mathbf{c}}^\dagger \mathbf{M}^{(0)} \hat{\mathbf{c}} \right) \\ & + \frac{\sqrt{2}}{2} \eta_t (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \left( \hat{\mathbf{c}}^\dagger \mathbf{M}^{(1)} \hat{\mathbf{c}} \right) + \frac{1}{4} U_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} \left( \hat{\mathbf{c}}^\dagger \left( \mathbf{M}^{(2)} + 2\mathbf{I} \right) \hat{\mathbf{c}} \right), \end{aligned} \quad (6.1)$$

ahol  $\mathbf{I}$  az egységmátrix, az  $\mathbf{M}^{(j)}$  magmátrixokat pedig a következő formulák adják meg:

$$\mathbf{M}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0^2 & & & & \\ & 1^2 & & & \\ & & 2^2 & & \\ & & & 3^2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

$$\mathbf{M}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

$$\mathbf{M}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ & & 1 & 0 & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

Az  $\mathbf{M}^{(j)}$  mátrixról érdemes megjegyezni, hogy valós, szimmetrikus, továbbá *sávdigonális*: a sáv szélességét éppen a  $j$  index adja meg. Innen könnyen olvashatjuk azt a

már korábban megállapított tulajdonságot is, hogy  $\eta_t$  egy,  $U_0$  pedig kettő távolságra léptet a módusok között.

Következő lépésként be kell állítanunk a részecskeszámot a rendszerben. Ezt a legkönnyebben a nagykanonikus sokaság alkalmazásával tudjuk elérni.

Vezessük be az ún. *nagykanonikus Hamilton-operátort* [17]:

$$\hat{K} = \hat{H} - \mu \hat{N} , \quad (6.5)$$

ahol  $\mu$  a kémiai potenciál. A Heisenberg-féle mozgásegyenletet is definiáljuk át  $\hat{K}$ -val:

$$\frac{d}{dt} \hat{F}(t) = i [\hat{K} , \hat{F}(t)] , \quad (6.6)$$

ahol  $\hat{F}$  egy tetszőleges fizikai mennyiség operátora.

Az imént történetekre többféle interpretációt is adhatunk. Egyrészt gondolhatunk  $\mu$ -re Lagrange-multiplikátorként, amellyel a részecskeszám rögzítéséből adódó kényszerfeltételt figyelembe vesszük a dinamikában. Másrészt az áttérést úgy is felfoghatjuk, hogy a  $\hat{H}$ -ban szereplő összes  $\hat{c}_n^\dagger \hat{c}_n$  típusú tag együtthatóját lecsökkentettük  $\mu$ -vel, vagyis egy tetszőleges módusban tartózkodó atom energiája=körfrekvenciája ennyivel kisebb lett. Tehát egy  $\mu$  körfrekvenciával forgó vonatkoztatási rendszerbe ültünk be a módustérben. Ez azért hasznos, mert a (2.3)-as egyenletből tudjuk, hogy a kondenzátumot leíró  $\langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \rangle = \psi(\mathbf{r}, t)$  hullámfüggvény éppen  $\mu$  körfrekvenciával oszcillál. Ez az oszcilláció a (4.3)-as kifejtésen keresztül áttevéődik  $\langle \hat{\mathbf{c}}(t) \rangle$ -re is. Így a forgó vonatkoztatási rendszerben a kondenzátumot jellemző  $\langle \hat{\mathbf{c}}(t) \rangle$  vektor időben állandó lesz.

## 6.1. Felbontás átlagtérre és fluktuációkra

A következőkben a két módusos modellnél már látott közelítést használjuk. Az  $\hat{a}$  és  $\hat{\mathbf{c}}$  operátorokat felbontjuk a várható értékükre és az akörüli fluktuációkat leíró operátorokra, majd a fluktuációkban Taylor-sorba fejtjük  $\hat{K}$ -t. Legyen  $\langle \hat{a} \rangle = \sqrt{N} \alpha$  és  $\langle \hat{\mathbf{c}} \rangle = \sqrt{N} \boldsymbol{\gamma}$ . Ezek a várható értékek időben állandóak és a két módusos modellhez hasonlóan most is feltesszük azt, hogy valósak. Ezt a feltevést később *önkonzisztensnek* fogjuk találni. A  $\sqrt{N}$  szorzókat most is azért érdemes bedefiniálni, hogy a termodinamikai határesetben konstans mennyiségeket kapjunk. Hajtsuk végre az

$$\hat{a} \rightarrow \sqrt{N} \alpha + \hat{a} \quad (6.7a)$$

$$\hat{\mathbf{c}} \rightarrow \sqrt{N} \boldsymbol{\gamma} + \hat{\mathbf{c}} \quad (6.7b)$$

eltolási transzformációt az operátorokon. Az eltolás után  $\langle \hat{a} \rangle = 0$  és  $\langle \hat{\mathbf{c}} \rangle = 0$ , az új operátorok a kvantum-fluktuációkat írják le. A teljes fotonszám és a teljes atomszám operátora a következőképpen transzformálódik:

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} \rightarrow \left( \sqrt{N} \alpha + \hat{a}^\dagger \right) \left( \sqrt{N} \alpha + \hat{a} \right) = N \alpha^2 + \sqrt{N} \alpha (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) + \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (6.8a)$$

$$\hat{\mathbf{c}}^\dagger \hat{\mathbf{c}} \rightarrow \left( \sqrt{N} \boldsymbol{\gamma}^T + \hat{\mathbf{c}}^\dagger \right) \left( \sqrt{N} \boldsymbol{\gamma} + \hat{\mathbf{c}} \right) = N + \sqrt{N} (\hat{\mathbf{c}}^\dagger \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}^T \hat{\mathbf{c}}) + \hat{\mathbf{c}}^\dagger \hat{\mathbf{c}} , \quad (6.8b)$$



ahol előírtuk a  $\gamma^T \gamma = 1$  normálási feltételt. A lineáris tagok várható értéke 0, így:

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \rightarrow N \alpha^2 + \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \quad (6.9a)$$

$$\langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle \rightarrow N + \langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle \quad (6.9b)$$

(6.9a) mutatja, hogy a teljes fotonszám a két módusos modellhez hasonlóan most is egy koherens, klasszikus és egy inkohereus részből tevődik össze. (6.8b) és (6.9b) értelmezése azonban némileg eltérő az előző modelltől látottól. Ott a gerjesztett atomok száma tevődött össze két részből, a teljes atomszám viszont fixen  $N$  volt. Most azonban a teljes atomszám operátorában  $N$  csak a nulladrendű tagot képviseli, vagyis a *kondenzátumban lévő atomok számát* adja meg. A nagykanonikus sokaság az atomok egy része számára lehetővé teszi, hogy a kondenzátumon kívül foglaljanak helyet. Ezen atomok várható számát (6.9b) szerint az eltolás utáni  $\langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle$  adja meg. Ez az érték a kritikus pont kis környezetét leszámítva természetesen kicsi. Az eltolt  $\hat{K}$  meghatározásához fel kell írunk a benne szereplő kvadratikus formák eltoltjait is:

$$\begin{aligned} \hat{c}^\dagger \mathbf{M}^{(j)} \hat{c} &\rightarrow \left( \sqrt{N} \gamma^T + \hat{c}^\dagger \right) \mathbf{M}^{(j)} \left( \sqrt{N} \gamma + \hat{c} \right) \\ &= N \gamma^T \mathbf{M}^{(j)} \gamma + \sqrt{N} \left( \hat{c}^\dagger \mathbf{M}^{(j)} \gamma + \gamma^T \mathbf{M}^{(j)} \hat{c} \right) + \hat{c}^\dagger \mathbf{M}^{(j)} \hat{c} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Az eltolás utáni nagykanonikus Hamilton-operátor:

$$\begin{aligned} \hat{K} &= -\Delta_C \left( N \alpha^2 + \sqrt{N} \alpha (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) + \hat{a}^\dagger \hat{a} \right) \\ &+ \omega_R \left( N \gamma^T \mathbf{M}^{(0)} \gamma + \sqrt{N} \left( \hat{c}^\dagger \mathbf{M}^{(0)} \gamma + \gamma^T \mathbf{M}^{(0)} \hat{c} \right) + \hat{c}^\dagger \mathbf{M}^{(0)} \hat{c} \right) \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{2} \eta_t \left( 2\sqrt{N} \alpha + \hat{a}^\dagger + \hat{a} \right) \cdot \\ &\cdot \left( N \gamma^T \mathbf{M}^{(1)} \gamma + \sqrt{N} \left( \hat{c}^\dagger \mathbf{M}^{(1)} \gamma + \gamma^T \mathbf{M}^{(1)} \hat{c} \right) + \hat{c}^\dagger \mathbf{M}^{(1)} \hat{c} \right) \\ &+ \frac{1}{4} U_0 \left( N \alpha^2 + \sqrt{N} \alpha (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) + \hat{a}^\dagger \hat{a} \right) \cdot \\ &\cdot \left( N \left( \gamma^T \mathbf{M}^{(2)} \gamma + 2 \right) + \sqrt{N} \left\{ \hat{c}^\dagger \left( \mathbf{M}^{(2)} + 2\mathbf{I} \right) \gamma + \gamma^T \left( \mathbf{M}^{(2)} + 2\mathbf{I} \right) \hat{c} \right\} + \hat{c}^\dagger \left( \mathbf{M}^{(2)} + 2\mathbf{I} \right) \hat{c} \right) \\ &- \mu \left( N + \sqrt{N} \left( \hat{c}^\dagger \gamma + \gamma^T \hat{c} \right) + \hat{c}^\dagger \hat{c} \right) \end{aligned} \quad (6.11)$$

A  $\hat{K}$ -ban szereplő tagokat  $\hat{a}$  és  $\hat{c}$  hatványai szerint kell csoportosítanunk. A két módusos modelltől eltérően itt nincs szükségünk Taylor-sorfejtésre, mert negyedrendűnél nagyobb tagok (6.11)-ben nem szerepelnek.  $\hat{K}$ -t tehát a következő alakban írjuk fel:

$$\hat{K} = \hat{K}_0 + \hat{K}_1 + \hat{K}_2 + \dots \quad (6.12)$$

Az egyes tagok felírásánál célszerű a (5.8)-ban bevezetett új paraméterezést használni. A nulladrendű tagban nincs operátor, a kalapot tehát le is hagyhatjuk:

$$K^{(0)} = N \left( -\delta_C \alpha^2 + \omega_R \left( \gamma^T \mathbf{M}^{(0)} \gamma \right) + y \alpha \left( \gamma^T \mathbf{M}^{(1)} \gamma \right) + u \alpha^2 \left( \gamma^T \mathbf{M}^{(2)} \gamma \right) - \mu \right) \quad (6.13)$$

Ez a tag nincs hatással a dinamikára, ezért a továbbiakban elhagyjuk. Vezessük be a következő függvényeket:

$$\Omega(\boldsymbol{\gamma}) = -\delta_C + u \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{M}^{(2)} \boldsymbol{\gamma} \quad (6.14a)$$

$$\mathbf{M}(\alpha) = \omega_R \mathbf{M}^{(0)} + y \alpha \mathbf{M}^{(1)} + u \alpha^2 (\mathbf{M}^{(2)} + 2\mathbf{I}) \quad (6.14b)$$

Az  $\mathbf{M}(\alpha)$  valós, szimmetrikus mátrixfüggvény  $\alpha$  másodfokú polinomja, amiben a  $j$ -edik fokszámú tag együtthatóját lényegében  $\mathbf{M}^{(j)}$  adja. Jelölje továbbá  $\mathbf{M}'(\alpha)$  ennek a függvénynek az  $\alpha$  szerinti deriváltját. Ezen jelölésekkel igen kompakt alakban fel tudjuk írni az első- és másodrendű tagokat:

$$\begin{aligned} \hat{K}^{(1)} = & \sqrt{N} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \left( \Omega(\boldsymbol{\gamma}) \alpha + \frac{1}{2} y \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{M}^{(1)} \boldsymbol{\gamma} \right) \\ & + \sqrt{N} (\hat{\mathbf{c}}^\dagger (\mathbf{M}(\alpha) - \mu \mathbf{I}) \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}^T (\mathbf{M}(\alpha) - \mu \mathbf{I}) \hat{\mathbf{c}}) \end{aligned} \quad (6.15)$$

és

$$\begin{aligned} \hat{K}^{(2)} = & \Omega(\boldsymbol{\gamma}) \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\mathbf{c}}^\dagger (\mathbf{M}(\alpha) - \mu \mathbf{I}) \hat{\mathbf{c}} \\ & + \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (\hat{\mathbf{c}}^\dagger \mathbf{M}'(\alpha) \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{M}'(\alpha) \hat{\mathbf{c}}) . \end{aligned} \quad (6.16)$$

A harmad- és negyedrendű tagokra  $K^{(3)} \sim 1/\sqrt{N}$  és  $K^{(4)} \sim 1/N$ , így ezek a termodinamikai határesetben eltűnnek. A két módosított modellhez hasonlóan  $\alpha$ -t és  $\boldsymbol{\gamma}$ -t most is úgy kell megválasztani, hogy  $\hat{K}^{(1)} = 0$  teljesüljön. Az átlagterek körüli fluktuációkat pedig  $\hat{K}^{(2)}$  írja le. Belőle azonnal le is olvashatjuk  $\Omega(\boldsymbol{\gamma})$  fizikai jelentését:  $\hat{a}^\dagger \hat{a}$  együtthatójaként ő adja meg a rezonátorbeli fotonok effektív körfrekvenciáját (a lézerfényéhez képest). A  $\boldsymbol{\gamma}$ -tól való függés arra utal, hogy ez a frekvencia függ a kondenzátum állapotától. Ez az a jelenség, aminek a felléptére már a 4.1-es fejezetben is számítottunk.

## 6.2. Az átlagterek meghatározása

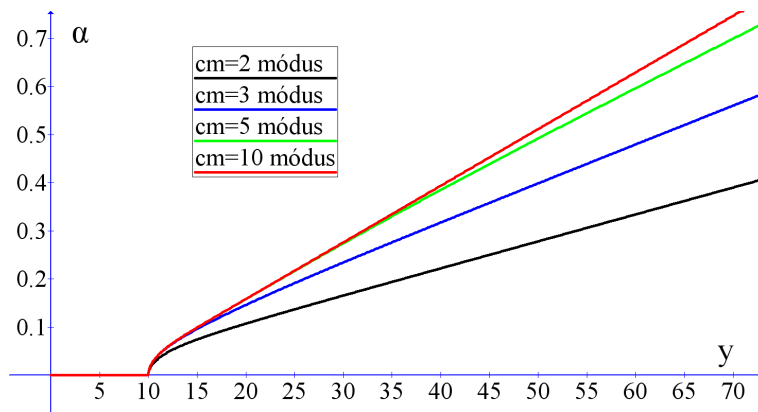
A  $\hat{K}^{(1)} = 0$  feltételből a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\Omega(\boldsymbol{\gamma}) \alpha + \frac{1}{2} y \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{M}^{(1)} \boldsymbol{\gamma} = 0 \quad (6.17a)$$

$$\mathbf{M}(\alpha) \boldsymbol{\gamma} = \mu \boldsymbol{\gamma} \quad (6.17b)$$

A (6.17)-es egyenletrendszer egy ún. *kvázi-sajátértékprobléma*: a kondenzátumot jellemző  $\boldsymbol{\gamma}$  az  $\mathbf{M}(\alpha)$  mátrix sajátvektora, a sajátérték pedig a kémiai potenciál. Mivel a mátrix szimmetrikus, ezért  $\mu$  valós szám lesz.  $\alpha$  értékét viszont az első egyenleten keresztül  $\boldsymbol{\gamma}$  határozza meg, így maga a mátrix is változik a sajátvektortól függően: erre utal a "kvázi" szócska.

Az ilyen egyenletrendszerek megoldására természetes módszerként adódik egy egyszerű iterációs algoritmus. Választunk egy kezdeti  $\alpha$  értéket és kiszámoljuk az  $\mathbf{M}(\alpha)$

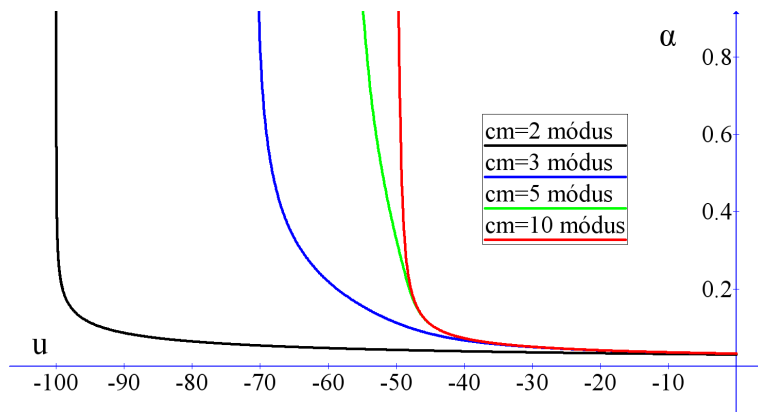


6. ábra. A koherens mezőamplitúdó ( $\alpha$ ) a pumpálás erősségének ( $y$ ) függvényében. Látható, hogy a fázisátalakulási pont helye  $cm$ -től független. A paraméterek:  $\omega_R = 1$ ,  $\delta_C = -100$ ,  $u = -20$ ,  $y_{crit} = 10$ .

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Bár matematikai nézőpontból bármelyik sajátértéket választhatnánk, a fizikai képből nyilvánvaló, hogy a kémiai potenciál a legkisebb sajátérték kell legyen, ugyanis az átlagterek a rendszer alapállapotát jellemző mennyiségek. Tehát a legkisebb sajátértéket választjuk  $\mu$ -nek és a hozzá tartozó sajátvektort  $\gamma$ -nak. Az így kapott vektort a (6.17a)-es egyenletbe helyettesítjük és kiszámoljuk belőle az új  $\alpha$ -t. Ezután mindezt megismételjük, amíg az eljárás be nem konvergál. A numerikus számolás azt mutatja, hogy a kritikus pont kis környezetét leszámítva a konvergencia igen gyorsan végbemegy.

Próbáljuk ki, hogy mit kapunk, ha az iterációt az  $\alpha = 0$  értékről indítjuk. Ekkor  $\mathbf{M}(\alpha = 0) = \omega_R \mathbf{M}^{(0)}$  diagonális mátrix, a legkisebb sajátértéke  $\mu = 0$ . A megfelelő normált sajátvektor  $\gamma = (1, 0, 0, \dots)^T$ . Ekkor  $\Omega(\gamma) = -\delta_C$  és  $\gamma^T \mathbf{M}^{(1)} \gamma = 0$ . Az (6.17a) egyenletből így  $\alpha = 0$  kapunk. Tehát találtunk is egy megoldást (6.17)-re. Ez a triviális megoldás, ami a rendszerünk normál fázisát írja le: a rezonátorban nincs foton és a teljes kondenzátum a homogén módusban foglal helyet. Látjuk, hogy ez a megoldás mindig létezik, azonban a kritikus pont felett instabillá fog válni. A többi megoldás megkeresése általában csak numerikusan végezhető el. Én ehhez  $C$  programnyelvet és a LAPACK lineáris algebra csomagot használtam: az eredmények ezen fejezet ábráin láthatóak.

A numerikus számolásnál természetesen nem tudjuk az összes kondenzátum módot kezelni, a végtelen nagy vektorokat és mátrixokat csonkolnunk kell. Az ábránál a figyelembe vett módusok számát  $cm$  jelöli. A 4.2-es alfejezetben említett levágás azonban sokat segít: a  $cm = 10$  eset már teljesen egzaktnak tekinthető. mivel a vizsgált paramétertartományban  $k \geq 10$ -re  $\gamma_k \approx 0$  négy tizedesjegy pontossággal.



7. ábra. Az  $u$ -val jellemzett kölcsönhatási tag hatása  $\alpha$ -ra.  $y$  értéke kicsivel a fázisátalakulási pont fölé lett rögzítve. Az ábrán látható, hogy  $|u|$  növelése  $\alpha$ -ban divergenciához vezet. A két módusos esetben a divergencia  $u = \delta_C$ -nél következik be. A numerikus szimuláció azt is megmutatja, hogy a divergenciához tartozó pontban az üreg effektív körfrekvenciája ( $\Omega$ ) nullához tart, vagyis a végtelen sok foton keltéséhez nem kell energiát befektetni: ezért lehetséges a divergencia. Ha  $|u|$ -et tovább növeljük, az  $\Omega < 0$  -hoz és ahhoz vezet, hogy a fluktuációkat leíró Hamilton-operátor (6.18) nem lesz alulról korlátos, vagyis megszűnik az alapállapot. A paraméterek:  $\omega_R = 1$ ,  $\delta_C = -100$ ,  $y_{crit} = 10$ ,  $y = 11$ .

### 6.3. A fluktuációk vizsgálata

Mostantól  $\alpha$  és  $\gamma$  értékét ismertnek tekintjük. Az átlagtér körüli fluktuációkat leíró nagykanonikus Hamilton-operátor:

$$\begin{aligned} \hat{K} = & \Omega(\gamma) \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\mathbf{c}}^\dagger (\mathbf{M}(\alpha) - \mu \mathbf{I}) \hat{\mathbf{c}} \\ & + \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (\hat{\mathbf{c}}^\dagger \mathbf{M}'(\alpha) \gamma + \gamma^T \mathbf{M}'(\alpha) \hat{\mathbf{c}}) . \end{aligned} \quad (6.18)$$

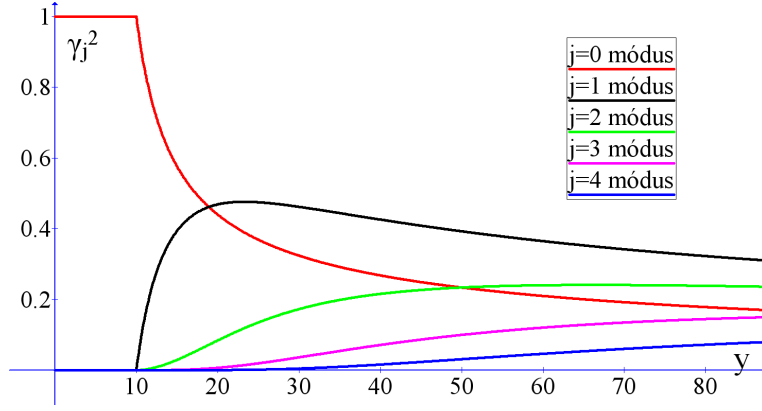
Az egyenlet kétféle csatolási tagot tartalmaz: az első sor második tagja írja le a kondenzátum-módusok egymás közötti csatolását, a második sorban lévő tagok pedig az üreg és a kondenzátum közötti csatolást. Első feladatunk az atomi módusok szétcsatolása. Ehhez a  $\hat{\mathbf{c}}^\dagger \mathbf{M}(\alpha) \hat{\mathbf{c}}$  bilineáris formában szereplő  $\mathbf{M}(\alpha)$  mátrixot kell diagonalizálnunk. Mivel a sajátvektorokat már az átlagterek számításánál numerikusan meghatároztuk, ezért a diagonalizálást most könnyen elvégezhetjük. Jelölje  $\mathbf{M}(\alpha)$  sajátértékeit  $\lambda_j$ , a megfelelő sajátvektorokat  $\mathbf{v}^{(j)}$ :

$$\mathbf{M}(\alpha) \mathbf{v}^{(j)} = \lambda_j \mathbf{v}^{(j)} , \quad (6.19)$$

ahol  $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . A mátrix szimmetrikus, így a sajátértékek valósak és azt is föltehetjük róluk, hogy növekvő sorba rendezettek. A szintén valós sajátvektorok ortonormált bázist alkotnak:

$$\mathbf{v}^{(i)T} \cdot \mathbf{v}^{(j)} = \delta_{ij} \quad (6.20)$$

A legkisebb sajátérték  $\lambda_0 = \mu$ , a hozzá tartozó sajátvektor pedig  $\mathbf{v}^{(0)} = \gamma$ .



8. ábra. A kondenzátum atomjainak eloszlása ( $\gamma_j^2$ ) a módusok között. A fázisátalakulás jól látható módon a  $\hat{c}_0$  és a  $\hat{c}_1$  módusok között jön létre, de később a többi módus is bekapcsolódik a dinamikába. A paraméterek:  $\omega_R = 1$ ,  $\delta_C = -100$ ,  $u = -20$ ,  $y_{crit} = 10$ ,  $cm = 10$ .

Rakjuk be a sajátvektorokat egy mátrix oszlopaiba:

$$\mathbf{O} = \left( \begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{v}^{(0)} & \mathbf{v}^{(1)} & \mathbf{v}^{(2)} & \dots \end{array} \right), \quad (6.21)$$

így (6.20)-nak köszönhetően egy ortogonális mátrixot kapunk:  $\mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T = \mathbf{I}$   
Hajtsunk végre  $\mathbf{O}$ -val egy ortogonális transzformációt  $\hat{\mathbf{c}}$ -on:

$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{O} \cdot \hat{\mathbf{b}} \quad \hat{\mathbf{c}}^\dagger = \hat{\mathbf{b}}^\dagger \cdot \mathbf{O}^T \quad (6.22)$$

Az új,  $\hat{\mathbf{b}}$  operátorral jellemzett atomi módusoktól is elvárjuk, hogy bozonikus kommutátor-relációkat elégítsenek ki:

$$[\hat{b}_k, \hat{b}_l^\dagger] = \delta_{kl} \quad (6.23a)$$

$$[\hat{b}_k, \hat{b}_l] = 0 \quad (6.23b)$$

$$[\hat{b}_k^\dagger, \hat{b}_l^\dagger] = 0 \quad (6.23c)$$

Első feladatunk a (3.12) és (6.23) relációk konzisztenciájának ellenőrzése. Egyedül (3.12a) és (6.23a) konzisztenciája nem triviális. A következő számolás mutatja, hogy ez a transzformáció ortogonalitásán múlik:

$$\begin{aligned} \delta_{kl} = [\hat{c}_k, \hat{c}_l^\dagger] &= \left[ \sum_i O_{ki} \hat{b}_i, \sum_j O_{lj} \hat{b}_j^\dagger \right] = \sum_{i,j} O_{ki} O_{lj} \underbrace{[\hat{b}_i, \hat{b}_j^\dagger]}_{\delta_{ij}} = \\ &= \sum_i O_{ki} O_{li} = \sum_i O_{ki} (O^T)_{il} = (\mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T)_{kl} = \delta_{kl} \end{aligned} \quad (6.24)$$

Megjegyezzük, hogy (6.22) egy speciális *Bogoljubov transzformációt* jelent. Általában így nevezzük a keltő- és eltüntető operátorokat összekeverő olyan lineáris transzformációkat, amelyek megtartják a kommutátor-relációkat [21]. A mi transzformációnk specialitása abban rejlik, hogy az eltüntető operátorokat csak más eltüntető operátorokkal keveri, keltőkkel nem. Az interpretációhoz írjuk ki a (6.22)-es transzformációt részletesen a sajátvektorokkal:

$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{O} \cdot \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{v}^{(0)} \cdot \hat{b}_0 + \mathbf{v}^{(1)} \cdot \hat{b}_1 + \mathbf{v}^{(2)} \cdot \hat{b}_2 + \dots \quad (6.25)$$

Tudjuk, hogy  $\mathbf{v}^{(0)} = \boldsymbol{\gamma}$ , így a  $\hat{b}_0$ -as módus a kondenzátum irányába eső gerjesztéseit írja le az atomoknak. A többi sajátvektor  $\mathbf{v}^{(0)}$ -ra merőleges. Következésképpen a  $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots$  módusok a kondenzátum irányára merőleges gerjesztéseket írnak le.

Írjuk fel most már a transzformáció hatását a  $\hat{K}$ -ban az atomi módusokat összecsatoló tagra:

$$\hat{\mathbf{c}}^\dagger (\mathbf{M}(\alpha) - \mu \mathbf{I}) \hat{\mathbf{c}} = \hat{\mathbf{b}}^\dagger \cdot \mathbf{O}^T (\mathbf{M}(\alpha) - \mu \mathbf{I}) \mathbf{O} \cdot \hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{b}}^\dagger (\boldsymbol{\Lambda} - \mu \mathbf{I}) \hat{\mathbf{b}}, \quad (6.26)$$

ahol  $\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{M}(\alpha) \cdot \mathbf{O} = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots)$ . A  $\hat{\mathbf{b}}$  operátorral leírt módusok tehát egymáshoz már nem csatolódnak. A teljes nagykanonikus Hamilton-operátor a következőképpen írható:

$$\hat{K} = \Omega(\boldsymbol{\gamma}) \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\mathbf{b}}^\dagger (\boldsymbol{\Lambda} - \mu \mathbf{I}) \hat{\mathbf{b}} + \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \left( \hat{\mathbf{b}}^\dagger \cdot \mathbf{g} + \mathbf{g}^T \cdot \hat{\mathbf{b}} \right), \quad (6.27)$$

ahol  $\mathbf{g} = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{M}'(\alpha) \boldsymbol{\gamma}$ . Ez az alak már elég egyszerű ahhoz, hogy áttérhessünk indexes írásmódra:

$$\hat{K} = \Omega(\boldsymbol{\gamma}) \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_j - \mu) \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} g_j (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \left( \hat{b}_j^\dagger + \hat{b}_j \right) \quad (6.28)$$

Ez a Hamilton-operátor a kvantumoptikában jól ismert: egy harmonikus oszcillátorok fürdőjébe helyezett harmonikus oszcillátort ír le. A formulából leolvashatjuk, hogy a  $\hat{b}_j$  módus körfrekvenciája  $\lambda_j - \mu$  és ez a módus  $\hat{a}$ -hoz a  $g_j$  csatolási állandóval csatolódik. Vegyük észre, hogy  $\lambda_0 = \mu$  miatt a kondenzátum irányú gerjesztéseket leíró  $\hat{b}_0$  módus körfrekvenciája zérus, a  $\hat{b}_0^\dagger \hat{b}_0$  tag  $\hat{K}$ -ból kiesik. A kondenzátum irányú gerjesztéseknek tehát nincs saját dinamikájuk, azok csak a kondenzátumban lévő atomok  $N$  számát perturbálják meg. Hogy ezt lássuk, ahhoz írjuk fel a teljes atomszám  $\hat{N}$  operátorát (6.8b) a  $\hat{\mathbf{b}}$  módusokkal:

$$\begin{aligned} \hat{N} &= N + \sqrt{N} (\hat{\mathbf{c}}^\dagger \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}^T \hat{\mathbf{c}}) + \hat{\mathbf{c}}^\dagger \hat{\mathbf{c}} \\ &= N + \sqrt{N} \left( \hat{\mathbf{b}}^\dagger \cdot \mathbf{O}^T \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{O} \cdot \hat{\mathbf{b}} \right) + \hat{\mathbf{b}}^\dagger \cdot \underbrace{\mathbf{O}^T \mathbf{O}}_{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{b}} \end{aligned} \quad (6.29)$$

A sajátvektorok ortonormáltsága (6.20) miatt  $\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{O} = (1, 0, 0, \dots)$ . Vagyis:

$$\hat{N} = N + \sqrt{N} \left( \hat{b}_0^\dagger + \hat{b}_0 \right) + \hat{\mathbf{b}}^\dagger \hat{\mathbf{b}} \quad (6.30)$$

Tehát a  $\hat{b}_0^\dagger + \hat{b}_0$  operátor felelős  $N$  perturbációjáért. Vegyük észre, hogy  $\hat{K}$ -ban  $\hat{b}_0$  egyedül ebben a  $\hat{b}_0^\dagger + \hat{b}_0$  kombinációban jelenik meg. Ez a tag viszont önmagával kommutál, tehát:

$$[\hat{K}, \hat{b}_0^\dagger + \hat{b}_0] = 0, \quad (6.31)$$

ami azt jelenti, hogy  $\hat{b}_0^\dagger + \hat{b}_0$  megmaradó mennyiség a (6.6)-os mozgásegyenlet szerint. Mivel egymással kommutáló operátoroknak létezik közös sajátfüggvény-rendszere, ezért  $\hat{K}$  diagonalizálását elég  $\hat{b}_0^\dagger + \hat{b}_0$  sajátalterein külön-külön elvégezni. Egy sajátaltéren belül  $\hat{b}_0^\dagger + \hat{b}_0$  helyettesíthető a megfelelő sajátértékével.

Másrészt viszont tudjuk, hogy  $\langle \hat{\mathbf{c}} \rangle = 0$ , így  $\langle \hat{\mathbf{b}} \rangle = 0$  szintén. Ebből következően  $\langle \hat{b}_0^\dagger + \hat{b}_0 \rangle = 0$ , tehát az egyetlen releváns sajátaltér az, amelyikhez zérus sajátérték tartozik. Vagyis a fizikai állapotok alterén

$$\hat{b}_0^\dagger + \hat{b}_0 = 0, \quad (6.32)$$

ami ahhoz vezet, hogy a  $\hat{b}_0$  operátor kiesik  $\hat{K}$ -ből. Gondolatmenetünk eredményét úgy foglalhatjuk össze, hogy a kondenzátum-irányú gerjesztéseket ki kell zárni a Hamilton-operátorból.

(6.28) értelmezéséhez végül még gondoljuk meg, hogy mi történne, ha  $\mu$  értékének nem a legkisebb sajátértéket választottuk volna. Ekkor a  $\lambda_j - \mu$  sajátfrekvenciák között negatív értékek is előfordulnának. Egy negatív energiájú gerjesztési kvantum behelyezése a rendszer összenégiáját csökkenti, ezért egyre több atom kerülne ebbe a negatív energiás módusba: az átlagtér-megoldást a fluktuációk instabillá tennék. Egy fizikailag értelmes Hamilton-operátor spektrumának alulról mindig korláatosnak kell lennie. ( Kitekintésként megjegyzem, hogyha a Dirac-egyenletet bozonikus kommutátor-relációkkal próbáljuk kvantálni, akkor éppen ebbe a problémába ütközünk bele. )

## 6.4. Gerjesztési spektrum: kvázirészecskék

A kondenzátum-irányú gerjesztések kizárása után a nagykanonikus Hamilton-operátor:

$$\hat{K} = \Omega(\gamma) \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j - \mu) \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} g_j (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (\hat{b}_j^\dagger + \hat{b}_j) \quad (6.33)$$

Célunk ezen operátor diagonalizálása a kölcsönhatási tag kitranszformálásával. Vezessünk be kvadratúra amplitúdókat a következő definíciókkal:

$$\hat{x}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \quad \hat{p}_0 = i \sqrt{\frac{\Omega}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \quad (6.34a)$$

$$\hat{x}_j = \frac{1}{\sqrt{2(\lambda_j - \mu)}} (\hat{b}_j^\dagger + \hat{b}_j) \quad \hat{p}_j = i \sqrt{\frac{\lambda_j - \mu}{2}} (\hat{b}_j^\dagger - \hat{b}_j), \quad (6.34b)$$

ahol  $j \in \{1, 2, 3, \dots\}$ . A keltő és eltüntető operátorokat megadó inverz relációk:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\Omega}{2}} \hat{x}_0 + \frac{i}{\sqrt{2\Omega}} \hat{p}_0 \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{\Omega}{2}} \hat{x}_0 - \frac{i}{\sqrt{2\Omega}} \hat{p}_0 \quad (6.35a)$$

$$\hat{b}_j = \sqrt{\frac{\lambda_j - \mu}{2}} \hat{x}_j + \frac{i}{\sqrt{2(\lambda_j - \mu)}} \hat{p}_j \quad \hat{b}_j^\dagger = \sqrt{\frac{\lambda_j - \mu}{2}} \hat{x}_j - \frac{i}{\sqrt{2(\lambda_j - \mu)}} \hat{p}_j \quad (6.35b)$$

A kvadratúra-amplitúdókat szándékosan úgy vezetjük be, hogy azok egy egységnyi tömegű mechanikus oszcillátor koordináta és impulzus változóira emlékeztessenek. A  $\sqrt{\omega}$  típusú szorzók a definícióban később hasznosnak fognak bizonyulni. Hangsúlyozzuk, hogy az  $(\hat{x}_0, \hat{p}_0)$  kvadratúrák  $\hat{a}$ -hoz tartoznak, nem pedig  $\hat{b}_0$ -hoz, amivel már nem kell foglalkoznunk. A kommutátor-relációk a definícióból egyszerűen adódnak:

$$[\hat{x}_k, \hat{p}_l] = i \delta_{kl} \quad (6.36a)$$

$$[\hat{x}_k, \hat{x}_l] = 0 \quad (6.36b)$$

$$[\hat{p}_k, \hat{p}_l] = 0 \quad (6.36c)$$

Itt  $k, l \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Ezek éppen a Heisenberg-féle kanonikus csererelációk a  $\hbar = 1$  egységrendszerben. A részecskeszámokat megadó operátorok:

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = \frac{1}{2\Omega} \hat{p}_0^2 + \frac{1}{2} \Omega \hat{x}_0^2 - \frac{1}{2} \quad (6.37a)$$

$$\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j = \frac{1}{2(\lambda_j - \mu)} \hat{p}_j^2 + \frac{1}{2} (\lambda_j - \mu) \hat{x}_j^2 - \frac{1}{2} \quad (6.37b)$$

Végül a teljes nagykanonikus Hamilton-operátor a kvadratúra-amplitúdókkal kifejezve:

$$\hat{K} = \frac{1}{2} (\hat{p}_0^2 + \Omega^2 \hat{x}_0^2) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} (\hat{p}_j^2 + (\lambda_j - \mu)^2 \hat{x}_j^2) + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{g}_j \cdot \hat{x}_0 \hat{x}_j, \quad (6.38)$$

ahol  $\tilde{g}_j = g_j \cdot \sqrt{\Omega(\lambda_j - \mu)}$ . ( A dinamikát nem befolyásoló additív konstansokat elhagytuk. )

Vezessünk be vektorjelöléseket:  $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots)^T$  és  $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_0, \hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots)^T$ . (6.38)-at két darab kvadratikus forma összegévé tömöríthetjük:

$$\hat{K} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{p}}^T \hat{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{S} \hat{\mathbf{x}}, \quad (6.39)$$

ahol az  $\mathbf{S}$  magmátrix:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \Omega^2 & \tilde{g}_1 & \tilde{g}_2 & \cdot & \cdot \\ \tilde{g}_1 & (\lambda_1 - \mu)^2 & & & \\ \tilde{g}_2 & & (\lambda_2 - \mu)^2 & & \\ \cdot & & & \cdot & \\ \cdot & & & & \cdot \end{pmatrix} \quad (6.40)$$

Most élvezzük a (6.34)-es definíció azon előnyét, hogy az  $\hat{\mathbf{p}}$ -t tartalmazó kvadratikus forma magmátrixa az egységmátrix. Ez a definíciónál beillesztett  $\sqrt{\omega}$ -s szorzóknak köszönhető. Így elegendő az  $\mathbf{S}$  valós, szimmetrikus mátrixot diagonalizálnunk egy ortogonális transzformációval. Rakjuk be a mátrix sajátvektorait az  $\mathbf{U}$  ortogonális mátrixba:  $\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T = \mathbf{I}$  Hajtsuk végre  $\mathbf{U}$ -val a koordináta- és az impulzus-operátorokon is ugyanazt az ortogonális transzformációt:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{X}} \quad \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{P}} \quad (6.41)$$



Az új  $(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{P}})$  kvadratúrától is elvárjuk, hogy elégítsék ki a (6.36)-os csererelációkat:

$$[\hat{X}_k, \hat{P}_l] = i \delta_{kl} \quad (6.42a)$$

$$[\hat{X}_k, \hat{X}_l] = 0 \quad (6.42b)$$

$$[\hat{P}_k, \hat{P}_l] = 0 \quad (6.42c)$$

(6.36) és (6.42) konzisztenciáját a következő számolás igazolja:

$$\begin{aligned} i \delta_{kl} = [\hat{x}_k, \hat{p}_l] &= \sum_{m,n} U_{km} U_{ln} \underbrace{[\hat{X}_m, \hat{P}_n]}_{i \delta_{mn}} = \\ &= i \sum_m U_{km} U_{lm} = i (\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T)_{kl} = i \delta_{kl}, \end{aligned} \quad (6.43)$$

a másik két relációpár konzisztenciája triviális.

(6.41) hatása a nagykanonikus Hamilton-operátorra:

$$\hat{K} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{P}}^T \cdot \underbrace{\mathbf{U}^T \mathbf{U}}_{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{P}} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{X}}^T \cdot \underbrace{\mathbf{U}^T \mathbf{S} \mathbf{U}}_{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{X}}, \quad (6.44)$$

ahol  $\mathbf{D} = \text{diag}(\omega_0^2, \omega_1^2, \omega_2^2, \dots)$  diagonális mátrix, ami a rendszer sajátfrekvenciáit adja meg. Indexesen kiírva:

$$\hat{K} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \hat{P}_j^2 + \omega_j^2 \hat{X}_j^2 \right) \quad (6.45)$$

Ez a Hamilton-operátor független harmonikus oszcillátorokat ír le, amit új keltő- és eltüntető-operátorok bevezetésével könnyen diagonalizálhatunk. Legyen:

$$\hat{d}_j = \sqrt{\frac{\omega_j}{2}} \hat{X}_j + \frac{i}{\sqrt{2\omega_j}} \hat{P}_j \quad \hat{d}_j^\dagger = \sqrt{\frac{\omega_j}{2}} \hat{X}_j - \frac{i}{\sqrt{2\omega_j}} \hat{P}_j, \quad (6.46)$$

ahol most  $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . A kvadratúrákat megadó inverz-relációk:

$$\hat{X}_j = \frac{1}{\sqrt{2\omega_j}} \left( \hat{d}_j^\dagger + \hat{d}_j \right) \quad \hat{P}_j = i \sqrt{\frac{\omega_j}{2}} \left( \hat{d}_j^\dagger - \hat{d}_j \right) \quad (6.47)$$

Az új keltő és eltüntető-operátorok kommutátor-relációi (6.42)-ből adódnak:

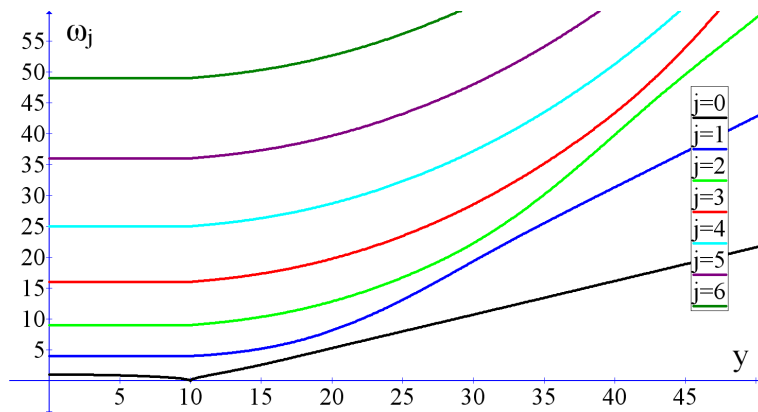
$$[\hat{d}_k, \hat{d}_l^\dagger] = \delta_{kl} \quad (6.48a)$$

$$[\hat{d}_k, \hat{d}_l] = 0 \quad (6.48b)$$

$$[\hat{d}_k^\dagger, \hat{d}_l^\dagger] = 0 \quad (6.48c)$$

Végül a Hamilton-operátor:

$$\hat{K} = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j \hat{d}_j^\dagger \hat{d}_j, \quad (6.49)$$



9. ábra. A rendszer  $\omega_j$  sajátfrekvenciái. Látható, hogy  $y = 0$  esetén  $\omega_j = j^2 \cdot \omega_R$ . A kritikus lelassulás jelensége is megfigyelhető: a fázisátalakulási pontban a legkisebb sajátfrekvencia zérussá válik. A paraméterek:  $\omega_R = 1$ ,  $\delta_C = -100$ ,  $u = -20$ ,  $y_{crit} = 10$ ,  $cm = 10$ .

ami az  $\{|n_1\rangle_{\hat{d}_1} \otimes |n_2\rangle_{\hat{d}_2} \otimes |n_3\rangle_{\hat{d}_3} \otimes \dots\}$  bázison diagonális.

Már csak a fizikai interpretációt kell megadnunk. Az eddigi lineáris transzformációk egy több lépésben elvégzett Bogoljubov transzformációt eredményeznek, ami  $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{b}}^\dagger)$  elemeit összekeveri és átviszi  $(\hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{d}}^\dagger)$  elemeibe. Ez azt jelenti, hogy a  $\hat{d}_j^\dagger$  operátor egy kvázirészecske keltését írja le, ami az atomok és az elektromágneses mező összecsatolt gerjesztéseiből áll.

A gerjesztési spektrumot tehát csak úgy tudjuk értelmezni, ha a rendszert nem az atomokból és a tőlük különálló rezonátorból összerakottnak, hanem a kettőt összekapcsoló, de egymástól független kvázirészecskék "gázának" tekintjük. ( A "gáz" szó itt a különböző kvázirészecskék közötti kölcsönhatás hiányára utal. )

Az  $\{|n_1\rangle_{\hat{d}_1} \otimes |n_2\rangle_{\hat{d}_2} \otimes |n_3\rangle_{\hat{d}_3} \otimes \dots\}$  bázisvektor, ami  $\hat{K}$ -nak sajátvektora, megadja az egyes módusokban lévő kvázirészecskék számát. A  $j$ -edik módus minden részecskéjéhez  $\omega_j$  energia tartozik. (6.49)-ben az energia nullpontját úgy választottuk, hogy az egyetlen kvázirészecskét sem tartalmazó alapállapothoz zérus energia tartozzék.

## 6.5. A normál fázisban fellépő fluktuációk vizsgálata

Alkalmazzuk az eddigiekben leírtakat a normál fázis esetére. A 6.2-es alfejezetből tudjuk, hogy a normál fázisban  $\alpha = 0$  és  $\boldsymbol{\gamma} = (1, 0, 0, \dots)^T$ , vagyis nincsenek koherens fotonok a rezonátorban, a kondenzátum pedig homogén módon tölti ki a teret.

Ekkor  $\Omega(\boldsymbol{\gamma}) = -\delta_C$  és  $\mathbf{M}(\alpha = 0) = \omega_R \mathbf{M}^{(0)}$ . Ez a mátrix már diagonális: leolvashatjuk belőle, hogy  $\mu = 0$  és  $\lambda_n = n^2 \cdot \omega_R$ . Mivel külön diagonalizálásra nem volt szükségünk, ezért  $\mathbf{O} = \mathbf{I}$  és  $\hat{\mathbf{c}} = \hat{\mathbf{b}}$ . Az  $\hat{a}$  és  $\hat{\mathbf{c}}$  közötti csatolási állandók vektora:  $\mathbf{g} = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{M}'(\alpha) \boldsymbol{\gamma}$ . Itt  $\mathbf{M}'(\alpha = 0) = y \mathbf{M}^{(1)}$ , így  $\mathbf{g} = y \cdot \mathbf{M}^{(1)} \boldsymbol{\gamma} = y \cdot (0, 1, 0, 0, \dots)^T$ . Tehát egyedül az  $\hat{a}$  és  $\hat{c}_1$  módusok csatolódnak, méghozzá a  $g_1 = y$  csatolási állandóval. A (6.33)-as

Hamilton-operátor explicit módon kiírva a következőképpen néz ki:

$$\hat{K} = -\delta_C \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_R \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_n + \frac{1}{2} y (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (\hat{c}_1^\dagger + \hat{c}_1) \quad (6.50)$$

Az  $\mathbf{S}$  mátrixban szereplő módosított csatolási állandó:  $\tilde{g}_1 = y \cdot \sqrt{-\delta_C \omega_R} = y \cdot y_{crit}$ , ahol felhasználtuk a két módusos modellnél (5.34)-el bevezetett  $y_{crit}$  jelölést. Azt még nem tudjuk, hogy a fázisátalakulási pont helyét az összes módust figyelembe vevő modellben is  $y_{crit}$  adja-e, de hamarosan ki fog derülni, hogy igen. Írjuk fel az  $\mathbf{S}$  mátrixot:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \delta_C^2 & y \cdot y_{crit} & & & \\ y \cdot y_{crit} & \omega_R^2 & & & \\ & & 4\omega_R^2 & & \\ & & & 9\omega_R^2 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (6.51)$$

Ez a mátrix blokkdiagonális és a teljes diagonalizáláshoz elegendő a felső  $2 \times 2$ -es blokkal foglalkozni. Ennek a sajátérték-egyenlete ( $\omega^2$  a sajátérték):

$$\omega^4 - (\delta_C^2 + \omega_R^2) \cdot \omega^2 + \delta_C^2 \cdot \omega_R^2 - y^2 \cdot y_{crit}^2 = 0 \quad (6.52)$$

Az egyenlet megoldása:

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{\delta_C^2 + \omega_R^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta_C^2 - \omega_R^2}{2}\right)^2 + \delta_C^2 \omega_R^2 \frac{y^2}{y_{crit}^2}}, \quad (6.53)$$

ahol az  $y_{crit}^2 = -\delta_C \omega_R$  összefüggés is felhasználásra került. Ezek a frekvenciák egzaktul megegyeznek a két módusos modellnél az (5.57)-es formulából kapottal. Ez amiatt nem túl meglepő, hogy már (6.50)-ből tudjuk, hogy a normál fázisban csak a  $\hat{c}_1$  módus csatolódik  $\hat{a}$ -hoz, ezt a csatolást pedig a két módusos modell egzaktul leírja. Viszont (5.57) azon következményét is láttuk, hogy  $y = y_{crit}$  esetén  $\omega_- = 0$  és ez a kritikus lelassulás jelzi a fázisátalakulást  $y_{crit}$ -nél. Ugyanezek a következtetések most is érvényben maradnak, tehát a kritikus pontnak most is ugyanott kell lennie! Ezzel beláttuk korábbi állításunkat.

## 6.6. A modell alapállapotának vizsgálata tetszőleges fázisban

Térjünk vissza az általános vizsgálódásokra. A (6.49)-es Hamilton-operátor alapállapotát egyszerűen úgy kaphatjuk meg, hogy egyetlen kvázirészecskét sem rakunk be a rendszerbe:

$$|\psi_{alap}\rangle = |0\rangle_{\hat{d}_1} \otimes |0\rangle_{\hat{d}_2} \otimes |0\rangle_{\hat{d}_3} \otimes \dots \quad (6.54)$$

Ha a rendszer Hilbert-terét a  $\hat{d}_j$  operátorok Hilbert-tereinek direkt szorzataként építjük fel, akkor a fenti állapot szeparálható: a kvázirészecske-módusok között az alapállapotban nincs összefonódás. Más a helyzet azonban, ha ezeket az operátorokat visszatranszformáljuk a rezonátort és az atomokat leíró eredeti  $\hat{a}$  és  $\hat{\mathbf{b}}$  operátorokba. Ha a rendszer Hilbert-terét ezen régi operátorok Hilbert-tereiből építjük fel, akkor a fenti állapotot

csak több direkt szorzat lineáris kombinációjaként írhatjuk fel, vagyis az alapállapotban a rezonátor és az atomok között összefonódás jön létre.

Az alapállapot teljes jellemzésére célszerű valamelyik kvázivalószínűség-eloszlást felhasználni. A legegyszerűbb választás a *Wigner-függvény* használata [20–22]. Belátható, hogy bilineáris Hamilton-operátorok alapállapotának Wigner-függvénye mindig egy többdimenziós Gauss-eloszlással adható meg. Ez egyszerűen annak a következménye, hogy az ilyen Hamilton-operátorok csatolt harmonikus oszcillátorokat írnak le. Ezek az oszcillátorok egy ügyesen választott Bogoljubov transzformációval szétcsatolhatók, a szétcsatolás után pedig az alapállapot az új oszcillátorok vákuum-állapotainak direkt szorzataként írható fel. Az pedig jól ismert, hogy egyetlen harmonikus oszcillátor vákuumállapotának Wigner-függvénye egy Gauss-eloszlás.

Szintén közismert, hogy a többdimenziós Gauss-eloszlásokat teljesen meghatározza a korrelációs mátrixuk: az exponenciális függvény argumentumában egy kvadratikus forma szerepel, aminek a magmátrixa éppen a korrelációs mátrix inverze [21]. Ezért a továbbiakban nekünk elegendő a korrelációs mátrix meghatározásával törődnünk. Wigner-függvény használata esetén a *Weyl korrespondenciának* [21, 22] megfelelően a korrelációs mátrixban az operátorok szorzatait szimmetrikusan kell rendeznünk.

Először a  $(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{P}})$  kvadratúrák korrelációit számoljuk ki, aztán az eredményeket áttranszformáljuk a  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}})$  kvadratúrákra. Kezdjük a koordináták szorzatainak várható értékével. Mivel a koordinátaoperátorok egymással felcserélhetők, ezért nem kell törődnünk a rendezéssel. (6.47)-et felhasználva:

$$\begin{aligned} \langle \hat{X}_k \hat{X}_l \rangle &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\omega_k \omega_l}} \langle (\hat{d}_k^\dagger + \hat{d}_k) (\hat{d}_l^\dagger + \hat{d}_l) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\omega_k \omega_l}} \langle \hat{d}_k \hat{d}_l^\dagger \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\omega_k \omega_l}} \langle [\hat{d}_k, \hat{d}_l^\dagger] \rangle = \frac{1}{2\omega_k} \delta_{kl} \end{aligned} \quad (6.55)$$

A  $\hat{d}_l$  operátor jobbról, a  $\hat{d}_k^\dagger$  operátor pedig balról tünteti el a vákuumot, ezért a 4 tagból csak 1 marad meg. Ugyanez a tulajdonság teszi lehetővé, hogy  $\hat{d}_k \hat{d}_l^\dagger$ -t kiegészíthessük kommutátorral, ugyanis a második tag várható értéke zérus. Végül a (6.48a) reláció adja a Dirac-deltát.

Ugyanígy járunk el az impulzusok szorzatainak várható értékével is:

$$\begin{aligned} \langle \hat{P}_k \hat{P}_l \rangle &= -\frac{\sqrt{\omega_k \omega_l}}{2} \langle (\hat{d}_k^\dagger - \hat{d}_k) (\hat{d}_l^\dagger - \hat{d}_l) \rangle = \\ &= \frac{\sqrt{\omega_k \omega_l}}{2} \langle \hat{d}_k \hat{d}_l^\dagger \rangle = \frac{\sqrt{\omega_k \omega_l}}{2} \langle [\hat{d}_k, \hat{d}_l^\dagger] \rangle = \frac{\omega_k}{2} \delta_{kl} \end{aligned} \quad (6.56)$$

Végül vizsgáljuk a koordináta- és impulzusoperátor szorzatokat tartalmazó vegyes tagokat. Ezek az operátorok már nem mindig kommutálnak, ezért ügyelnünk kell a szimmetrikus rendezés biztosítására:

$$\begin{aligned} \langle \{ \hat{X}_k \hat{P}_l \}_s \rangle &= \frac{1}{2} \langle \hat{X}_k \hat{P}_l + \hat{P}_l \hat{X}_k \rangle = \\ &= \frac{i}{4} \sqrt{\frac{\omega_l}{\omega_k}} \langle (\hat{d}_k^\dagger + \hat{d}_k) (\hat{d}_l^\dagger - \hat{d}_l) + (\hat{d}_l^\dagger - \hat{d}_l) (\hat{d}_k^\dagger + \hat{d}_k) \rangle = \\ &= \frac{i}{4} \sqrt{\frac{\omega_l}{\omega_k}} \langle \hat{d}_k \hat{d}_l^\dagger - \hat{d}_l \hat{d}_k^\dagger \rangle = \frac{i}{4} \sqrt{\frac{\omega_l}{\omega_k}} (\delta_{kl} - \delta_{lk}) = 0, \end{aligned} \quad (6.57)$$

ahol  $\{\dots\}_s$  jelöli a szimmetrikus rendezést.

Összefoglalva a következő korrelációs együtthatókat kaptuk:

$$\langle \hat{X}_k \hat{X}_l \rangle = \frac{1}{2\omega_k} \delta_{kl} \quad (6.58a)$$

$$\langle \hat{P}_k \hat{P}_l \rangle = \frac{\omega_k}{2} \delta_{kl} \quad (6.58b)$$

$$\langle \{\hat{X}_k \hat{P}_l\}_s \rangle = 0 \quad (6.58c)$$

Hajtsuk most végre ezeken a (6.41)-es transzformációt, hogy megkapjuk az  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}})$  kvadratúrák korrelációit:

$$\langle \hat{x}_k \hat{x}_l \rangle = \sum_{i,j=0}^{\infty} U_{ki} U_{lj} \underbrace{\langle \hat{X}_i \hat{X}_j \rangle}_{\frac{1}{2\omega_j} \delta_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} U_{kj} U_{lj} \cdot \frac{1}{\omega_j} \quad (6.59a)$$

$$\langle \hat{p}_k \hat{p}_l \rangle = \sum_{i,j=0}^{\infty} U_{ki} U_{lj} \underbrace{\langle \hat{P}_i \hat{P}_j \rangle}_{\frac{\omega_j}{2} \delta_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} U_{kj} U_{lj} \cdot \omega_j \quad (6.59b)$$

$$\langle \{\hat{x}_k \hat{p}_l\}_s \rangle = \sum_{i,j=0}^{\infty} U_{ki} U_{lj} \langle \{\hat{X}_i \hat{P}_j\}_s \rangle = 0 \quad (6.59c)$$

Mátrixhatványok segítségével ezeket a korrelációkat igen tömör alakba írhatjuk. A (6.59a)-ban szereplő  $1/\omega_j$  sajátfrekvencia a  $\mathbf{D}^{-1/2}$  diagonális mátrix főátlójában lévő  $j$ -edik elem. Így:

$$\langle \hat{x}_k \hat{x}_l \rangle = \sum_{i,j=0}^{\infty} U_{ki} U_{lj} \left( \mathbf{D}^{-1/2} \right)_{ij} = \sum_{i,j=0}^{\infty} U_{ki} \left( \mathbf{D}^{-1/2} \right)_{ij} (U^T)_{jl} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{U} \cdot \mathbf{D}^{-1/2} \cdot \mathbf{U}^T \right)_{kl} \quad (6.60)$$

Az  $\mathbf{S}$  mátrix spektrálfelbontása:  $\mathbf{S} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}^T$ , tehát a mátrixhatvány definíciója szerint:  $\mathbf{S}^{-1/2} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D}^{-1/2} \cdot \mathbf{U}^T$ . (6.59b)-vel hasonlóan bánhatunk el, ott  $\mathbf{S}^{+1/2}$  jelenik meg. Végül a korrelációkra a következőt kapjuk:

$$\langle \hat{x}_k \hat{x}_l \rangle = \frac{1}{2} \left( \mathbf{S}^{-1/2} \right)_{kl} \quad (6.61a)$$

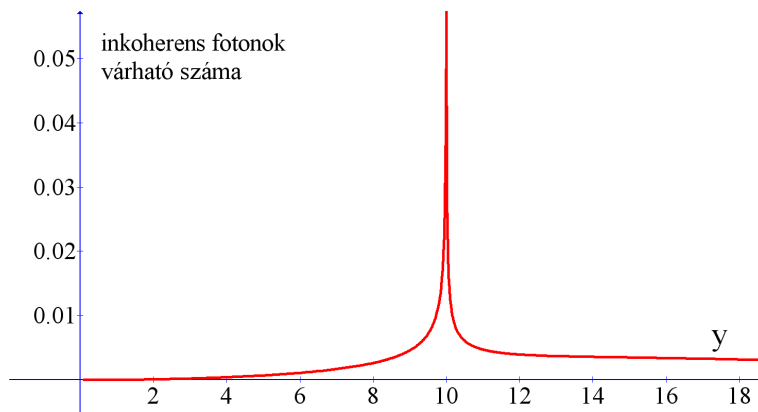
$$\langle \hat{p}_k \hat{p}_l \rangle = \frac{1}{2} \left( \mathbf{S}^{+1/2} \right)_{kl} \quad (6.61b)$$

$$\langle \{\hat{x}_k \hat{p}_l\}_s \rangle = 0 \quad (6.61c)$$

Ez természetesen nem több egy kompakt jelölésnél, a konkrét számolásokhoz a (6.59)-es formulákat kell használnunk.

Az eddigiek alkalmazásaként számoljuk ki a rezonátorban lévő inkohereus fotonok  $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$  számát. (6.37a)-ból, (6.59a)-ból és (6.59b)-ből következően:

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle &= \frac{1}{2\Omega} \langle \hat{p}_0^2 \rangle + \frac{1}{2} \Omega \langle \hat{x}_0^2 \rangle - \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{4\Omega} \sum_{j=0}^{\infty} U_{0j}^2 \omega_j + \frac{1}{4} \Omega \sum_{j=0}^{\infty} U_{0j}^2 \frac{1}{\omega_j} - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (6.62)$$



10. ábra. A rendszerben lévő inkoherens fotonok várható száma ( $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ ) a fázisátalakulási pont közelében. A paraméterek:  $\omega_R = 1$ ,  $\delta_C = -100$ ,  $u = -20$ ,  $y_{crit} = 10$ ,  $cm = 3$ .

Használjuk ki, hogy

$$\sum_{j=0}^{\infty} U_{0j}^2 = \sum_{j=0}^{\infty} U_{0j} U_{j0}^T = (\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T)_{00} = 1 \quad (6.63)$$

Ha ezt az összeget odairjuk a jobboldal utolsó tagjának végéhez, akkor a 3 tagot egy közös szummába vonhatjuk össze:

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{\infty} U_{0j}^2 \left( \frac{\omega_j}{\Omega} + \frac{\Omega}{\omega_j} - 2 \right) \quad (6.64)$$

Hasonlóan kaphatjuk meg a  $\hat{b}_k$  módusban lévő, kondenzátumon kívüli atomok számát is. Képletünkben csak a  $0 \rightarrow k$  és  $\Omega \rightarrow \lambda_k - \mu$  cseréket kell végrehajtanunk:

$$\langle \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k \rangle = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{\infty} U_{kj}^2 \left( \frac{\omega_j}{\lambda_k - \mu} + \frac{\lambda_k - \mu}{\omega_j} - 2 \right), \quad (6.65)$$

ahol  $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ .  $k$ -ra összegezve megkaphatjuk a kondenzátumon kívüli atomok teljes számát is:

$$\langle \hat{\mathbf{c}}^\dagger \hat{\mathbf{c}} \rangle = \langle \hat{\mathbf{b}}^\dagger \hat{\mathbf{b}} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} U_{kj}^2 \left( \frac{\omega_j}{\lambda_k - \mu} + \frac{\lambda_k - \mu}{\omega_j} - 2 \right), \quad (6.66)$$

Itt ügyelnünk kell arra, hogy a  $\hat{b}_k$ -hoz kapcsolódó szumma nem 0-tól, hanem csak 1-től indul.

Végül számoljuk ki a  $\hat{c}_k$  módusban lévő, kondenzátumon kívüli atomok számát is.

Ehhez az (6.22)-es transzformációt és a (6.35)-ös formulákat kell felhasználnunk:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_n \rangle &= \sum_{k,l=1}^{\infty} O_{nk} O_{nl} \langle \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_l \rangle = \sum_{k,l=1}^{\infty} O_{nk} O_{nl} \cdot \\
&\cdot \left\langle \left( \sqrt{\frac{\lambda_k - \mu}{2}} \hat{x}_k - \frac{i}{\sqrt{2(\lambda_k - \mu)}} \hat{p}_k \right) \left( \sqrt{\frac{\lambda_l - \mu}{2}} \hat{x}_l + \frac{i}{\sqrt{2(\lambda_l - \mu)}} \hat{p}_l \right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{\infty} O_{nk} O_{nl} \left( \sqrt{(\lambda_k - \mu)(\lambda_l - \mu)} \langle \hat{x}_k \hat{x}_l \rangle + \frac{1}{\sqrt{(\lambda_k - \mu)(\lambda_l - \mu)}} \langle \hat{p}_k \hat{p}_l \rangle \right) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{\infty} O_{nk} O_{nl} \left( i \sqrt{\frac{(\lambda_k - \mu)}{(\lambda_l - \mu)}} \langle \hat{x}_k \hat{p}_l \rangle - i \sqrt{\frac{(\lambda_l - \mu)}{(\lambda_k - \mu)}} \langle \hat{p}_k \hat{x}_l \rangle \right)
\end{aligned} \tag{6.67}$$

Most a korrelációs mátrix (6.59)-el adott elemeit kell behelyettesítenünk. Ám mielőtt ezt megtehetnénk,  $\langle \hat{x}_k \hat{p}_l \rangle$ -t és  $\langle \hat{p}_k \hat{x}_l \rangle$ -t szimmetrikusan rendezett alakra kell hoznunk. Ezt úgy tehetjük meg, hogy a mennyiségeket szimmetrikus és antiszimmetrikus részük összegére bontjuk föl és az antiszimmetrikus részben kihasználjuk a (6.36)-os kommutátor-relációkat:

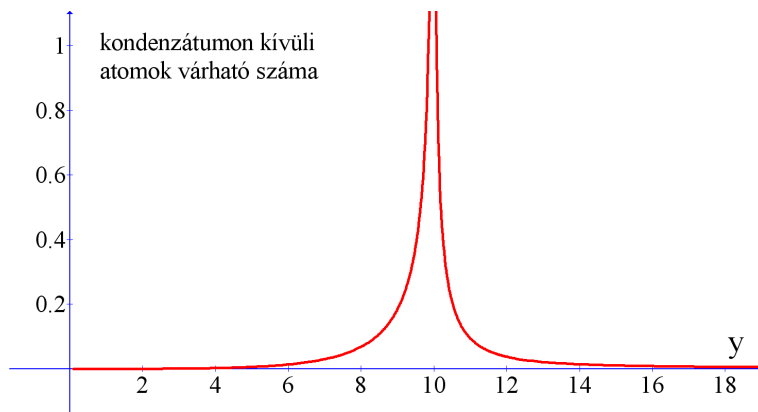
$$\begin{aligned}
\langle \hat{x}_k \hat{p}_l \rangle &= \frac{\langle \hat{x}_k \hat{p}_l \rangle + \langle \hat{p}_l \hat{x}_k \rangle}{2} + \frac{\langle \hat{x}_k \hat{p}_l \rangle - \langle \hat{p}_l \hat{x}_k \rangle}{2} \\
&= \underbrace{\langle \{\hat{x}_k \hat{p}_l\}_s \rangle}_0 + \frac{1}{2} \underbrace{\langle [\hat{x}_k, \hat{p}_l] \rangle}_{i \delta_{kl}} = \frac{i}{2} \delta_{kl}
\end{aligned} \tag{6.68}$$

és hasonlóan adódik, hogy  $\langle \hat{p}_k \hat{x}_l \rangle = -\frac{i}{2} \delta_{kl}$ . Helyettesítsük vissza ezeket a fenti képletbe:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_n \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{\infty} O_{nk} O_{nl} \left( \sqrt{(\lambda_k - \mu)(\lambda_l - \mu)} \langle \hat{x}_k \hat{x}_l \rangle + \frac{\langle \hat{p}_k \hat{p}_l \rangle}{\sqrt{(\lambda_k - \mu)(\lambda_l - \mu)}} \right) \\
&- \frac{1}{4} \sum_{k,l=1}^{\infty} O_{nk} O_{nl} \left( \sqrt{\frac{(\lambda_k - \mu)}{(\lambda_l - \mu)}} + \sqrt{\frac{(\lambda_l - \mu)}{(\lambda_k - \mu)}} \right) \delta_{kl}
\end{aligned} \tag{6.69}$$

Írjuk be most már (6.59a)-t és (6.59b)-t.  $\delta_{kl}$ -t az összevonhatóság érdekében a következővel helyettesítsük:

$$\sum_{j=0}^{\infty} U_{kj} U_{lj} = (\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T)_{kl} = \delta_{kl} \tag{6.70}$$



11. ábra. A kondenzátumon kívüli atomok teljes számának várható értéke ( $\langle \hat{\mathbf{c}}^\dagger \hat{\mathbf{c}} \rangle$ ) a fázisátalakulási pont közelében. A paraméterek:  $\omega_R = 1$ ,  $\delta_C = -100$ ,  $u = -20$ ,  $y_{crit} = 10$ ,  $cm = 3$ .

Végül a következő formulát kapjuk:

$$\langle \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_n \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k,l=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} O_{nk} O_{nl} U_{kj} U_{lj} \cdot \left( \frac{\sqrt{(\lambda_k - \mu)(\lambda_l - \mu)}}{\omega_j} + \frac{\omega_j}{\sqrt{(\lambda_k - \mu)(\lambda_l - \mu)}} - \left( \sqrt{\frac{(\lambda_k - \mu)}{(\lambda_l - \mu)}} + \sqrt{\frac{(\lambda_l - \mu)}{(\lambda_k - \mu)}} \right) \right) \quad (6.71)$$

A képlet elég bonyolultnak adódott, ezért célszerű valamilyen módon meggyőződnünk a helyességéről. Ezt úgy tesztelhetjük le a legkönnyebben, hogy kiszámoljuk újra a kondenzátumon kívüli teljes atomszámot és az eredményt összevetjük (6.66)-al. Ehhez  $\sum_{n=0}^{\infty} \langle \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_n \rangle$ -t kell kiértékelnünk. Vegyük észre, hogy az  $n$  index csak az  $O$  mátrixoknál szerepel, így a rá vonatkozó összegzés elvégezhető:

$$\sum_{n=0}^{\infty} O_{nk} O_{nl} = (\mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O})_{kl} = \delta_{kl} \quad (6.72)$$

A  $k$ -t és  $l$ -t egyenlővé téve:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_n \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} U_{kj}^2 \left( \frac{\lambda_k - \mu}{\omega_j} + \frac{\omega_j}{\lambda_k - \mu} - 2 \right) \quad (6.73)$$

és ez a formula valóban megegyezik (6.66)-al.

## 6.7. Összefonódási mértékek

Tegyük fel, hogy van egy  $\mathcal{A}$  részrendszerből és annak  $\mathcal{B}$  környezetéből álló összetett rendszerünk. A teljes rendszer legyen a  $|\psi_{alap}\rangle$  hullámfüggvénnyel jellemzett alapállapotban. A rendszer sűrűségoperátora:  $\hat{\rho} = |\psi_{alap}\rangle \langle \psi_{alap}|$ , ami egy tiszta állapotot ír le. A



részrendszer redukált sűrűségoperátora:  $\hat{\rho}_{\mathcal{A}} = Tr_{\mathcal{B}}(\hat{\rho})$ . Mivel a teljes rendszer állapota tiszta,  $\mathcal{A}$  és  $\mathcal{B}$  pontosan abban az esetben van összefonódva, ha a  $\hat{\rho}_{\mathcal{A}}$  állapot kevert. Ennek eldöntésére ún. *összefonódási mértékeket* használunk. A legelterjedtebb ilyen mérték az *összefonódási entrópia*, amely nem más, mint a részrendszer *Neumann-entrópiája*:

$$S_{\mathcal{A}} = -Tr_{\mathcal{A}}(\hat{\rho}_{\mathcal{A}} \cdot \ln \hat{\rho}_{\mathcal{A}}) \quad (6.74)$$

Egy másik lehetséges összefonódási mérték az ún. *lineáris entrópia*:

$$S_{\mathcal{A}, lin} = 1 - Tr_{\mathcal{A}}(\hat{\rho}_{\mathcal{A}}^2) \quad (6.75)$$

Mindkét mennyiségről megmutatható, hogy értékük zérus, amennyiben  $\hat{\rho}_{\mathcal{A}}$  tiszta. Kevert állapot esetén mindkét entrópia pozitív értéket vesz föl. Egy különbség azonban a két mennyiség között, hogy  $S_{\mathcal{A}}$  tetszőlegesen nagy értéket felvehet, míg  $S_{\mathcal{A}, lin} \leq 1$  lehet csak.

A mi konkrét rendszerünkben  $\mathcal{A}$  az üregrezonátor és  $\mathcal{B}$  a kondenzátum. Vezessük be a

$$\chi = \sqrt{-\langle (\hat{a}^\dagger + \hat{a})^2 \rangle \langle (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2 \rangle} \quad (6.76)$$

paramétert. Segítségével a fent értelmezett két összefonódási mértéket a következő képletekkel ( levezetés: [23, 24] ) adhatjuk meg:

$$S_{\mathcal{A}} = \frac{\chi + 1}{2} \cdot \ln \left( \frac{\chi + 1}{2} \right) - \frac{\chi - 1}{2} \cdot \ln \left( \frac{\chi - 1}{2} \right) \quad (6.77a)$$

$$S_{\mathcal{A}, lin} = 1 - \frac{1}{\chi} \quad (6.77b)$$

Egyszerű függvényanalízissel belátható, hogy a  $\chi \in (+1, +\infty)$  értelmezési tartományon mindkét függvény pozitív és szigorúan monoton növekvő.  $\chi \rightarrow 1$  esetén  $S_{\mathcal{A}} \rightarrow 0$  és  $S_{\mathcal{A}, lin} \rightarrow 0$ . Továbbá  $\chi \rightarrow +\infty$  esetén  $S_{\mathcal{A}} \rightarrow +\infty$  és  $S_{\mathcal{A}, lin} \rightarrow 1$ . A két függvényt a 12-es ábra szemlélteti.

Mindez azt jelenti, hogy magát  $\chi$ -t is használhatjuk összefonódási mértéknek:  $\chi = 1$  esetén a részrendszer állapota tiszta,  $\chi > 1$  esetén pedig egyre kevertebb.

Végezzünk el egy egyszerű próbát a (6.77)-es formulák tesztelésére. Tegyük fel, hogy  $y = u = 0$ , tehát se pumpálás, se kölcsönhatás nincs a rendszerben. Ekkor az üregrezonátor alapállapota egyszerűen az  $\hat{a}$ -hoz rendelt vákuumállapot, vagyis:  $\hat{\rho}_{\mathcal{A}} = |0\rangle\langle 0|$ . Ez egy tiszta állapot, így az előbbieik alapján elvárjuk, hogy  $\chi = 1$  legyen. Egyszerű számolással igazolhatjuk, hogy ez teljesül is:

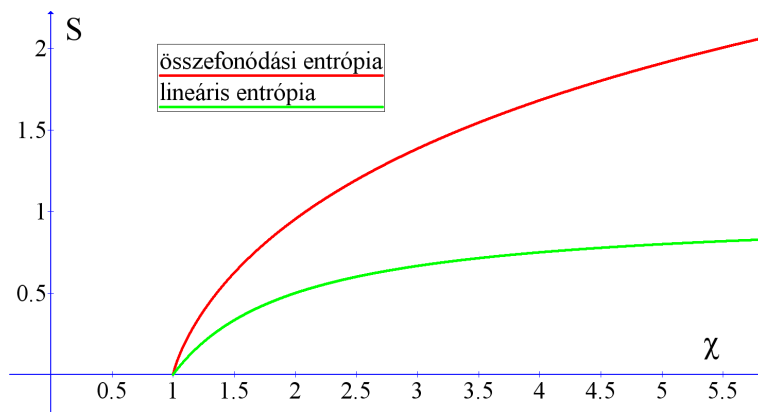
$$\langle 0 | (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a} \hat{a}^\dagger | 0 \rangle = 1 \quad (6.78a)$$

$$\langle 0 | (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) | 0 \rangle = -\langle 0 | \hat{a} \hat{a}^\dagger | 0 \rangle = -1, \quad (6.78b)$$

így  $\chi = 1$  valóban fennáll.

Térjünk vissza az általános esetre. Mivel mi a kvadratúra amplitúdók korrelációs együtthatóit ismerjük, ezért célszerű  $\chi$ -t ezekkel a mennyiségekkel is kifejezni. A (6.34)-es definíciót felhasználva:

$$\chi = 2 \cdot \sqrt{\langle \hat{x}_0^2 \rangle \langle \hat{p}_0^2 \rangle} \quad (6.79)$$



12. ábra. Az  $S_{\mathcal{A}}$  összefonódási és az  $S_{\mathcal{A},lin}$  lineáris entrópia  $\chi$  függvényében (6.77).

$\langle \hat{x}_0 \rangle = \langle \hat{p}_0 \rangle = 0$  miatt ezt a  $\Delta x_0 = \sqrt{\langle \hat{x}_0^2 \rangle}$  és  $\Delta p_0 = \sqrt{\langle \hat{p}_0^2 \rangle}$  kvadratúra-szórásokkal is felírhatjuk:

$$\chi = 2 \cdot \Delta x_0 \Delta p_0 \quad (6.80)$$

Másrészt az  $[\hat{x}_0, \hat{p}_0] = i$  kommutátorból következő határozatlansági-reláció szerint:

$$\Delta x_0 \cdot \Delta p_0 \geq \frac{1}{2} |[\langle \hat{x}_0, \hat{p}_0 \rangle]| = \frac{1}{2}, \quad (6.81)$$

ami a  $\chi \geq 1$  egyenlőtlenségre vezet. A  $\chi = 1$ -el jellemzett tiszta állapotú részrendszer egyben a határozatlansági reláció minimalizálását eredményezi. Ez annak a következménye, hogy a teljes rendszer az alapállapotban van.

Kimondhatjuk tehát azt a tételmondatot, hogy az alapállapotban lévő teljes rendszer  $\mathcal{A}$  részrendszere pontosan akkor összefonódott, ha  $\chi > 1$ , vagyis a részrendszer a rá vonatkozó határozatlansági relációt nem tudja minimalizálni.

Végül megkíséreljük a (6.77)-es formulák egy, a fent citált cikkekben szereplőtől eltérő levezetését adni a Wigner-függvény segítségével. Ehhez először az üreg korrelációs mátrixát írjuk föl:

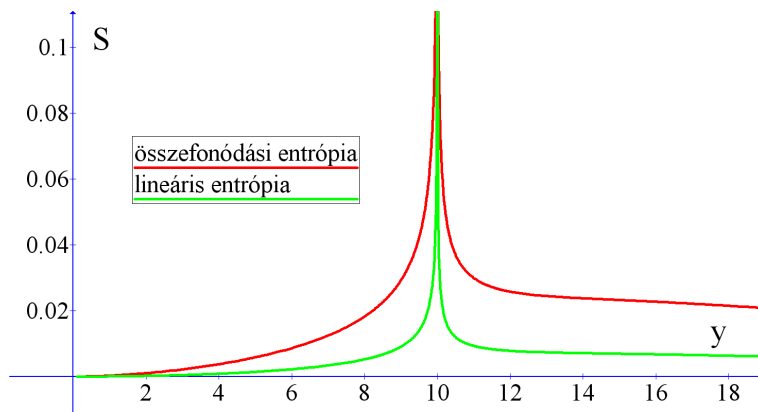
$$\mathbf{C}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \langle \hat{x}_0^2 \rangle & \langle \{\hat{x}_0 \hat{p}_0\}_s \rangle \\ \langle \{\hat{x}_0 \hat{p}_0\}_s \rangle & \langle \hat{p}_0^2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x_0^2 & 0 \\ 0 & \Delta p_0^2 \end{pmatrix}, \quad (6.82)$$

ahol kihasználtuk, hogy (6.59c) szerint  $\langle \{\hat{x}_0 \hat{p}_0\}_s \rangle = 0$ . Legyen  $\mathbf{v} = (x_0, p_0)^T$ . A részrendszer Wigner-függvénye egy két dimenziós Gauss-eloszlás, ami a korrelációs mátrix alapján [21] írható föl:

$$W_{\mathcal{A}}(x_0, p_0) = \mathcal{N} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{v} \right\} = \mathcal{N} \cdot \exp \left\{ -\left( \frac{x_0^2}{2 \Delta x_0^2} + \frac{p_0^2}{2 \Delta p_0^2} \right) \right\} \quad (6.83)$$

Az  $\mathcal{N}$  normálási tényezőt a

$$\int W_{\mathcal{A}}(x_0, p_0) d\Gamma = 1 \quad (6.84)$$



13. ábra. Az  $S_{\mathcal{A}}$  összefonódási és az  $S_{\mathcal{A},lin}$  lineáris entrópia a fázisátalakulási pont közelében. A paraméterek:  $\omega_R = 1$ ,  $\delta_C = -100$ ,  $u = -20$ ,  $y_{crit} = 10$ ,  $cm = 3$ .

normálási feltétel határozza meg, ahol az integrálási mérték:

$$d\Gamma = \frac{dx_0 dp_0}{h} = \frac{dx_0 dp_0}{2\pi} \quad (6.85)$$

Itt kihasználtuk, hogy a  $\hbar = 1$  egységrendszerben az elemi fáziscella területe:  $h = 2\pi$ . A következőkben jónéhány Gauss-integrált ki kell majd számolnunk.

A számolások alapja a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (6.86)$$

formula. Kezdjük a normálási feltétellel:

$$\begin{aligned} \int W_{\mathcal{A}}(x_0, p_0) d\Gamma &= \frac{\mathcal{N}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{x_0^2}{2\Delta x_0^2}\right\} dx_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{p_0^2}{2\Delta p_0^2}\right\} dp_0 \\ &= \frac{\mathcal{N}}{2\pi} \sqrt{2\pi\Delta x_0^2} \sqrt{2\pi\Delta p_0^2} = \mathcal{N} \cdot \Delta x_0 \cdot \Delta p_0 = 1 \end{aligned} \quad (6.87)$$

Tehát a normálási tényező:

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\Delta x_0 \Delta p_0} \quad (6.88)$$

A megfelelő módon lenormált Wigner-függvényt szimmetrikusan rendezett operátorok várható értékeinek kiszámolására használhatjuk. Legyen  $\hat{F}_{\mathcal{A}}(\hat{x}_0, \hat{p}_0)$  egy tetszőleges  $\mathcal{A}$ -n értelmezett fizikai mennyiség szimmetrikusan rendezett operátora. Legyen továbbá  $F_{\mathcal{A}}(x_0, p_0)$  a fenti mennyiség klasszikus megfelelője. A korábban már emlegetett *Weyl korrespondencia* [21, 22] szerint  $\hat{F}_{\mathcal{A}}$  várható értéke:

$$\langle \hat{F}_{\mathcal{A}} \rangle = Tr_{\mathcal{A}}(\hat{F}_{\mathcal{A}} \hat{\rho}_{\mathcal{A}}) = \int F_{\mathcal{A}}(x_0, p_0) W_{\mathcal{A}}(x_0, p_0) d\Gamma \quad (6.89)$$

Ezt az összefüggést alkalmazzuk most a (6.75)-el definiált lineáris entrópia kiszámolására. Mivel  $\hat{\rho}_{\mathcal{A}}$  és  $W_{\mathcal{A}}(x_0, p_0)$  között is a szimmetrikus rendezés teremt kapcsolatot, ezért

élhetünk az  $\hat{F}_{\mathcal{A}} = \hat{\rho}_{\mathcal{A}}$  választással. (P vagy Q függvény használata esetén ezt nem tehetnénk meg!) Így:

$$S_{\mathcal{A},lin} = 1 - Tr_{\mathcal{A}}(\hat{\rho}_{\mathcal{A}}^2) = 1 - \int W_{\mathcal{A}}^2(x_0, p_0) d\Gamma \quad (6.90)$$

Már csak az integrált kell kiszámolnunk:

$$\begin{aligned} \int W_{\mathcal{A}}^2(x_0, p_0) d\Gamma &= \frac{\mathcal{N}^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{x_0^2}{\Delta x_0^2}\right\} dx_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{p_0^2}{\Delta p_0^2}\right\} dp_0 \\ &= \frac{1}{2\pi \cdot \Delta x_0^2 \Delta p_0^2} \sqrt{\pi \Delta x_0^2} \sqrt{\pi \Delta p_0^2} = \frac{1}{2 \cdot \Delta x_0 \Delta p_0} = \frac{1}{\chi}, \end{aligned} \quad (6.91)$$

tehát  $S_{\mathcal{A},lin} = 1 - 1/\chi$ , ahogy azt vártuk. Hasonló módszerrel számolhatjuk ki az összefonódási entrópiát is:

$$S_{\mathcal{A}} = -Tr_{\mathcal{A}}(\hat{\rho}_{\mathcal{A}} \cdot \ln \hat{\rho}_{\mathcal{A}}) = - \int W_{\mathcal{A}}(x_0, p_0) \cdot \ln W_{\mathcal{A}}(x_0, p_0) d\Gamma \quad (6.92)$$

Az integrál elvégzését az érdeklődő olvasóra bízuk.

## 7. Összefoglalás

A jelen dolgozatban egy optikai rezonátorba helyezett, lézerrel pumpált Bose-Einstein kondenzátum kvantum fázisátalakulását vizsgáltuk, ami a pumpalézer intenzitásának változtatása közben megy végbe. Ez egy kísérletileg is vizsgálható, kurrens probléma [12]. A szükséges módszerek ismertetése (2, 3) után a modell a 4. fejezetben került definiálásra. Itt megmutattuk, hogy a kondenzátum leírását célszerű a Fourier-módusokkal végezni, mert a kölcsönhatási tagok csak az első- és másodsomszéd módusok között tudják léptetni az atomokat.

Az 5. fejezetben megadtuk a fázisátalakulás két kondenzátum módust használó minimum-modelljét, amiről megmutattuk, hogy elméletileg ekvivalens a kvantumoptikában jól ismert Dicke-moddal. Az új modell viszont kísérletileg is megvalósítható, ami annak köszönhető, hogy áttértünk az atomok belső dinamikájáról a külső térben lezajlóra, így a kritikus pontot sikerült lehozni az optikai tartományból  $kHz$ -es nagyságrendbe. Modellünket átlagtér-közelítésben egzaktul megoldottuk: analitikus formulákat adtunk az átlagterekre és a rendszer sajátfrekvenciáira. Végül megvizsgáltuk a Heisenberg-képbeli dinamikát és a környezet visszahatását a rendszerre: ez az alapállapotból való kifutódést eredményez. Tárgyalásunkban az általunk publikált [15]-ös cikk gondolatmenetét követtük.

A 6. fejezetben kiterjesztettük vizsgálódásainkat a kondenzátum összes módusára. Az átlagterek meghatározására egy kvázi-sajátértékegyenletet vezettünk le, aminek megoldására egyszerű, a fázisátalakulási pont kis környezetének kivételével gyorsan konvergáló iterációs algoritmust adtunk. Ezután részletesen megvizsgáltuk az átlagterek körüli kvantumfluktuációkat: a bilineáris Hamilton-operátort több lépésben elvégzett Bogoljubov transzformációkkal diagonalizáltuk, így megkaptuk a gerjesztési spektrumot megadó kvázirészecskék frekvenciáit. Ezt követően részletesen elemeztük az egyetlen kvázirészecskét sem tartalmazó alapállapot kvantumkorrelációt és levezettük az inkoherens fotonok, valamint a kondenzátumon kívüli atomok számait megadó formulákat. Végül a [23, 24]-es cikkekben kifejtett elmélet felhasználásával mennyiségi jellemzést adtunk az atomok és az elektromágneses mező összefonódására. Összefonódási mértéknek az üreg Neumann-entrópiáját és a lineáris entrópiát használtuk. Segítségükkel megmutattuk, hogyha a teljes rendszer az alapállapotban van, akkor részrendszerei pontosan akkor összefonódtak, ha az egyik részrendszer a rá vonatkozó határozatlansági-relációt nem képes minimalizálni.

Végül a 6. fejezetben megadott formulákat numerikus szimulációkkal ki is értékeltük, amikhez a  $C$  programnyelvet és a LAPACK lineáris algebra csomagot használtuk. A numerikus eredményeket a dolgozatban ábrákon foglaltuk össze.

## 8. Köszönetnyilvánítás

Elsőként témavezetőmnek, Domokos Péternek szeretnék köszönetet mondani, aki az igen érdekes problémakörrel megismertetett és a diszkussziók során tanácsaival, magyarázataival végig segítette munkámat. Köszönettel tartozom továbbá a 2009. évi balatoni Nyári Iskola szervezőinek és előadóinak, akik lehetővé tették, hogy a kvantumoptika szakterületének alapjaival megismerkedjek. Ezentúl köszönetet mondok Dávid Gyulának, akinek a fizika Bsc 3 éve alatt elhangzott előadásai nagyban hozzájárultak a fizikai világképem kialakításához és az alkalmazott számítási módszerek elsajátításához.

Végül szeretnék családomnak, barátaimnak is köszönetet mondani, akik a szellemi támogatás mellett a dolgozat átolvasásával, a helyesírási hibák kijavításával, vagy a témáról való beszélgetéssel is segítettek.

## Hivatkozások

- [1] A. Öttl, S. Ritter, M. Köhl, and T. Esslinger, *Correlations and Counting Statistics of an Atom Laser*, Phys. Rev. Lett. **95**, 090404 (2005).
- [2] S. Slama, G. Krenz, S. Bux, C. Zimmermann, and P. W. Courteille, *Cavity-enhanced superradiant Rayleigh scattering with ultracold and Bose-Einstein condensed atoms*, Phys. Rev. A **75**, 063620 (2007).
- [3] F. Brennecke, T. Donner, S. Ritter, T. Bourdel, M. Köhl, and T. Esslinger, *Cavity QED with a Bose-Einstein condensate*, Nature **450**, 268 (2008).
- [4] F. Brennecke, S. Ritter, T. Donner, and T. Esslinger, *Cavity optomechanics with a Bose-Einstein condensate*, Science **322**, 235 (2008).
- [5] J. Klinner, M. Lindholdt, B. Nagorny, and A. Hemmerich, *Normal Mode Splitting and Mechanical Effects of an Optical Lattice in a Ring Cavity*, Phys. Rev. Lett. **96**, 023002 (2006).
- [6] Y. Colombe, T. Steinmetz, G. Dubois, F. Linke, and J. Reichel, *Strong atom-field coupling for Bose-Einstein condensates in an optical cavity on a chip*, Nature **450**, 272 (2007).
- [7] K. W. Murch and K. L. Moore, and S. Gupta, and D. M. Stamper-Kurn, *Observation of quantum-measurement backaction with an ultracold atomic gas*, Nature Physics **4**, 561 (2008).
- [8] P. Domokos and H. Ritsch, *Collective Cooling and Self-Organization of Atoms in a Cavity*, Phys. Rev. Lett. **89**, 253003 (2002).
- [9] J. K. Asbóth, P. Domokos, H. Ritsch, and A. Vukics, *Self-organization of atoms in a cavity field: Threshold, bistability, and scaling laws*, Phys. Rev. A **72**, 053417 (2005).
- [10] Adam T. Black, Hilton W. Chan, and Vladan Vuletić, *Observation of Collective Friction Forces due to Spatial Self-Organization of Atoms: From Rayleigh to Bragg Scattering*, Phys. Rev. Lett. **91**, 203001 (2003).
- [11] D. Nagy, G. Szirmai, and P. Domokos, *Self-organization of a Bose-Einstein condensate in an optical cavity*, Eur. Phys. J. D **48**, 127-137 (2008).
- [12] Kristian Baumann, Christine Guerlin, Ferdinand Brennecke, and Tilman Esslinger, *Dicke quantum phase transition with a superfluid gas in an optical cavity*, Nature **464**, 1301-1306 (2010).
- [13] D. Nagy, P. Domokos, A. Vukics and H. Ritsch, *Nonlinear quantum dynamics of two BEC modes dispersively coupled by an optical cavity*, Eur. Phys. J. D **55**, 659-668 (2009).

- [14] G. Szirmai, D. Nagy, and P. Domokos, *Quantum noise of a Bose-Einstein condensate in an optical cavity, correlations and entanglement*, Phys. Rev. A **81**, 043639 (2010).
- [15] D. Nagy, G. Kónya, G. Szirmai, and P. Domokos, *Dicke-Model Phase Transition in the Quantum Motion of a Bose-Einstein Condensate in an Optical Cavity*, Phys. Rev. Lett. **104**, 130401 (2010).
- [16] C. Emary and T. Brandes, *Chaos and quantum phase transition in the Dicke model*, Phys. Rev. E **67**, 066203 (2003).
- [17] Szépfalussy Péter és Szirmai Gergely, *Véges-hőmérsékleti soktestprobléma*, kézirat (2006), <http://optics.szfki.kfki.hu/szirmai/>.
- [18] Geszti Tamás, *Kvantummechanika*, Typotex, 2007.
- [19] D. F. Walls and Gerard J. Milburn, *Quantum Optics*, 2nd Edition, Springer (2008).
- [20] Mark Hillery, *An Introduction to the Quantum Theory of Nonlinear Optics*, Acta Physica Slovaca **59**, 1-80 (2009).
- [21] Samuel L. Braunstein and Peter van Loock, *Quantum information with continuous variables*, Reviews of Modern Physics **77** (2005).
- [22] M. Hillery, R. F. O'Connell, M. Scully, and E. Wigner, *Distribution Functions in Physics: Fundamentals*, Phys. Rep. **106**, 121-167 (1984).
- [23] Julien Vidal, Sébastien Dusuel and Thomas Barthel, *Entanglement entropy in collective models*, J. Stat. Mech. P01015 (2007).
- [24] T. Barthel, M.-C. Chung, and U. Schollwöck, *Entanglement scaling in critical two-dimensional fermionic and bosonic systems*, Phys. Rev. A **74**, 022329 (2006).
- [25] J. Schwinger, *Quantum theory of angular momentum*, Academic Press, New York (1965).
- [26] R. H. Dicke, *Coherence in Spontaneous Radiation Processes*, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).
- [27] T. Holstein and H. Primakoff, *Field Dependence of the Intrinsic Domain Magnetization of a Ferromagnet*, Phys. Rev. **58** 1098 - 1113 (1940).
- [28] N. Lambert, C. Emary, and T. Brandes, *Entanglement and the Phase Transition in Single-Mode Superradiance*, Phys. Rev. Lett. **92**, 073602 (2004).
- [29] V. Buzek, M. Orszag, and M. Rosko, *Instability and Entanglement of the Ground State of the Dicke Model*, Phys. Rev. Lett. **94**, 163601 (2005).
- [30] V.V. Praszolov, *Lineáris algebra*, Typotex (2005).
- [31] Brian F. Farrell and Petros J. Ioannou, *Generalized Stability Theory. Part I: Autonomous Operators*, Journal of the Atmospheric Sciences **53** 2025-2040 (1996).