Eötvös Loránd Tudományegyetem

Felhőben mozgó esőcseppek vizsgálata snapshot attraktor segítségével

Témavezető:
Drótos Gábor
tudományos segédmunkatárs,
MTA–ELTE Elméleti Fizikai Kutatócsoport

Készítette:
Bozsó István
Fizika BSc., 3. évfolyam

Lezárás dátuma: 2015.05.28

Kivonat

Célunk felhőbeli esőcseppek mozgásának és az ezzel kapcsolatos alapjelenségeknek a tanulmányozása, numerikus szimuláció segítségével. Az esőcseppek mozgásegyenletében a nehézségi és a közegellenállási erő jelenik meg. A közegellenállási erőt az esőcseppnek a levegőhöz viszonyított sebessége határozza meg, így az esőcsepp mozgásában központi szerepet tölt be a levegő áramlása. A megfigyelések szerint a vízcseppek inhomogén eloszlást követnek a felhőben, ami gyakran szálas, sőt, fraktálszerű. A hagyományos modellek többsége ezt a szerkezetet a cseppek kaotikus mozgásához köti, amit időben periodikus levegőáramlásban mutat ki. Egy valódi felhőben azonban a levegőáramlás időben nem periodikus. Ilyen esetben a hagyományos káoszelmélet fogalmai nem alkalmazhatóak. Ebben a dolgozatban az aperiodikus levegőáramlásban megfigyelhető viselkedést egy viszonylag új fogalom, a snapshot attraktor segítségével kezeljük. Ez lényegében a hagyományos kaotikus attraktor általánosítása tetszőleges időfüggésű mozgásegyenletekre, és önmaga is időfüggő. A vizsgálataink során egy olyan modellt tekintettünk, amelyben a levegőáramlás térben periodikus, míg az időbeli viselkedését a klasszikus Lorenz-attraktorból kinyert aperiodikus jel határozza meg. Ha a térbeli periodikusságot periodikus határfeltétellel vettük figyelembe, akkor a következőt találtuk: a kezdetben egyenletes eloszlású részecskesokaság egy adott konvergenciaidő eltelte után ráhúzódik a fentebb említett attraktorra, és jellegzetes szálas fraktálszerkezetet mutat, ami viszont időben változik. A periodikus határfeltételt elhagyva a sokaság tömegközéppontja függőleges irányban közelítőleg egyenletesen süllyed, azonban a süllyedés sebessége jelentősen eltér a nyugvó közegbeli süllyedés sebességétől. A sokaság szétterjedését a részecskék függőleges koordinátáinak a statisztikai szórásán keresztül vizsgáltuk, és arra a következtetésre jutottunk, hogy a sokaság függőleges irányú kiterjedése időben diffúziós jelleggel nő. A diffúziós növekedés azonban erős fluktuációkat mutat. Hasonló növekedés tapasztalható a vízszintes koordináta tekintetében is, azonban a hosszú távú diffúziós együttható értéke vízszintes irányban sokkal kisebb mint függőleges irányba. A dolgozatban az aperiodikus gerjesztés különböző realizációit is összehasonlítjuk, és kimutatjuk, hogy ezek hasonló jellegű, de részleteiben nagyon eltérő viselkedésre vezetnek.

1. Bevezetés

1.1. A szimuláció célja

A felhőben lejátszódó folyamatok [1] mikéntje még napjainkban sem teljesen tisztázott. Pedig a felhőbeli viszonyok felderítése különösen érdekes lehet, hiszen nemcsak meteorológiai modellek állíthatóak fel az újabb eredmények alapján, hanem a Föld klímaváltozásának mélyebb megértésének kapcsán is felhasználhatóak [2]. A jelenleg rendelkezésre álló eszközök, melyek a felhőbeli folyamatok behatóbb megismerését szolgálják: modellek felállítása és a modelleken alapuló numerikus szimulációk elvégzése, kísérletek készítése, felhőben uralkodó viszonyokról adatok gyűjtése és ezek feldolgozása. Ezen módszerek közül mi a modellezést választottuk, felhőbeli esőcseppek pályájának behatóbb tanulmányozására.

Sok meteorológiai számolás alapul azon a feltevésen, hogy a felhőbeli részecskék, esőcseppek, a nyugvó vagy állandó sebességgel áramló közegben érvényes süllyedési sebességgel esnek a Föld felszíne felé. Korábbi vizsgálatok során [3] már belátták, hogy ez a feltevés időben periodikus áramlástérben nem igaz, a részecskék átlagos esési sebessége eltér a nyugvó közegben megfigyelhetőtől, és a pontos értéket csak a teljes dinamika követésével lehet meghatározni. Most még egy lépést kívánunk tenni a realisztikus felhőmodell felé, azzal, hogy megvizsgáljuk, miképpen mozognak az esőcseppek időben aperiodikus sebességtérben.

Tekintve, hogy egyetlen esőcsepp mozgása rendezetlen, és sem numerikusan, sem a valóságban nem követhető pontosan, továbbá tipikusan sok esőcsepp van jelen a felhőben: az egyetlen lehetőségünk, hogy sok esőcsepp együttesét, és ezen együttes mozgásának a statisztikáját vizsgáljuk. Ez azt jelenti, hogy a káoszelmélet [4, 5] eszközeit fogjuk arra használni, hogy az esőcseppek mozgását jellemezzük. Az esőcseppek mozgásegyenlete önmagában egyszerű, de a közegellenállási erőn keresztül függ a közeg sebességterétől. Ez utóbbi gerjesztésként jelenik meg. A mozgás csak akkor lesz bonyolult, kaotikus, ha maga a sebességtér is változatos. Az ilyen típusú problémákat kaotikus sodródásnak [5] nevezzük. A kaotikus sodródás azon kevés kaotikus jelenségkör egyike, ami valóban megfigyelhető tiszta formában a természetben. Ha a felhőket tekintjük, bennük a magas páratartalmú levegő a mérések [6] szerint valóban káoszra utaló mintázatokban rendeződik el. Ennek megfelelően valóban remélhetjük, hogy az eredményeinkkel le tudunk írni legalább bizonyos felhőbeli alapjelenségeket.

Először a szimuláció alapját szolgáltató modellről lesz szó. Ezt követi egy rövid összefoglaló a disszipatív dinamikai rendszerekben megjelenő káoszról és a *snapshot* attraktorról. Ezután bemutatjuk a szimulációs eredményeket: periodikus határfeltétel mellett végzett szimuláció esetén, itt röviden illusztráljuk, hogy különböző kezdeti feltételekkel indított részecskék ugyanahhoz az attraktorhoz konvergálnak, és ezen feltétel elhagyásával, utána következnek a részecskék statisztikái. Megvizsgáljuk az attraktor fraktáldimenziójának az időfejlődését is. Végül ellenőrizzük, hogy mi történik a sebességtér másik realizációja mellett. A dolgozatot egy rövid összefoglalóval és kitekintéssel zárjuk.

1.2. A modell

Feltételezzük, hogy az esőcseppek kisméretű, egymással nem kölcsönható, gömb alakú részecskék. Az esőcseppek mozgását két erő határozza meg: a közegellenállási és a nehézségi. A közegellenállási erőt az egyszerűség kedvéért a Stokes-törvénnyel írjuk le. Mivel feltételeztük, hogy a cseppek gömb alakúak, a cseppek mozgásegyenlete (a felhajtóerőt elhanyagoltuk, ennek okáról később nyilatkozunk):

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -6\pi\eta a(\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) + m\mathbf{g}, \tag{1}$$

ahol m egy esőcsepp tömege, η a viszkozitás, a az esőcseppek sugara, $\mathbf{g}$ a nehézségi gyorsulás vektor és $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ a közeg áramlási sebessége a csepp $\mathbf{r}$ helyén kiértékelve. Egy esőcsepp tömege a következőképpen írható fel: $m = \rho_r(4\pi a^3)/3$, ahol ρ_r a csepp sűrűsége. Az egyenlet mindkét oldalát elosztva m-mel, és a ν kinematikai viszkozitás segítségével felírva η-t ($\nu = \eta/\rho_f$, ρ_f a közeg sűrűsége) a következő összefüggésre juthatunk:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{9}{2}\frac{\nu}{a^2}\frac{\rho_f}{\rho_r}(\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) + \mathbf{g}. \tag{2}$$

Mint korábban említettük a felhajtóerő elhanyagolható. Ugyanis, ha megvizsgáljuk a csepp-re ható erők függőleges komponensét:

$$F_y = F_{\text{közegellenállási},y} - \rho_r g V_r + \rho_f g V_r, \tag{3}$$

és kiemeljük ρ_r-t,azt kapjuk, hogy

$$F_y = F_{\text{közegellenállási},y} - \rho_r \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_r}\right) g V_r. \tag{4}$$

A sűrűségarányokat tartalmazó $\frac{\rho_f}{\rho_r}$ tag elhanyagolható az 1-es mellet, mivel

$$\frac{\rho_f}{\rho_r} = \frac{\rho_{\text{levegő}}}{\rho_{\text{víz}}} = \frac{1.2922 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \approx \frac{1}{1000}, \tag{5}$$

így a (4)-ban elvégezve az elhanyagolást, megkapjuk a (1) egyenlet y komponensét.

Ezután bevezethetőek $\mathbf{r}' = \mathbf{r}/L$, $\mathbf{u}' = \mathbf{u}/U$ és $t' = (U/L)t$ dimenziótlan változók, ahol L a rendszer karakterisztikus hossza, U a rendszer karakterisztikus sebessége és $\mathbf{n}$ függőlegesen felfelé mutató egységvektor. A nehézségi gyorsulás felírható a következő alakban: $\mathbf{g} = -g \cdot \mathbf{n}$. Osszuk el az egyenletet U^2/L-lel:

$$\ddot{\mathbf{r}}' = -\frac{9}{2}\frac{\nu L}{a^2 U}\frac{\rho_f}{\rho_r}(\dot{\mathbf{r}}' - \mathbf{u}') - \frac{Lg}{U^2}\mathbf{n}. \tag{6}$$

Az A tehetetlenségi paraméter,

$$A = \frac{9\nu L}{2a^2 U}\frac{\rho_f}{\rho_r}, \tag{7}$$

segítségével kapható az egyenlet végső alakja:

$$\ddot{\mathbf{r}}' = -A(\dot{\mathbf{r}}' - \mathbf{u}' + W\mathbf{n}), \tag{8}$$

ahol

$$AW = \frac{Lg}{U^2}. \tag{9}$$

A W paraméter jelentése: nyugvó közeg esetén a részecskék egyenletes W sebességgel esné-nek lefelé hosszú idő után, amikor a közegellenállás már egyensúlyt tart a nehézségi erővel. W neve ezért süllyedési vagy esési határsebesség. Ezután már a mozgásegyenlet dimenziótlanított alakjával dolgozhatunk tovább, elhagyva a vesszős jelölést.

A következő táblázatban láthatóak a (8)-ben szereplő paraméterek értékei:

Paraméter	Értéke	Paraméter	Értéke
ρ_f/ρ_r	1/1000	g	10 m/s^2
L	100 m	ν	10^{-5} m^2/s
U	1 m/s	A	5
a	1 mm	W	0.8

1. táblázat. A részecskék mozgását leíró modell paraméterei

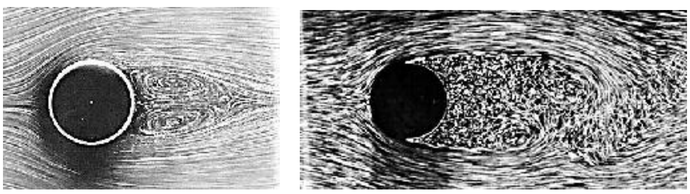
Bár a valódi felhőben $U = 1$ m/s-nál nagyobb sebességek fordulnak elő, mi mégis ezt a sebességparaméter értéket választottuk, mivel ez az érték jellemzi a sebességtérben létrejövő fluktuációkat, ami vizsgálatunk tárgya. Továbbá, a W értékére se a táblázatban szereplő érték adódna, ha a megfelelő számokat írnánk az értékét meghatározó egyenletbe, hanem ≈ 200 m/s (ez az érték kapható ha (9) egyenletet megszorozzuk U-val és elosztjuk A-val). Ez az érték azonban irreálisan nagy, ráadásul ilyen magas esési sebességértéknél a közegellenállást sem a Stokes-törvény írja le. Ezért választottuk a valósághoz közelebb álló 0.8 értéket, továbbá azért, hogy az irodalommal [7] összhangban legyünk. Az A tehetetlenségi paraméterre a becsléseinkkel 4.5 adódik. Ez azonban csak hozzávetőleges becslés, az irodalommal való összhang kedvéért az ehhez közel álló $A = 5$ értéket választottuk.

Két dimenziós vizsgálat esetén két változóval jellemezhető a esőcseppek (a továbbiakban: részecskék) helyzete: egy vízszintes (x) és egy függőleges (y) koordinátával.

1.3. A Reynolds-szám vizsgálata

Kiszámítottuk a vízcseppekre jellemző Reynolds-számot is: $\mathrm{Re} = (aU)/\nu = 100$. Ez az érték még nem jelent teljesen kifejlett turbulens áramlást, viszont nem is lamináris, tehát nem használható a Stokes-törvény a közegellenállási erő kiszámítására. Mivel azonban az irodalomban nagyrészt a Stokes-törvényt használják, ezért az összhang kedvéért, mi is így tettünk, és alapjelenségeket a Stokes közelítésben is tudunk vizsgálni.

Ebben a Reynolds-szám tartományban, akár turbulens, akár lamináris az áramlás, kialakul egy árnyékzóna, melyet az alábbi ábrák demonstrálnak:



(a) Re = 26 (b) Re = 2000

1. ábra. Henger körül kialakult áramlási kép, két különböző Reynolds-szám esetén.
Forrás: `http://arpad.elte.hu/~bene/hidro/eloadas/11_eloadas/11_eloadas.html`

Ám fontos hangsúlyozni, hogy a mi esetünkben a jelenség nem játszott szerepet, mivel Stokes-féle közegellenállást használunk.

1.4. A gerjesztő sebességtér

A (8) egyenletben az $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ tag még nincs definiálva. A szimuláció elvégzéséhez egy olyan sebességteret kerestünk, mely rendelkezik a felhőben uralkodó sebességtér keverő és nyíró tulajdonságaival. A választásunk egy korábban már vizsgált [7, 8] sebességtéren alapul. Ez az eredeti sebességtér alább látható dimenziótlan alakban:

$$u_x(\mathbf{r}, t) = 0.5\{1 + \tanh[\gamma \sin(2\pi t)]\} \sin(2\pi y), \tag{10}$$

$$u_y(\mathbf{r}, t) = 0.5\{1 - \tanh[\gamma \sin(2\pi t)]\} \sin(2\pi x). \tag{11}$$

A tanh tag a sebességtér amplitúdóját változtatja, úgy, hogy amikor $\tanh[\gamma \sin(2\pi t)] = 1$, akkor $u_x = \sin(2\pi y)$ és $u_y = 0$, és fordítva, $\tanh[\gamma \sin(2\pi t)] = -1$ esetben $u_y = \sin(2\pi x)$ és $u_x = 0$. Mivel $\gamma = 20/\pi$ nagy, a tanh tag lényegében a két említett érték között váltakozik, időben egységnyi periódussal. Összegezve: u_x és u_y komponens amplitúdója 0 és 1 között váltakozik időegységnyi periódussal, és ellentétes fázisban van. A térbeli függést tekintve: u_x vízszintes sebességtér-komponens értéke a függőleges koordináta függvényében változik 1 cellányi periódussal, és fordítva, u_y függőleges sebességtér-komponens értéke a vízszintes koordináta függvényében változik 1 cellányi periódussal. Ha egy cellát tekintünk, azon belül bármelyik sebességkomponens értéke szinuszos, a szinuszfüggvény a cella középvonalánál vált előjelet.

Amint tehát látható, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ az időnek periodikus függvénye, és függ a részecske $\mathbf{r}$ helyzetétől is. Viszont, egy valóságos felhőben az áramlási sebesség időben nem periodikus. Ennek a problémának a kiküszöbölésére, az aperiodikus sebességtér megvalósítására, numerikusan integráltuk az 1963-as Lorenz-modellt [9], melynek, szintén dimenziótlan, egyenletei alább láthatóak. A Lorenz-modell $X(t)$ változójának értékeit használtuk az aperiodikus gerjesztés megvalósításához:

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= \sigma(Y - X), \\
\dot{Y} &= X(\rho - Z) - Y, \\
\dot{Z} &= XY - \beta Z,
\end{aligned}$$

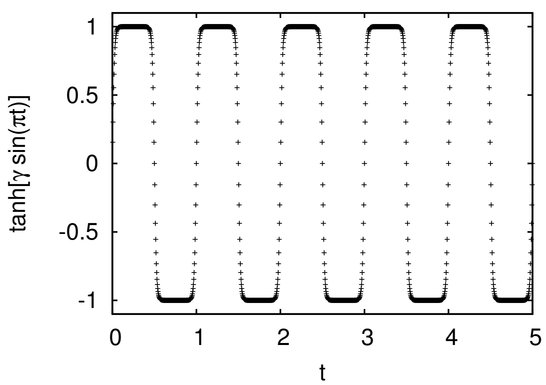
ahol $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ és $\rho = 28$.

A vizsgálataink során a következő kezdeti értékeket használtuk:

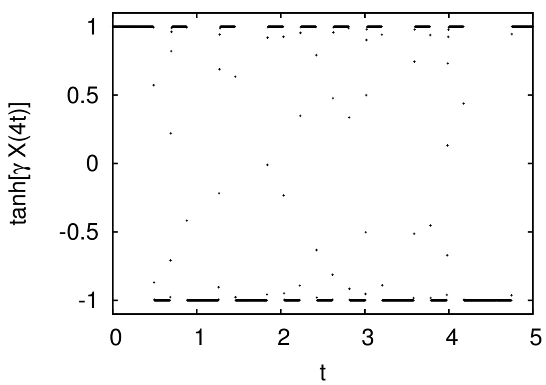
Változó	Kezdeti értéke
X	0.100001
Y	0
Z	0

2. táblázat. A Lorenz-modell változóinak kezdeti értékei. Ezt a realizációt hívjuk a továbbiakban modellrealizációnak.

Mielőtt a Lorenz-modellből számított adatokat felhasználtuk volna, hagytuk, hogy a Lorenz-modellbeli X, Y és Z értékek megérkezzenek a Lorenz-attraktorra [9], azaz a kezdeti értékeket a $t = -100$ időpillanatban írtuk elő és a cseppek mozgását $t = 0$ pillanattól vizsgáltuk. A sebességtér (10) és (11) tagjában a $\sin(2\pi t)$ tényezőt a Lorenz-modellből vett $X(4t)$ értékekre cseréltük, ezzel biztosítván az aperiodikus sebességteret, azaz a rendszer aperiodikus gerjesztését. Az argumentumban szereplő 4-es szorzófaktorra az időskálák összehangolása miatt volt szükség. A következő két ábra az időfüggő tanh tag értékeit mutatja be az idő függvényében:



(a) Az időben periodikus sebességtér időfüggése.



(b) Az időben aperiodikus sebességtér időfüggése.

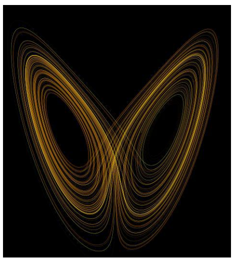
Az idő nagy részében a $\sin(2\pi t)$ és az $X(4t)$ függvények „kivezérlik” a tanh függvényt, így az $+1$ vagy -1 értéket vesz fel, azaz általában az egyik sebességtér komponens értéke nulla. A két érték közötti váltások a periodikus esetben pontosan 0.5 időegységenként történnek, az aperiodikus esetben viszont szabálytalan időközönként (éppen ezért lesz aperiodikus a sebességtér). A numerikus integrálás részleteiről a 2. fejezet bevezetőjében, a 3. táblázatban olvashatunk.

1.5. Káosz disszipatív dinamikai rendszerekben

A kaotikus dinamikai rendszerek [4, 5] igen eltérőek lehetnek, ám felfedezhetőek közös tulajdonságok bennük. A dinamikai rendszereket konzervatív és disszipatív kategóriába sorolhatjuk. Mindkét kategóriában létrejöhet tranziens és permanens káosz. Tranziens káoszról beszélünk, amikor a kaotikus viselkedés csak rövid ideig figyelhető meg, permanens káoszról pedig akkor, amikor a rendszer időbeli viselkedésére végig jellemző a kaotikus viselkedés. Konzervatív rendszerben a fázistérfogat időben állandó. Ebben az esetben a káosz a gerjesztés (azaz a mozgásegyenlet explicit időfüggése) nélkül is fellép. Témánkban azonban a releváns eset a disszipatív, gerjesztett rendszerekben fellépő káosz. Disszipatív rendszerben a fázistérfogat exponenciálisan csökken.

Időben fejlesztve ezeket a rendszereket azt tapasztaljuk, hogy az állapotukat leíró változók (helykoordináta, sebességkomponens) időben szinte véletlenszerűen változnak, különböző időpillanatokban felvett értékeikben semmiféle rendezettség nem tapasztalható. A helykoordináták és a sebességkomponensek által kifeszített teret fázistérnek nevezzük, a rendszer egy konkrét időfejlődését pedig fázistérbeli trajektóriának. Ha egy kaotikus rendszerben megvizsgáljuk egy fázistérbeli trajektória időfejlődését, akkor, a rendezetlenség ellenére, elegendő időt várva a trajektória egy „különös” geometriai alakzathoz, egy fraktálhoz, fog tartani. Különböző kezdeti feltételekkel indítva két fázistérbeli trajektóriát és vizsgálva azt, hogyan változik a két trajektória távolsága az idővel, azt a következtetés vonhatjuk le, hogy a távolságuk az idővel exponenciálisan növekszik. Ezen felfedezés alapján fogalmazható meg a kaotikus viselkedés másik tulajdonsága: a kaotikus rendszerek érzékenyek a kezdeti feltételekre. Ha a fázistérben trajektóriák sokaságát indítjuk el, akkor ezek egy konvergenciaidő eltelte után „ráhúzódnak” a korábban említett fraktálra. Ekkor azt mondhatjuk, hogy a trajektóriák sokasága rajta van a kaotikus attraktoron. A kaotikus attraktor tehát egy olyan vonzó objektum, mely bevonzza a fázistérbeli trajektóriák sokaságát és meghatározott fraktálszerkezet tartozik hozzá. Az attraktor tulajdonságai a trajektóriasokaság statisztikájának segítségével vizsgálhatóak.

A fentieket illusztrálandó, bemutatunk a Lorenz-modell [9] egy adott realizációja esetén kialakuló attraktort alább:



2. ábra. A Lorenz-modell kaotikus attraktora.
Forrás: `http://mth21202f08.files.wordpress.com/2008/09/lorenz_attractor.jpg?w=490`

A kaotikus viselkedés hátterében periodikus trajektóriák stabil és instabil sokaságai állnak. A periodikus trajektóriák a fixpontok általánosításai, az alapjelenséget a fixpontok segítségével ismertetjük. A fixpont olyan pont a fázistérben, amit egy trajektória soha nem hagy el. A fixpontoknak létezhet taszító és vonzó irányuk, az előbbi jelöli ki a fixpont instabil, az utóbbi a stabil sokaságát. Tegyük fel, hogy mindkét fajta irány létezik. Ekkor egy fázistérbeli trajektória megközelítheti a fixpontot, de ha nem éppen a vonzó irányában, azaz a stabil sokaságán halad, akkor nem jut el a fixpontba, hanem a taszító iránya, azaz az instabil sokasága mentén elhagyja azt. Mivel a stabil sokaság nullmértékű a fázistérben, majdnem minden trajektória így viselkedik, vagyis az ilyen fixpont instabil. Belátható, hogy az előbb említett tipikus görbe, amin a fixpont megközelítése és elhagyása történik, egy hiperbola, ha kellően közel vizsgáljuk a fixponthoz. Ezért szokás hiperbolikus fixpontról beszélni. Természetesen léteznek másfajta fixpontok is, de a kaotikus dinamikai rendszerekben a hiperbolikus fixpontok játsszák a legnagyobb szerepet. Ugyanis a kaotikus rendszerekben tulajdonképpen az történik, hogy a tipikus fázistérbeli trajektóriák a hiperbolák mentén megközelítik és elhagyják a hiperbolikus fixpontokat, illetve az ezekhez hasonló, szintén hiperbolikus tulajdonságú periodikus trajektóriákat. A kaotikus mozgás fennmaradásához tehát az is szükséges, hogy a fázistérben végtelen sok hiperbolikus tulajdonságú periodikus trajektória legyen. A mozgás kiszámíthatatlan jellege abból adódik, hogy nem lehet előre megmondani, hogy milyen sorrendben fogják a trajektóriák „meglátogatni" a különböző periodikus trajektóriákat.

Összefoglalva a kaotikus rendszerek közös tulajdonságai:

- hosszú távon aperiodikus, időben nem előrejelezhető a mozgásuk,
- érzékenyek a kezdeti feltételekre,
- fázisterükben fraktálmintázatok jelennek meg.

1.6. A snapshot attraktor

Belátható, hogy aperiodikusan gerjesztett kaotikus rendszereknél is létezik a fázistér trajektóriáit magára húzó attraktor. Ezt az attraktort nevezzük *snapshot* attraktornak [10]. Ez egy nem túl régi és viszonylag kevéssé elterjedt fogalom a káoszelméletben.

A *snapshot* attraktor hasonló szerepet tölt be, mint a „klasszikus" attraktor: egy olyan objektum, mely a fázistérbeli trajektóriákat, az idő múlásával, magához „vonzza". A pontos definíció azonban nem alapulhat azon, hogy a trajektóriák hova konvergálnak a jövőben aszimptotikusan, hiszen maga a *snapshot* attraktor időben aperiodikus változik, és így semmilyen értelemben sem konvergál sehova. A pontos definíció ehelyett az aszimptotikusan régi múltban indított trajektóriákon alapul: a *snapshot* attraktor egy adott t időpillanatban az az objektum, amire ezek a trajektóriák érkeznek. Ez a definíció *tetszőleges* t időpontra értelmes, és így megengedi magának a *snapshot* attraktornak az időbeli fejlődését.

A numerikus szimulációk során nem szükséges a végtelen régi múltban indítani a trajektóriákat: létezik egy jól meghatározott konvergenciaidő, aminek az elteltével a trajektóriákat már a *snapshot* attraktoron lévőknek tekinthetjük. Ez egyúttal lehetőséget ad a *snapshot* attraktor numerikus kirajzolására is: ha trajektóriák sokaságát indítjuk el, akkor a konvergenciaidő eltelte után ennek a sokaságnak a fázistérbeli elhelyezkedése nem rajzolhat ki semmilyen más halmazt, mint a *snapshot* attraktort. Sőt, ha innentől követjük ennek a trajektóriasokaságnak az időfejlődését, akkor, minthogy ez a sokaság folyamatosan a *snapshot* attraktoron kell maradjon, magának a *snapshot* attraktornak az időfejlődését látjuk.

A saját numerikus szimulációink során pontosan a fentiek szerint járunk el: kimutatjuk, hogy a kezdeti trajektóriasokaság egy véges idő alatt ráhúzódik az attraktorra, és innentől kezdve azt mondjuk, hogy a trajektóriasokaság segítségével magát az attraktort követjük.

2. Szimulációs eredmények bemutatása és interpretációja

Először a periodikus határfeltétellel végzett szimuláció eredményei kerülnek bemutatásra. Ezen eredmények az attraktor kvalitatív elemzésére alkalmasak. Ezután megmutatjuk, hogy két, különböző kezdeti feltételekkel indított, részecskesokaság trajektóriái ugyanarra az attraktorra húzódnak rá a konvergenciaidő eltelte után.

Majd a periodikus határfeltétel nélkül végzett szimulációs eredmények következnek. Segítségükkel a részecskék (a modell-esőcseppek) közegbeli mozgásáról (eséséről, térbeli szétterjedéséről) nyerhetőek ki adatok, statisztikák. Megvizsgáljuk a gerjesztő függvény konkrét realizációjának a szerepét is: az eredményeket összevetjük egy másik realizáció eredményeivel.

A részecskék kezdetben térben homogén módon, rácson eloszlatva helyezkedtek el a fázistérben egy cellán belül, sebességük 0 volt. Az alábbi táblázatban láthatóak a numerikus integrálás paraméterei.

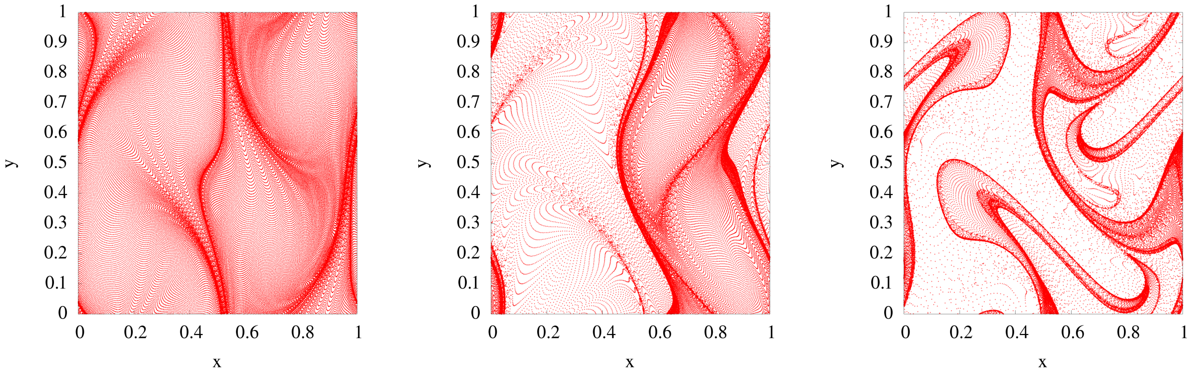
Paraméter	Értéke
Integrálási séma	Negyedrendű Runge–Kutta [11], állandó lépésközzel
Lépésköz	$3.90625 \cdot 10^{-3}$
Részecskék száma	99856

3. táblázat. A numerikus integrálás paraméterei.

2.1. Periodikus határfeltétellel végzett szimulációk

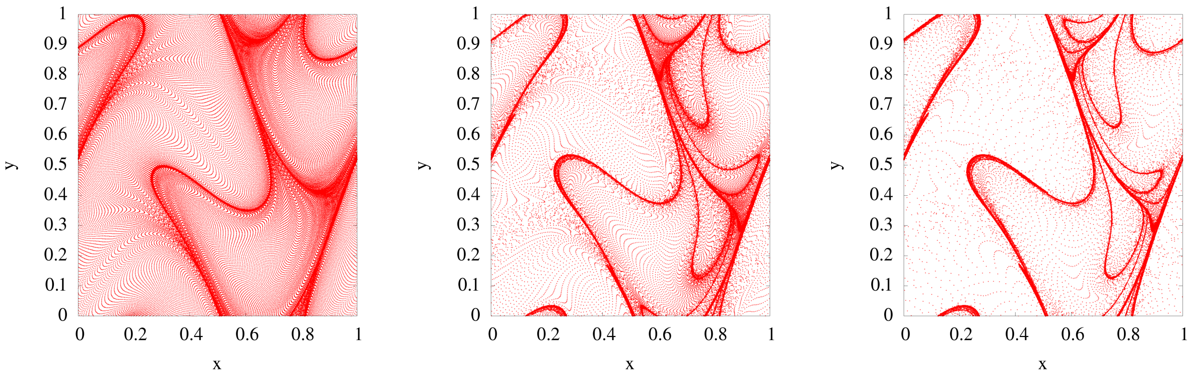
2.1.1. A fraktálszerkezetet kialakulása

Először a fraktálszerkezetet kialakulását kívánjuk bemutatni az alábbi ábrákon keresztül. Összehasonlítás céljából hozzávesszük ehhez a periodikus gerjesztéssel [7] készült szimulációk ábráit is:



(a) t = 2 (b) t = 2 (c) t = 6

3. ábra. A homogén eloszlásból kialakuló fraktálszerkezet kezdeti időfejlődése az (x, y) síkban. Aperiodikus gerjesztés esetén.

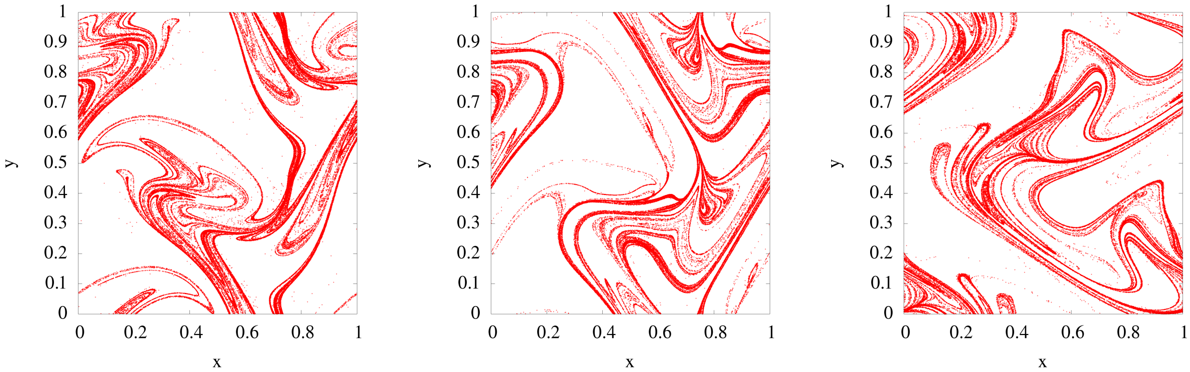


(a) t = 2 (b) t = 4 (c) t = 6

4. ábra. A homogén eloszlásból kialakuló fraktálszerkezet kezdeti időfejlődése az (x, y) síkban. Periodikus gerjesztés esetén.

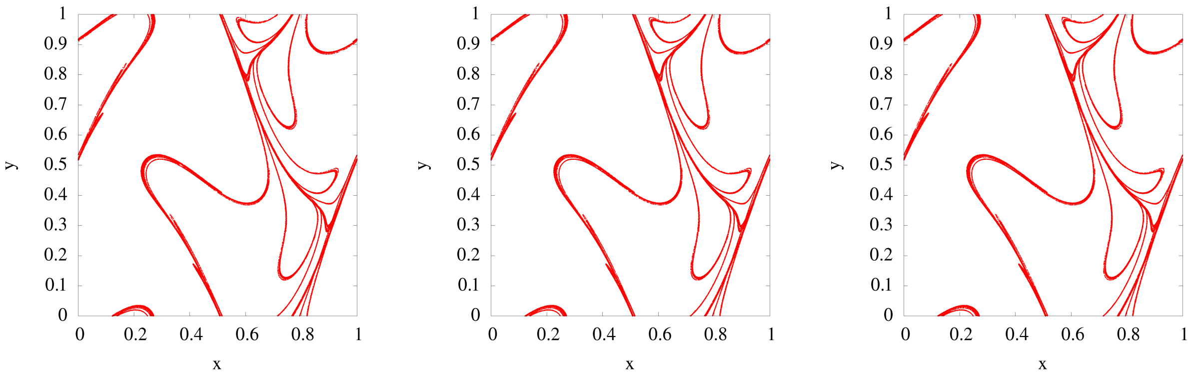
Mind aperiodikus, mind periodikus gerjesztés mellett világosan megfigyelhető, hogy a kezdetben homogén részecskeeloszlás *összehúzódik*, vagyis a rendszer valóban disszipatív módon viselkedik. Az összehúzódás egy bonyolult, szálas szerkezet felé történik. A periodikus gerjesztés esetében, azaz a 4. ábrán a kiválasztott időpillanatok a gerjesztés periódusidejének többszörösei, így a periodikus gerjesztő függvény mindig ugyanabban a fázisban van. Ennek a következménye, hogy a szálas szerkezet ezekben az időpillanatokban megegyezik. Ugyanez nem

mondható el az aperiodikus gerjesztés esetéről (3. ábra).
A következő ábrasorozat a hosszú idő elteltével kialakult szerkezetet mutatja be, amelynek a jellege az idő múlásával már nem változik:



(a) t = 82 (b) t = 86 (c) t = 90

5. ábra. A részecskék (x, y) síkbeli helyzete a *snapshot* attraktoron különböző egész értékű időpillanatokban. Aperiodikus gerjesztés esetén.



(a) t = 82 (b) t = 86 (c) t = 90

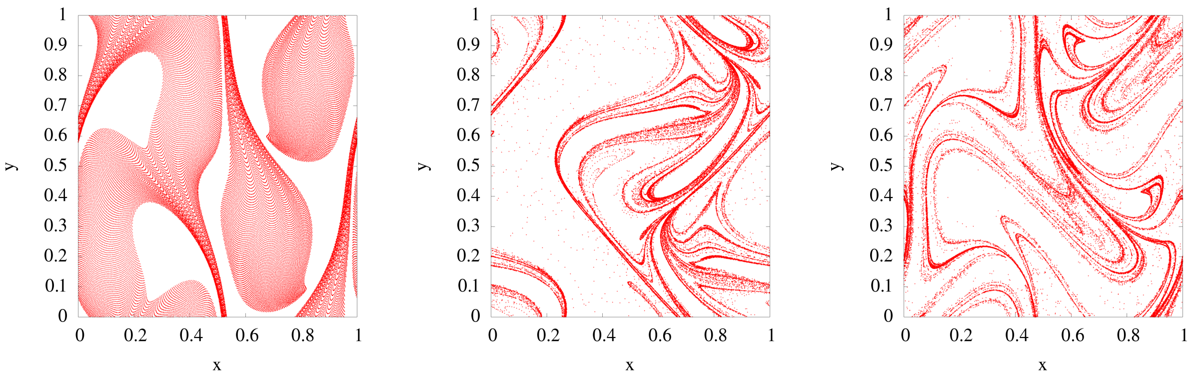
6. ábra. A részecskék (x, y) síkbeli helyzete a kaotikus attraktorokon különböző egész értékű időpillanatokban. Periodikus gerjesztés esetén.

A megfigyelt, szálas szerkezetek fraktálnak mutatkoznak, ami arra utal, hogy kaotikus attraktorokról [4, 5] (vagy ehhez hasonló objektumokról) lehet szó. A 5. ábrasorozaton látható, hogy aperiodikus gerjesztés mellett valóban minden időpillanatban más fraktálszerkezettel van dolgunk, míg a 6. ábrasorozaton, tehát periodikus gerjesztés mellett [7], a fraktálszerkezet ugyanaz marad minden ábrán.

A CD-n mellékelt **parhatfel.mp4** videón látható a részecskék térbeli eloszlása az idő függvényében és a fraktálszerkezet időbeli változása.

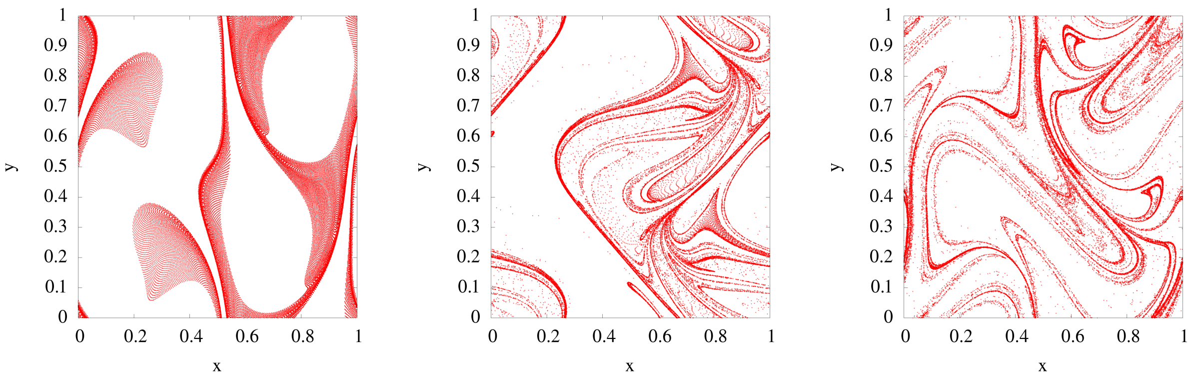
2.1.2. Konvergencia az attraktorhoz különböző kezdeti feltételekből

Különböző kezdeti sokaságok ugyanahhoz a fraktálalakzathoz konvergálnak, ha a fraktálalakzatot egy adott időpillanatban vizsgáljuk, ezért jogosan beszélhetünk attraktorról. Annak ellenére, hogy a 5. ábrán bemutatott eredményből következik: ez az objektum a mi rendszerünkben csak időfüggő lehet.
A most következő két részben csak az aperiodikus gerjesztés esetét vizsgáljuk. A fentieket illusztrálandó, két különböző kezdeti eloszlással végzett szimuláció eredményeit mutatják az alábbi ábrák. Az egyik esetben csak a cella bal oldalán ($x \leq 0.5$) helyeztünk el homogén módon részecskéket, a másikban pedig csak a jobb oldalon ($x \geq 0.5$).



(a) t = 2 (b) t = 9 (c) t = 40

7. ábra. A cella bal oldaláról indított részecskék helyzetének időfejlődése az (x, y) síkban.



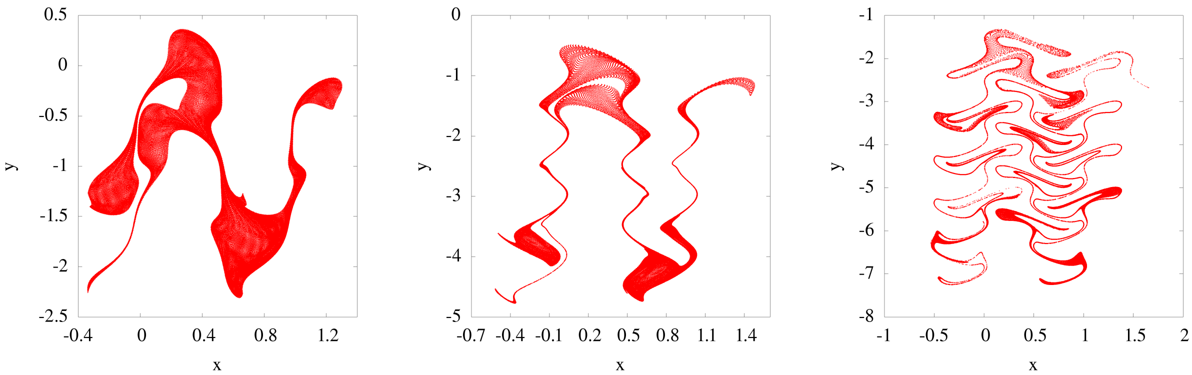
(a) t = 2 (b) t = 9 (c) t = 40

8. ábra. A cella jobb oldaláról indított részecskék helyzetének időfejlődése az (x, y) síkban.

A két korai állapotról készült ábra, 7a és 8a, jól mutatja, hogy a két eset egymás „inverze”. A 7a ábrán ott találhatóak fehér, részecske nélküli, területek, ahol a 8a ábrán részecskék vannak és fordítva. Az ez utáni ábrákon már megegyezik a részecskék térbeli eloszlása, azaz a két esetben ugyanahhoz a halmazhoz konvergáltak. A megvizsgált időpillanatokból következik, hogy a konvergenciaidő körülbelül 8-10 időegység. Figyelemreméltó, hogy nem ismétli önmagát az attraktor, összhangban a 5. ábrán látottakkal.

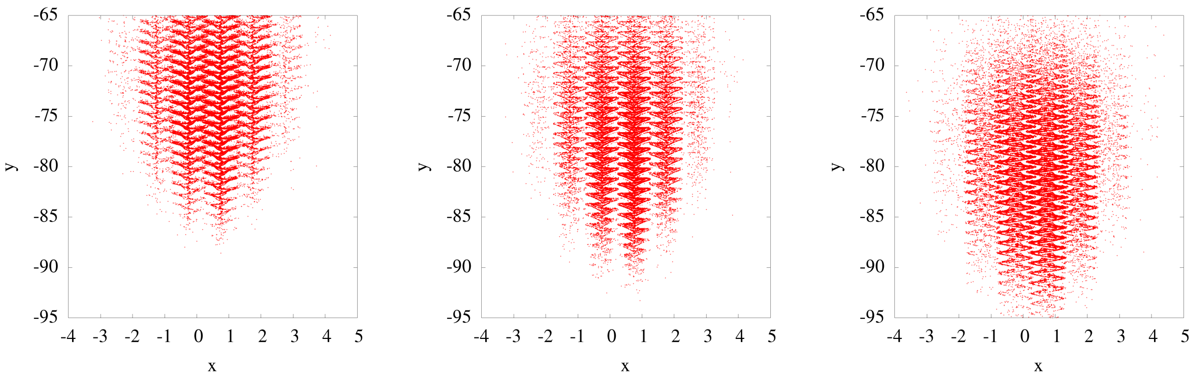
2.2. Periodikus határfeltétel nélkül végzett szimulációk

A periodikus határfeltétel elhagyásával a részecskesokaság térben szétterjed és függőleges irányban elkezd lefelé süllyedni. Ezt az alábbi ábrák és a CD-n mellékelt **eses.mp4** videó illusztrálják, amelyeken a részecskék térbeli eloszlása látható különböző időpontokban:



(a) t = 2 (b) t = 4 (c) t = 6

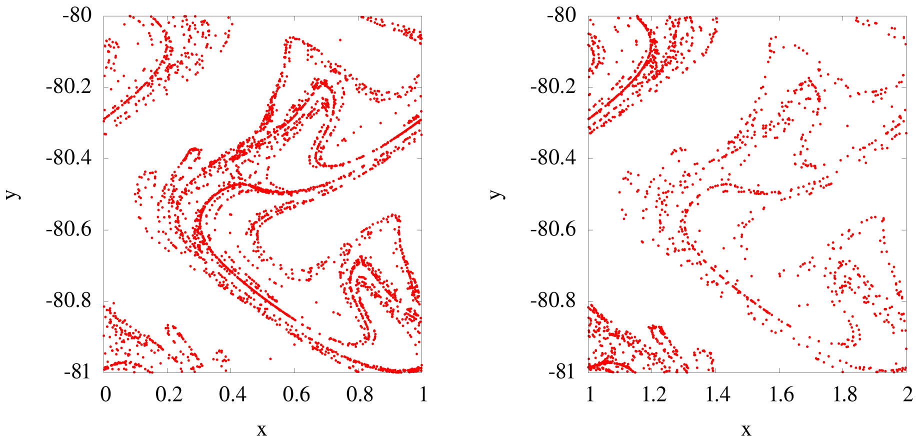
9. ábra. A homogén eloszlásból kialakuló fraktálszerkezet kezdeti időfejlődése az (x, y) síkban.



(a) t = 82 (b) t = 86 (c) t = 90

10. ábra. A részecskék elhelyezkedése az (x, y) síkban hosszú idő elteltével, egész értékű időpillanatokban. A 10a., 10b., 10c. részábrák ugyanazt a térrészt mutatják.

Alább két szomszédos cella kinagyított képe figyelhető meg:



(a) Sok részecskés cella.

(b) Kevés részecskés cella.

11. ábra. Két egymás mellett elhelyezkedő cella részecskeeloszlása $t = 90$ időpontban. A cellák helyzete: a 11a. ábrán $x \in [0, 1]$ és a 11b. ábrán $x \in [1, 2]$. Az y koordináta mindkét esetben $y \in [-81, -80]$.

Korábban már láttuk, hogy egy periodikus határfeltétellel ellátott cellában megfelelő idő elteltével kialakul a fraktálszerkezet. A periodikus határfeltétel a mozgásegyenlet szempontjából ekvivalens azzal, ha több cella van jelen, és térben cellányi periódussal valóban periodikus a sebességtér. Akár kevés, akár sok részecske kerül egy adott cellába, „ráhúzódnak” a részecskék a *snapshot* attraktorra, csak egyik esetben kevesebb, míg a másik esetben több részecskével történik meg ez a folyamat. Ennek az eredményét láthatjuk a 11. ábrán.

Most már tehát tudjuk, hogy a térbeli szétterjedés folyamata során is az attraktor tulajdonságai érvényesülnek. A szétterjedés a következő mechanizmussal történik: Az általunk vizsgált attraktoron léteznek olyan hiperbolikus tulajdonságú trajektóriák (a periodikus instabil trajektóriák aperiodikus megfelelői), amelyek átlépik a cellahatárt. Mivel egy általános trajektória véletlenszerűen „válogat”, hogy milyen sorrendben követ egymás után egy-egy hiperbolikus trajektóriát, véletlenszerűen fog cellahatárokat átlépni. Ezzel véletlenszerűen fog bolyongani a szomszédos cellák között. Jegyezzük meg, hogy a véletlenszerű bolyongás sok részecske esetében diffúzióhoz vezet [12]. Ez a mechanizmus mind vízszintes, mind függőleges irányban működik, az utóbbiban azonban egy határozott irányú sodródás is megjelenik, a nehézségi erő hatására.

A térbeli szétterjedés egy érdekes jelenséget tesz jól láthatóvá. A 9b és 9c ábrákon már elkezdődik a részecskék térbeli eloszlásának „összefogazódása”, azaz a nagy sűrűségű szálkötegek vízszintes irányú egymás közé türemkedése, de egy függőleges irányban kiterjedő, kacskaringózó üres sávval jól elválasztva egymástól. Ez később egy állandósult állapot lesz az esés során (10. ábra). Mivel az üres sáv minden függőleges cellaoszlopban jelen van, azt is megfigyelhetjük, hogy maguk a részecskék is különböző oszlopokba rendeződnek. Az oszlopok megjelenése a rendszer vízszintes periodicitásának köszönhető. Az oszlopok határai azonban nem egész számú koordinátákra esnek, sőt két szomszédos oszlop át is fed, mindazonáltal ugyanazon y

koordinátánál nem találkoznak egymással. Az „összefogazódás” jelensége tehát annak a megnyilvánulása, hogy az attraktorban van egy összefüggő, nagyjából üres sáv a cella aljától a tetejéig, ahogyan ez a 5. ábrán is látható. Ennek a sávnak az időben folyamatos jelenléte annak lehet a következménye, hogy az esés során a részecskék áthaladnak az egyes cellák „balra” és „jobbra” keverő tartományán is. A később bemutatásra kerülő statisztikák (12a. ábra) szerint a sebesség vízszintes komponensének a $\langle v_x \rangle$ várható értéke körülbelül ugyanannyiszor vesz fel pozitív értékeket, mint negatív értékeket, azaz a részecskék a cellák balra és jobbra keverő tartományát ugyanolyan gyakorisággal látogatják meg. Így ha a részecskék már beálltak valamilyen alakzatra, akkor ez az alakzat vízszintes irányban nem tud átrendeződni. A 10. ábrán látható, hogy az oszlopok azért ingadoznak: hol közelebb, hol távolabb helyezkednek el egymástól.

Megjegyzendő, hogy a periodicitás miatt végtelen sok oszlop létezik, de a véges sok részecske ezen oszlopok közül csak véges számút tölt ki. Rendkívül érdekes, hogy még viszonylag hosszú idő, 90 időegység után is alig 5 oszlop alakul ki, a sokaság vízszintes irányú kiterjedése mintegy 5 cellányi, ahogyan ez a 10c ábráról leolvasható. A függőleges kiterjedése ugyanekkor már bő 30 cella, a vízszintes érték 6-szorosa. Ez már-már nagyságrendi különbségnek tekinthető a vízszintes és a függőleges irányú szétterjedés üteme között.

2.3. A részecskék statisztikája

Ahogyan az előző részben leírtuk, a cellán belül komplex alakzatok jelennek meg, a cellánál nagyobb méretskálákon viszont véletlen bolyongást végeznek a részecskék. Ez a részecskék sokasága fölött kiértékelt statisztikákban is tükröződik. A szimuláció közben minden lépés során meghatároztuk a részecskék x és y koordinátáinak átlagértékeit ($\langle x \rangle$ és $\langle y \rangle$) és szórásnégyzeteit ($\sigma^2(x)$ és $\sigma^2(y)$), illetve a v_x és v_y sebességkomponensek átlagértékeit ($\langle v_x \rangle$ és $\langle v_y \rangle$). Ezeket az értékeket ábrázolva az idő függvényében, információ szerezhető az attraktor tulajdonságairól, ill. ezek időfejlődéséről. Itt újra fontossá válik az összehasonlítás a periodikus gerjesztés esetével [7]. Az átlagok számtani átlagok, a szórásnégyzet pedig a megfelelő numerikus becslés érdekében a következő képlet segítségével számítható ki:

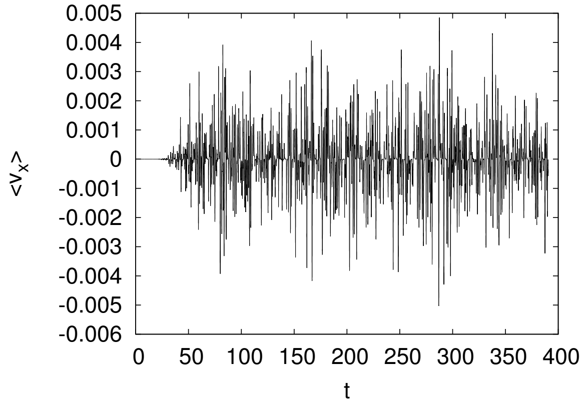
$$\sigma^2(q) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (q_i - \langle q \rangle)^2, \tag{12}$$

ahol N a részecskék száma, q a részecske vízszintes vagy függőleges koordinátája (x vagy y), $\langle q \rangle$ a részecskék koordinátáinak átlaga és q_i az i-edik részecske koordinátája.

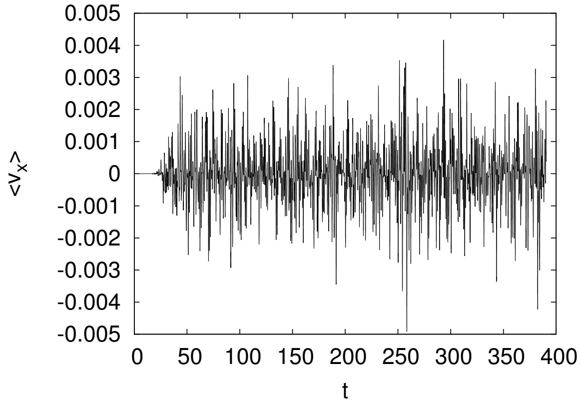
2.3.1. A sebességek statisztikája

A részecskék $\langle v_x \rangle$ és $\langle v_y \rangle$ statisztikái szempontjából irreleváns a térbeli határfeltételek periodicitása. Így ezek a statisztikák akkor is érvényesek, amikor a részecskék térbeli szétterjedését vizsgáljuk, de mégis jellemzik az egyetlen cellán belül megjelenő attraktort.

Az alábbi ábrákon látható a részecskék $\langle v_x \rangle$ és $\langle v_y \rangle$ értékeinek időfüggése:

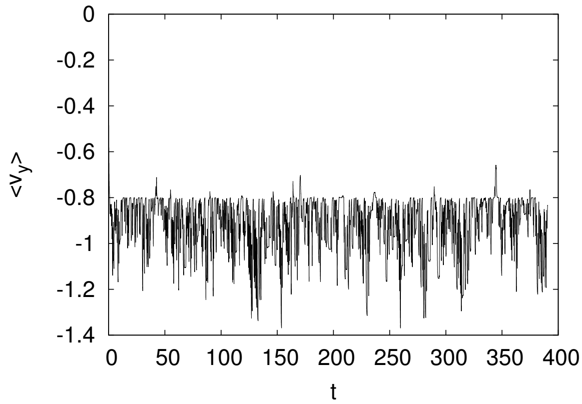


(a) Aperiodikus eset.

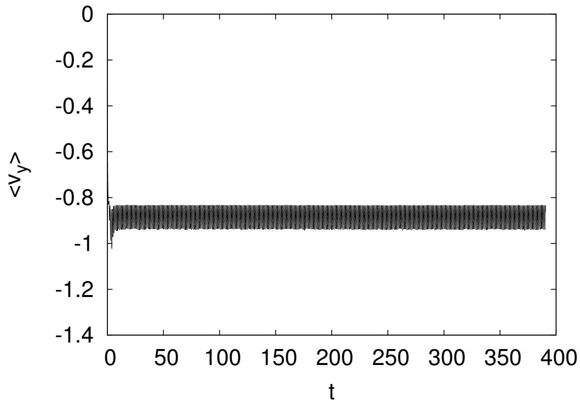


(b) Periodikus eset.

12. ábra. A $\langle v_x \rangle$ időfüggése.



(a) Aperiodikus eset.

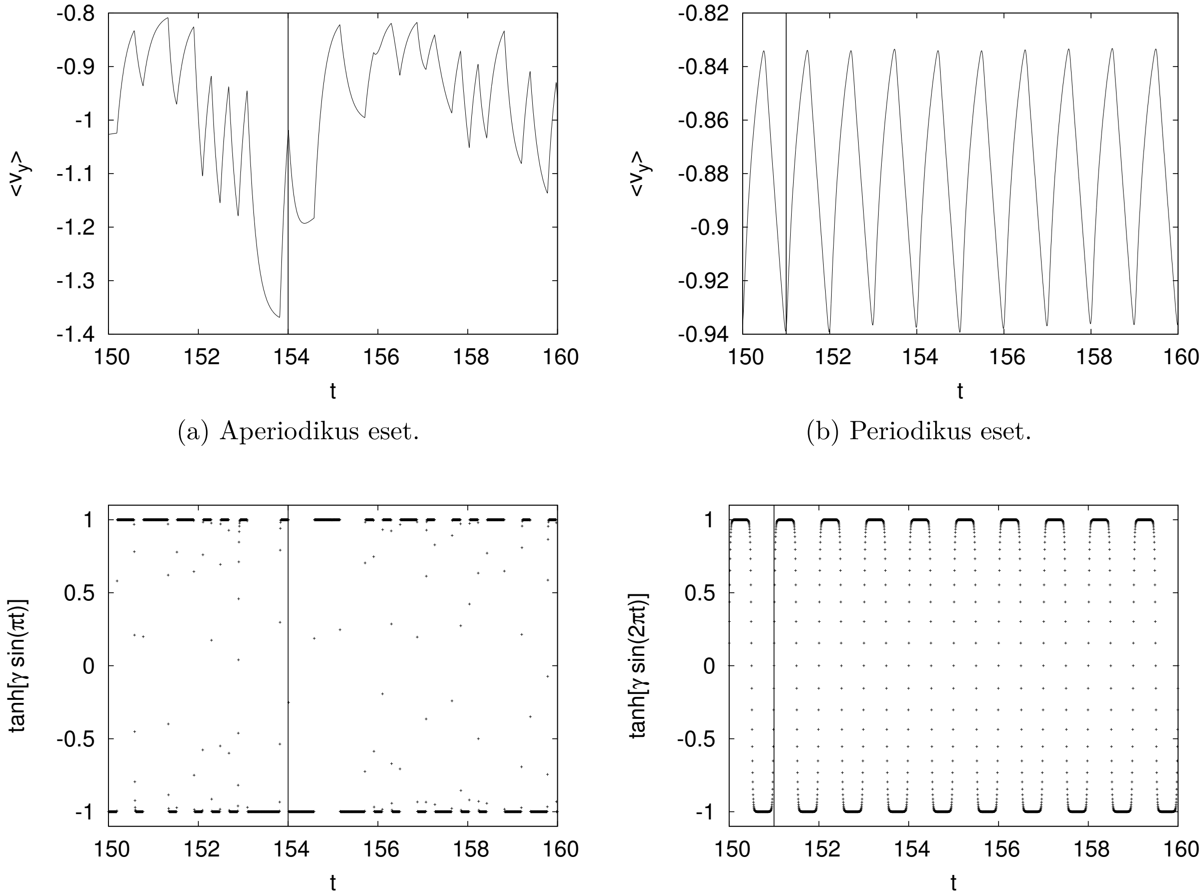


(b) Periodikus eset.

13. ábra. A $\langle v_y \rangle$ időfüggése.

A $\langle v_x \rangle$ komponens mind aperiodikus, mind periodikus gerjesztés mellett körülbelül ugyanannyiszor vesz fel negatív, mint pozitív értékeket, és egy-két kiugró értéktől eltekintve az értéke $\langle v_x \rangle \in [-0.003, 0.003]$ tartományban mozog. A $\langle v_y \rangle$ komponens a periodikus esetben egy W esési sebességnél nagyobb sebességérték körül oszcillál, aperiodikus esetben pedig egy sokkal nagyobb rendezetlenséget mutató függvény figyelhető meg, amelynek a tipikus értéke azonban szintén *nagyobb*, mint W. Ez nem jelent mást, mint hogy a részecskék átlagosan *gyorsabban* esnek, mint ha nyugvó közegben esnének.

Érdemes „ráközelítve” is megvizsgálni ezeket a függvényeket:



(a) Aperiodikus eset.

(b) Periodikus eset.

(c) Aperiodikus eset.

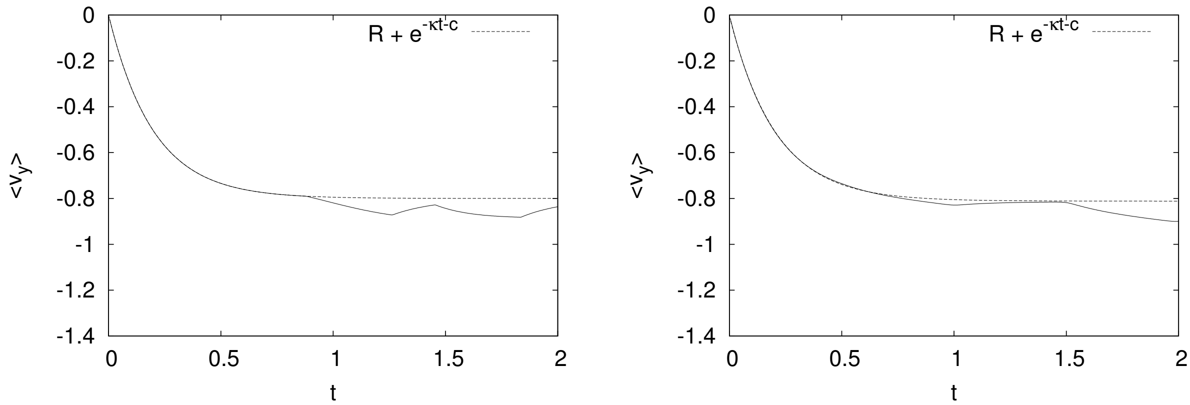
(d) Periodikus eset.

14. ábra. $\langle v_y \rangle$, és a gerjesztő függvény amplitúdója, $t \in [150, 160]$ tartományon.

Általánosan elmondható, hogy $\tanh[\gamma X(4t)] = +1$ esetben egy maximális érték felé konvergál $\langle v_y \rangle$, és $\tanh[\gamma X(4t)] = -1$ esetben egy minimálishoz.

Mindkét típusú gerjesztés mellett megfigyelhető egy ennek következményeként előálló, fűrészfog függvényre emlékeztető viselkedés. A periodikus esetben ez kisebb (a sokaság véges méretének tulajdonítható) fluktuációktól eltekintve szabályos, ≈ 0.05 amplitúdóval és 1 értékű periódusidővel, ezzel szemben az aperiodikus esetben egy sokkal zavartabb esettel állunk szemben, mely nagyobb fluktuációkat mutat. Ha összehasonlítjuk a $\langle v_y \rangle(t)$ függvényt a gerjesztő függvény időfüggő tagjával, mindkét esetben tisztán látszik a korreláció a kettő között. A periodikus esetben $\tanh[\gamma \sin(2\pi t)] = +1$ értékhez a fűrészfog „teteje”, $\langle v_y \rangle \approx -0.84$, tartozik, a $\tanh[\gamma \sin(2\pi t)] = -1$ esethez a fűrészfog „alja”, $\langle v_y \rangle \approx -0.94$. Ezek szerint a sebesség folyamatos fluktuálása a gerjesztő függvény váltásainak köszönhető. Ez ésszerű, hiszen a közeg sebességének a megváltozása nélkül a részecskék előbb-utóbb felvennék a közeg sebességét.

Érdemes megnézni az idősorok kezdetét is:



(a) Aperiodikus eset.

(b) Periodikus eset.

15. ábra. $\langle v_y \rangle$ kezdeti exponenciális lecsengése. A szaggatott vonal az illesztést jelöli.

Mindkét görbe a homogén kezdeti feltételből, a 0 sebességből indul. A kezdeti szakasz exponenciálisnak mutatkozik addig, amíg el nem éri a későbbi, stacionárius viselkedést. A $t \in [0, 0.75]$ szakaszra $R + \mathrm{e}^{-\kappa t - c}$ alakú görbe illeszthető, melynek paramétereit az alábbi táblázat tartalmazza:

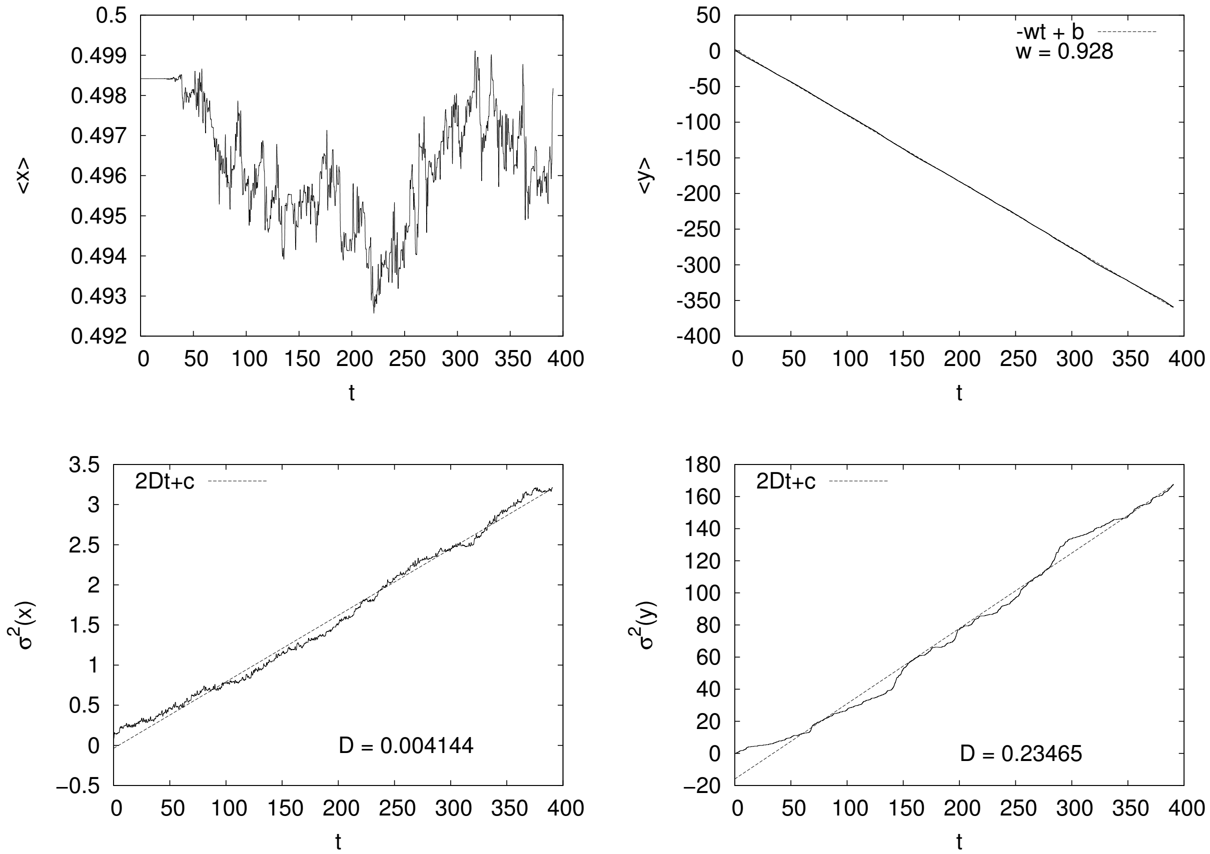
Paraméter	Periodikus	Aperiodikus
R	-0.8117 $\pm$ 0.0005	-0.8 $\pm 1 \cdot 10^{-7}$
c	0.2144 $\pm$ 0.0009	0.223144 $\pm 2 \cdot 10^{-7}$
κ	4.82 $\pm$ 0.01	5 $\pm 2.6 \cdot 10^{-6}$

4. táblázat. Az illesztett exponenciális függvény paraméterei, periodikus és aperiodikus gerjesztés esetén. A hibák az illesztésből adódnak.

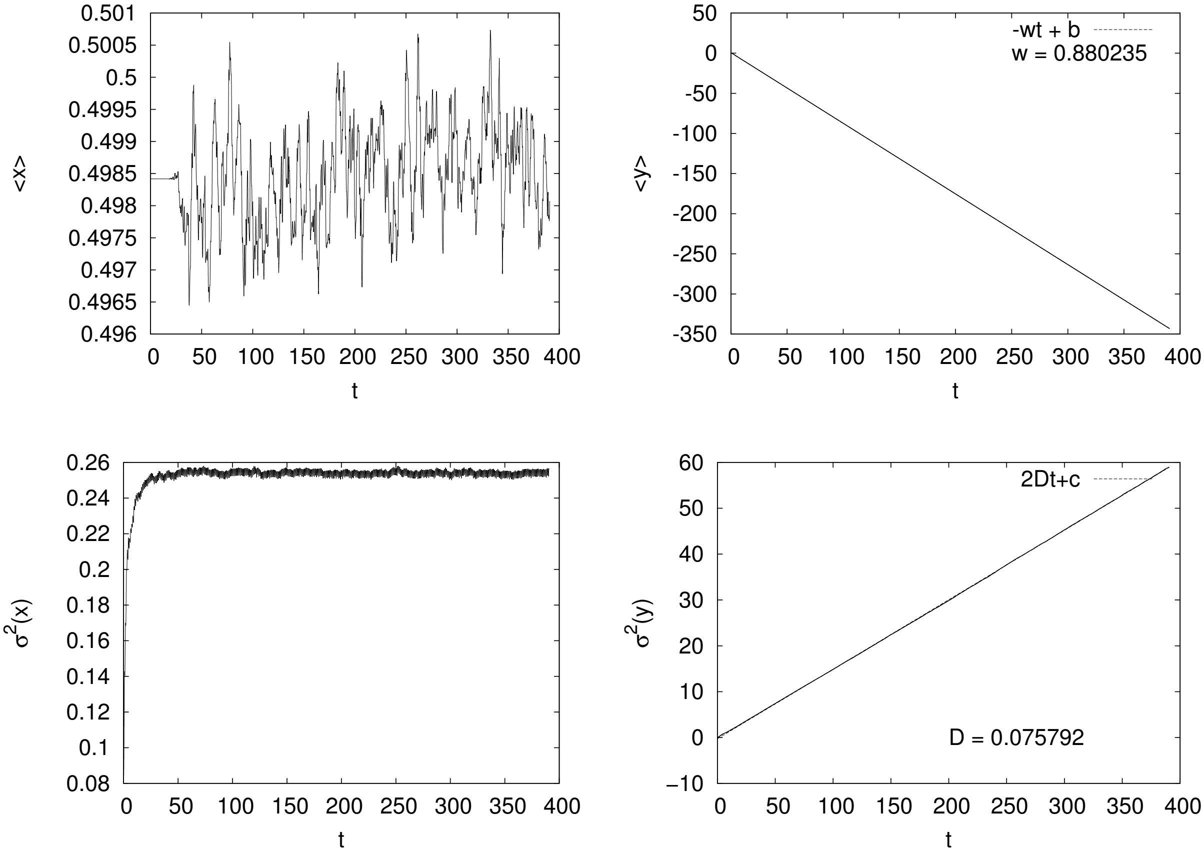
Összességében a kétféle gerjesztés mellett egy hasonló jellegű viselkedés mutatkozik $t \in [0, 0.8]$ tartományon, bár a fűrészfogszerű jelleg korábban jelentkezik aperiodikus esetben. Ez összefüggésbe hozható azzal, hogy aperiodikus esetben κ paraméter értéke nagyobb, mint periodikus esetben, azaz erősebb az exponenciális lecsengés. Az látható, hogy a $\langle v_y \rangle$ értékek mind aperiodikus, mind periodikus esetben $-R \approx W = 0.8$ értékhez konvergálnak. A κ változó azt jellemzi, milyen gyorsan következik be a konvergencia, ez kapcsolatba hozható a fázistérfogat-összehúzódási tényezővel [5], ami az A tehetetlenségi paraméterrel fejezhető ki, innen származik a megfigyelt érték. Tehát az idősorok kezdete az attraktorra történő konvergenciáról ad tájékoztatást.

2.3.2. A részecskekoordináták statisztikája

Most bemutatjuk a $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$, $\sigma^2(x)$ és $\sigma^2(y)$ értékek időbeli fejlődését, ami információval fog szolgálni a részecskesokaság szétterjedéséről.



16. ábra. $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$, $\sigma^2(x)$ és $\sigma^2(y)$ időfüggése. Aperiodikus eset. A szaggatott vonalak az illesztést jelölik.



17. ábra. $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$, $\sigma^2(x)$ és $\sigma^2(y)$ időfüggése. Periodikus eset. A szaggatott vonalak az illesztést jelölik.

Az $\langle x \rangle$ értékek egy ideig konstansak maradnak, majd elkezdenek fluktuálni. Ám ezen változások nagysága igen kicsi egy cellamérethez viszonyítva, mind aperiodikus: $(0.493 - 0.5)/1 = 0.07$, mind periodikus esetben: $(0.4965 - 0.5)/1 = 3.5 \cdot 10^{-3}$. Vagyis a részecskesokaság tömegközéppontja vízszintes irányban lényegében helyben marad. A helyben maradás megfelel az előző részben tett megállapításnak, miszerint a $\langle v_x \rangle$ komponens „körülbelül ugyanannyiszor vesz fel negatív, mint pozitív értékeket”. Természetesen kérdéses, hogy időben tovább vizsgálódva, hogy változna ez a függvény.

Az $\langle y \rangle(t)$ függvény gyakorlatilag lineáris, azaz a részecskesokaság tömegközéppontja függőleges irányban lényegében egyenletes sebességgel esik. Tehát azt mondhatjuk, hogy hosszabb időtávon az esési sebességnek van egy jól meghatározott átlagértéke. Bár az előző részből tudjuk, hogy ennek a sebességnek vannak fluktuációi, ezek most elhanyagolható jelentőségűnek bizonyulnak.

Ezért ésszerű lépés $-wt + b$ alakú egyenest illeszteni az adatpontokra, az illesztéssel kapott paramétereket az alábbi táblázat tartalmazza:

Paraméter	Aperiodikus eset	Periodikus eset
w	0.928 $\pm 2.4 \cdot 10^{-5}$	0.880235 $\pm 6 \cdot 10^{-7}$
b	2.350 $\pm$ 0.005	0.6891 $\pm$0.000135

5. táblázat. A $\langle y\rangle$(t) értékekre illesztett egyenes paraméterei. A hibák az illesztésből adódnak.

Látható, hogy az egyenesillesztésből kapott w süllyedési sebesség értéke mindkét gerjesztés mellett lényegesen eltér a mozgásegyenletben szereplő $W = 0.8$ értéktől, de egymástól csak kevéssé. A szórásnégyzetek vizsgálatánál először vizsgáljuk meg az aperiodikus esetet (16): $\sigma^2(x)$ általános tendenciáit nézve azt mondhatjuk, hogy a szórásnégyzet egy közel lineáris növekedést mutat időben, mely erős fluktuációkkal terhelt. Bizonyos tartományokon azonban megtorpan a növekedés és rövid ideig $\sigma^2(x)$ körülbelül konstans marad, mint például $t \approx 230$, $t \approx 310$ és $t \approx 370$ időpontokban. Az egész függvényen megfigyelhető egy kis amplitúdójú fluktuáció, mely „ráül" a $\sigma^2(x)$ értékekre és a teljes vizsgált időtartományon jelentkezik, és egy időnként jelentkező fluktuáció, mely a közel egyenletes növekedést zavarja meg. A két jelenséget nehéz egyértelműen szétválasztani. Ezzel szemben a $\sigma^2(y)$ sokkal „simább" függvénye az időnek és csak bizonyos szakaszokon mutat lineáris növekedést, pl.: $t \approx 10-60$, $t \approx 70-150$, $t \approx 290 - 335$ időtartományokon. Érdekes megfigyelni, hogy az első két közel lineáris szakasz között szinte ugrásszerű a „váltás" ($t \approx 65$ időpillanatban). „Távolról nézve", vagyis a hosszú távú viselkedésre koncentrálva, $\sigma^2(x)$ és $\sigma^2(y)$ is lineárisan, azaz diffúziós módon növekszik. Ez a 2.2. fejezetben részletezett mechanizmus helyességére utal. A fluktuációk az aperiodikus gerjesztésnek, azaz az attraktor folyamatos változásának az eredményei.

Periodikus gerjesztésnél a $\sigma^2(y)$ lineárisan, azaz diffúziósan nő az idő függvényében. Ami a legszembetűnőbb jelenség, hogy ez a lineáris növekedés gyakorlatilag teljesen tiszta, szemben az aperiodikus gerjesztés esetével, ahol hatalmas fluktuációk vannak.

A σ^2 függvényekre $2Dt + c$ alakú egyenest illesztettünk $t > 10$ értékekre (kivéve periodikus esetben a $\sigma^2(x)$ függvényre, tekintve, hogy az szemmel láthatóan nem növekszik; később még visszatérünk rá). Ezzel meghatározható D, a hosszútávú diffúziós együttható. Az illesztés során kapott értékeket az alábbi táblázat tartalmazza:

Paraméter	Aperiodikus eset	Periodikus eset
$\sigma^2(x)$ értékekre illesztett egyenesek paraméterei		
D_x	0.004144 $\pm 1.16 \cdot 10^{-6}$	-
c_x	-0.037 $\pm$ 0.0005	-
$\sigma^2(y)$ értékekre illesztett egyenesek paraméterei		
D_y	0.23465 $\pm$ $7 \cdot 10^{-5}$	0.075792 $1.32 \cdot 10^{-6}$
c_y	-16.01 $\pm$ 0.03	-0.263 $\pm$ 0.0006

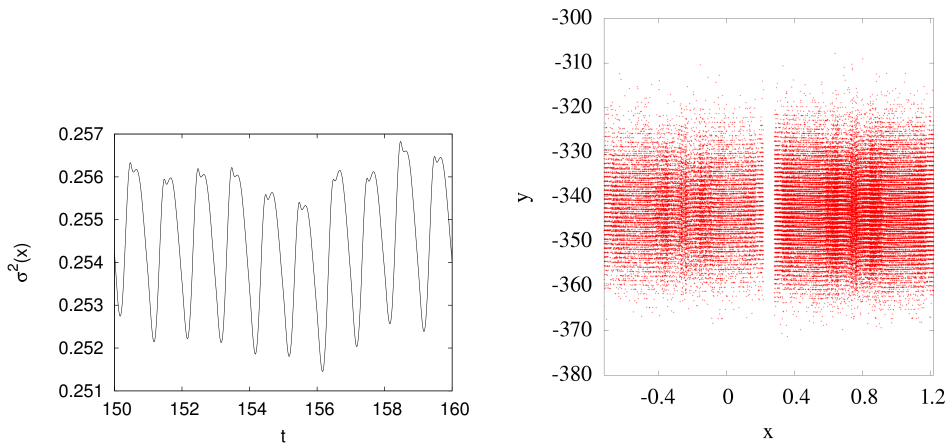
6. táblázat. A σ^2 értékekre illesztett egyenesek paraméterei. A hibák az illesztésből adódnak.

Két fontos észrevételt kell tennünk:

- Aperiodikus esetben $D_y \approx 56D_x$. A 10c. ábrán ($t = 90$-nél) azt láttuk, hogy az y irányú kiterjedés körülbelül 6-szorosa az x irányú kiterjedésnek. Ez az érték nem tükrözi a fenti értéket. Egy magyarázat erre az lehet, hogy amint majd a később bemutatandó hisztogramokon is látni fogjuk, ebben a pillanatban az x irányú eloszlás nem igazi Gauss-i, hanem még diszkrét, azaz még nem terjedt ki elég cellára.

- A periodikus és az aperiodikus eset D_y értékeit összehasonlítva azt találjuk, hogy az aperiodikus esetben a diffúziós együttható értéke körülbelül háromszorosa a periodikus esetben mutatkozó diffúziós együtthatónak. Ez, szemben a süllyedési átlagsebességre kapott eredményekkel, számszerűleg nagyon eltérő eredmény a két eset között.

Vizsgáljuk most meg periodikus gerjesztésnél a $\sigma^2(x)$ függvényt. Ez először egy konstans értékhez konvergál, majd ekörül „oszcillál”. Ezt az ingadozást a következő ábrán mutatjuk be:



18. ábra. A $\sigma^2(x)$ értékek időbeli ingadozása periodikus gerjesztés esetén, és periodikus határfeltétel nélkül készült ábra a részecskeeloszlásról az (x, y) síkban, $t = 390.625$.

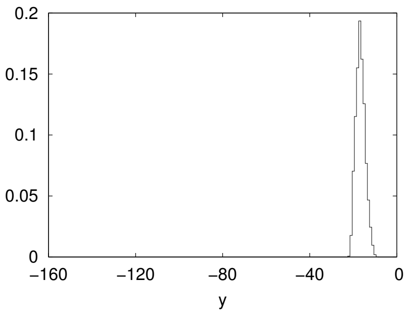
Az ingadozás aperiodicitása feltehetőleg ezúttal is a kis sokaságméretnek tulajdonítható. A növekedés hiánya arra utal, hogy a trajektóriák vízszintes irányban nem távolodnak el az eredeti pozíciójuktól. Ha megvizsgáljuk a részecskék hosszú idő után mutatkozó térbeli elhelyezkedését, valóban ezt tapasztaljuk. Az általunk tekintett periodikus esetben tehát szélsőségesen kicsi, 0 értékű a vízszintes irányú diffúziós együttható, szemben a nemnulla értékű függőleges irányú diffúziós együtthatóval.

2.4. A hisztogramok vizsgálata

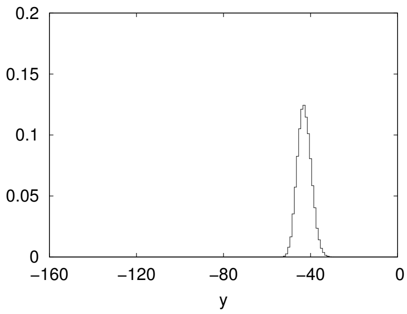
Utolsó lépésként, csak az aperiodikus gerjesztés esetében, bizonyos időpontokban meghatároztuk a részecskéknek az eloszlását. Mind egységnyi (durvaskála) mind 1/6-nyi (finomskála) cellamérettel. Az x illetve y tengelyt felosztottuk egy bin méretű tartományokra és megszámoltuk, hogy azon tartományon belül hány részecske tartózkodik, majd a kapott értéket elosztottuk a részecskék számával és a cellamérettel, így normáltuk a kapott hisztogramot.

2.4.1. Az y-eloszlás durvaskálásjú vizsgálata

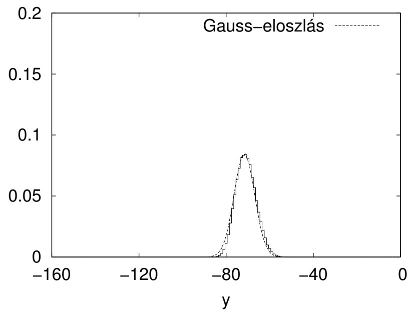
Az egységnyi binmérettel végzett számítások eredményei alább láthatóak:



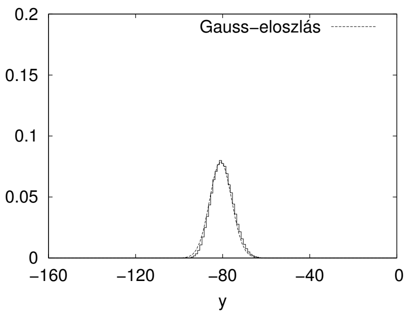
(a) t = 20



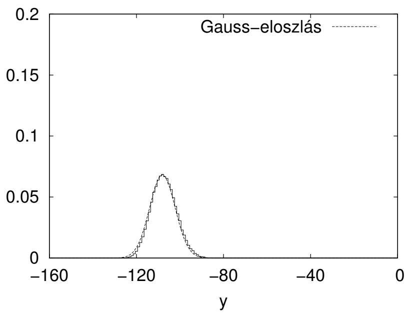
(b) t = 50



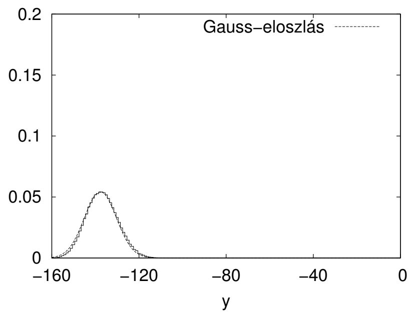
(c) t = 80



(d) t = 90



(e) t = 120



(f) t = 150

19. ábra. A részecskék y koordinátáinak a normált hisztogramja különböző időpontokban. A binméret egy cellányi. A szaggatott vonalak az illesztést jelölik.

A kezdeti bizonytalanságok után Gauss-i jellegű vagy legalábbis igen hasonló viselkedés tapasztalható, melynek várható értéke és maximum csúcsa az idővel csökken. A hisztogramok szélessége idővel nő, egyfajta „szétfolyás” figyelhető meg.

Annak érdekében, hogy összehasonlítsuk a hisztogramból származó statisztikai paramétereket a szimuláció során számított értékekkel, Gauss-görbét illesztettünk a 19. ábrán látható (c), (d), (e) és (f) hisztogramokra, melynek alakját a következő képlet írja le:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \tag{13}$$

ahol μ a Gauss-eloszlás átlaga és σ a szórása.

A hibák az illesztésből adódnak, a szórásnégyzet hibáját a következőképpen számítottuk:

$$\Delta(\sigma^2) = 2\sigma\Delta\sigma \tag{14}$$

ahol $\Delta\sigma$ az illesztésből kapott abszolút hiba.

t	μ	σ^2	$\langle y \rangle$	$\sigma^2(y)$
80	-71.63 ± 0.05	22.0 ± 0.35	-71.3	21.4
90	-80.93 ± 0.05	25.4 ± 0.4	-80.7	24.9
120	-108.1 ± 0.03	34.0 ± 0.33	-107.8	33.4
150	-137.72 ± 0.04	53.4 ± 0.6	-137.4	52.6

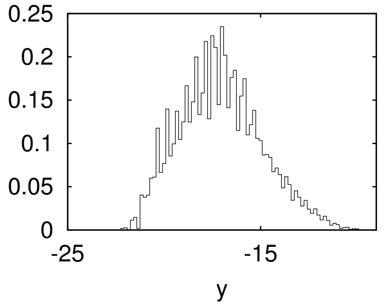
7. táblázat. Az illesztett Gauss-eloszlások paraméterei, és ezek összevetése a szimulációból kapott értékekkel.

Az illesztett görbéket a 19. ábrán is jelöltük, és kiváló egyezést látunk az adatpontokkal. Továbbá, amint az a 7. táblázatból leolvasható, az illesztett és a szimulációból kapott értékek jól korrelálnak egymással. Ez megerősít minket abban, hogy a Gauss-eloszlás valóban jól jellemzik a részecskék térbeli eloszlását.

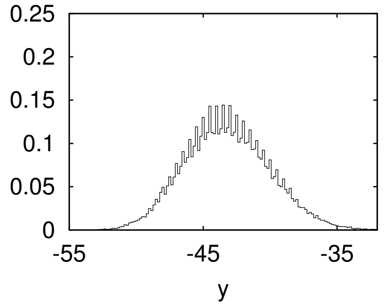
A hisztogramok alapján arra a megállapításra juthatunk, hogy a részecskék esésük során közel diffúziós módon terjednek szét y irányban, ami összhangban van korábbi vizsgálataink eredményeivel.

2.4.2. Az y-eloszlás finomskájú vizsgálata

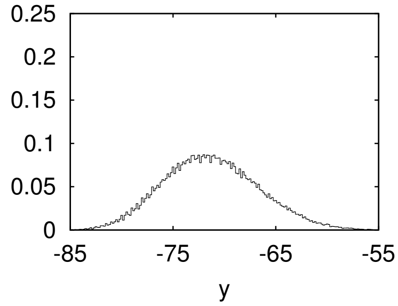
Az 1/6 cellamérettel végzett számítások eredményei alább láthatóak:



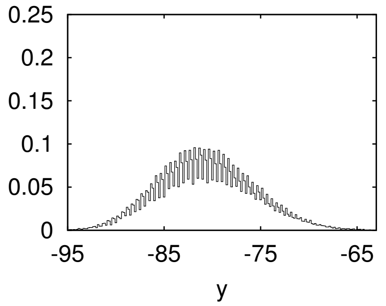
(a) t = 20



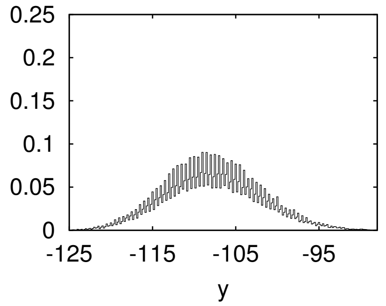
(b) t = 50



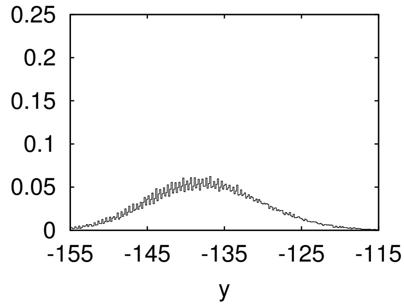
(c) t = 80



(d) t = 90



(e) t = 120



(f) t = 150

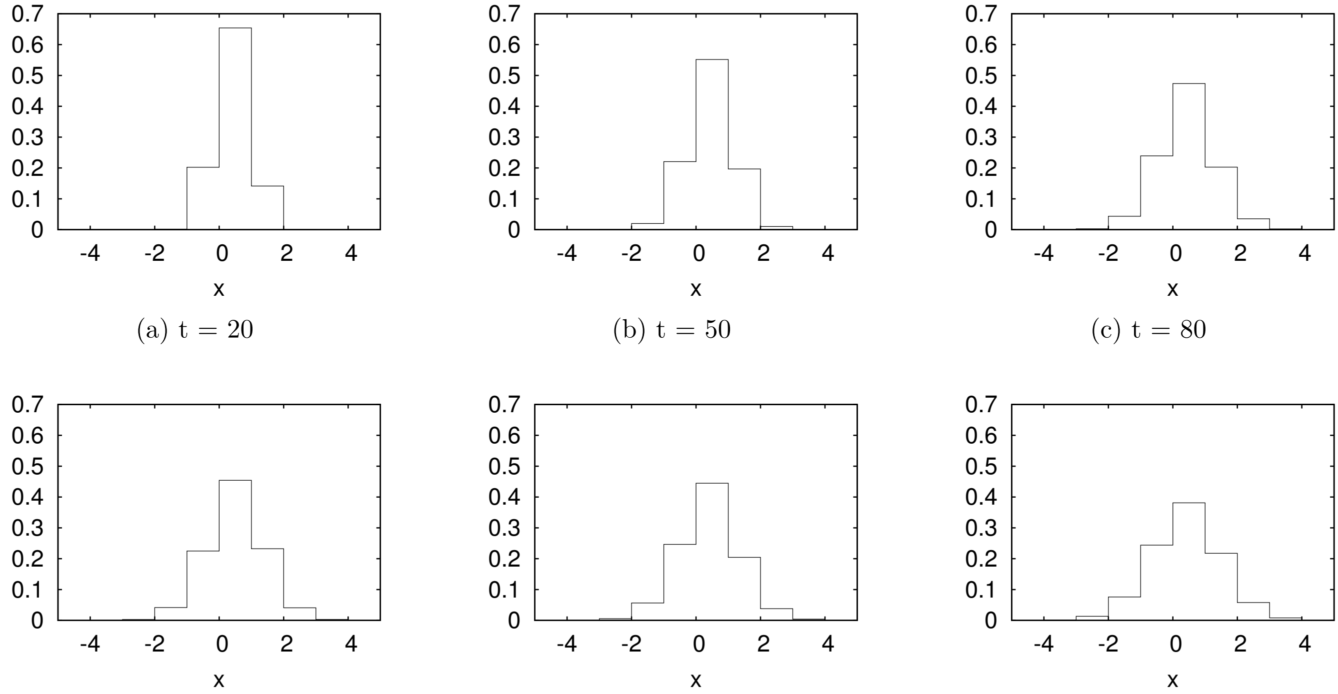
20. ábra. A részecskék y koordinátáinak a normált hisztogramja különböző időpontokban. A binméret 1/6.

Amint az ábrákon látható, egy bizonyos idő eltelte után a finomskálájú eloszlás is egy Gauss-alakhoz tart, ahol a belső szerkezetet a Gauss-ra „ráülő” egyenetlenségek képviselik. Az egyenetlenségek a fraktálszerkezetet mutatják meg. Amint az 10c. ábrán is látszik, y irányban is megfigyelhető mintázat a részecskék eloszlásában, ám ez a mintázat a térbeli periodicitás miatt nem lehet eltérő a különböző cellákban. Az eloszlásban megfigyelhető egyenetlenségek amplitúdója azonban mutat némi helyfüggést, ennek a jelenségnek a magyarázata még tisztázandó. Az egyenetlenségek részleteit tekintve azt a felfedezést tehetjük, hogy sok és kevés részecskével rendelkező binek követik egymást. Ennek a váltakozásnak az amplitúdója azonban időben erősen változik. Az időbeli függés a váltásokhoz, pontosabban az azok közötti szünetekhez köthető. Ugyanis a gerjesztőfüggvény váltásai okozzák a kaotikus viselkedést, ami durvaskálán diffúzióhoz és Gauss-i viselkedéshez, finomskálán pedig fraktálszerkezethez vezet. Ha nincs váltás a gerjesztőfüggvényben, akkor a fraktálalakzat elmosódik, ami pedig a fluktuációk amplitúdójának csökkenéséhez vezet.

Az y-irányú finomszerkezet vizsgálata további kutatások fontos része lehet, aminek keretében az eloszlás helyfüggését lehetne felderíteni.

2.4.3. Az x-eloszlás durvaskálájú vizsgálata

Az egységnyi cellamérettel végzett számítások eredményei alább láthatóak:



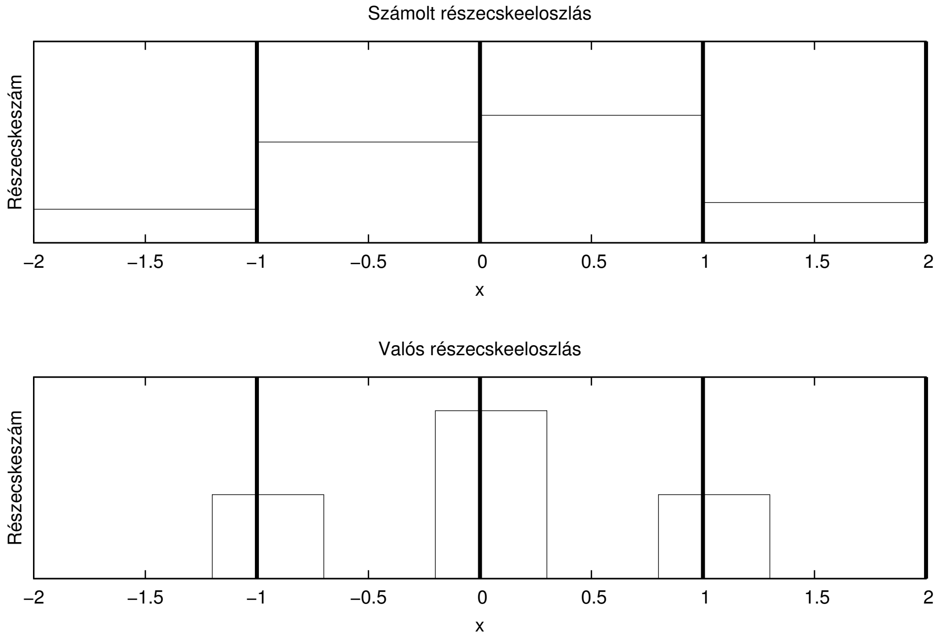
(a) t = 20 (b) t = 50 (c) t = 80

(d) t = 90 (e) t = 120 (f) t = 150

21. ábra. A részecskék x koordinátáinak a normált hisztogramja különböző időpontokban. A binméret egy cellányi.

Amint az látható, az eloszlás aszimmetrikus egy esetet kivéve (21d). Fontos megérteni, hogy ez az asszimmetria *nem feltétlenül* a részecskék eloszlásának tulajdonsága, hanem a binhatárok megválasztásának függvénye.

Az effektus demonstrálására készítettem az alábbi ábrát:



22. ábra. A binhatárok hatását demonstráló ábra. A sötét függőleges vonalak a binhatárokat jelölik.

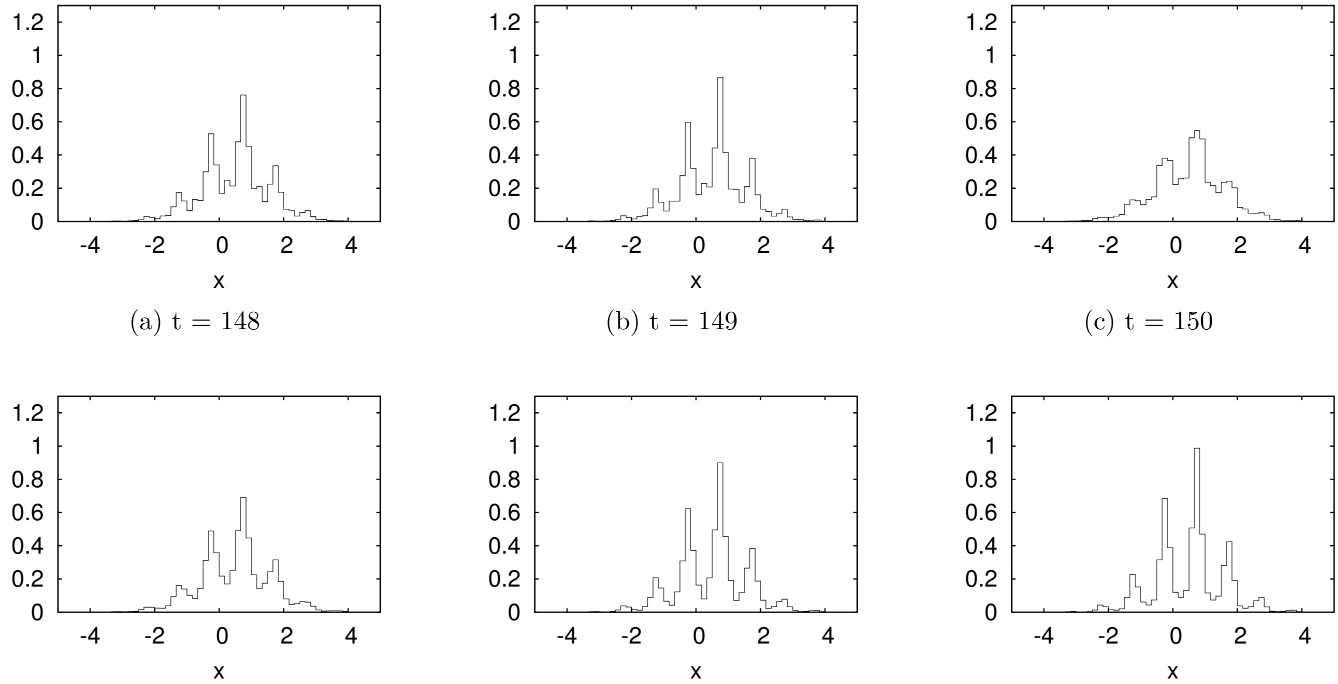
Ahogyan az ábrán is látszik egy lehetséges valós eloszlásban az oszlopok határai nem esnek egybe a binhatárokkal, ezért a számított eloszlásunk aszimmetrikus lesz. Például: a $x \in [0,1]$ binbe a jobb oldali és a középső oszlopból is esnek részecskék.

Az x-irányú durvaskálájú eloszlásról hasonlóan nyilatkozhatunk, mint az y-irányúról, Gauss-i jellegű az eloszlás, azzal a különbséggel, hogy x-irányban a kisebb diffúziós együttható miatt az adatpontok által kirajzolt eloszlás kevésbé szétterjedtebb.

A további vizsgálatok során érdemes lehet egy olyan algoritmust kidolgozni, mely helyesen találja el a megfelelő binhatárokat.

2.4.4. Az x-eloszlás finomskálájú vizsgálata

Az 1/6 cellamérettel végzett számítások eredményei alább láthatóak:



(a) t = 148 (b) t = 149 (c) t = 150

(d) t = 151 (e) t = 152 (f) t = 153

23. ábra. A részecskék x koordinátáinak a normált hisztogramja különböző időpontokban. A binméret 1/6.

Ezen ábrasorozat segítségével kívánom szemléltetni azt a jelenséget, amit az **eses.mp4** videón is észrevehetünk. Amint az látható, bizonyos időpillanatokban sokkal jobban kivehetőek a (2.2) fejezetben tárgyalt oszlopok és élesen látszanak a hisztogramon. Vannak olyan időpontok, jelen esetben csak egy, amikor viszont „egybefolynak” a hisztogramon az oszlopok (23c). A magyarázata a jelenségnek az, hogy bizonyos időpontokban a lefelé eső részecskék, amik x-irányban oszlopokba rendeződtek, a sebességtérben történő váltás hatására egymásba türemkednek és ezért a hisztogramon nem mutatkozik meg olyan élesen az oszlopok helye, mint a többi időpontban. Ehhez az effektushoz adóik még a fentebb említett „binhatár”-effektus.

2.5. Fraktáldimenzió kiszámítása

A részecskék térbeli eloszlásának fraktáldimenzióját az úgynevezett „box counting” módszer segítségével határoztuk meg három időpillanatban aperiodikus gerjesztés esetén, periodikus határfeltétel mellett. Ezen részecskeeloszlások a 3a, 3c és 5a ábrákon láthatóak.

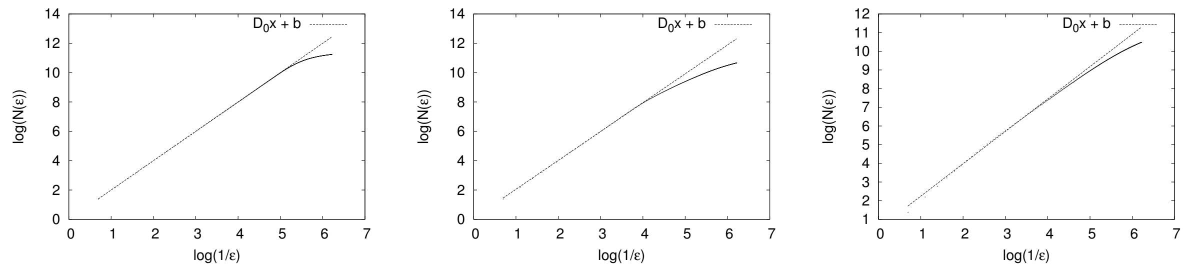
A Minkowski–Bouligand-dimenzió vagy más néven *box counting* dimenzió definíciójának segítségével numerikusan meg lehet határozni egy adott fraktálszerkezet fraktáldimenzióját.

Ha a két dimenziós térben van egy fraktálalakzatunk, akkor a *box counting* dimenziót a következőképpen számolhatjuk ki:
Fedjük le a teret egymáshoz oldalaikkal illeszkedő négyzetekkel, *box*-okkal, melyeknek oldalhossza legyen ϵ. Számoljuk meg, hogy ekkor hány négyzet segítségével fedhető le a fraktálalakzat, ezt a mennyiséget jelölje $N(\epsilon)$.

Ekkor a *box counting* dimenziót a következő képlet segítségével határozhatjuk meg:

$$D = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log(N(\epsilon))}{\log(1/\epsilon)} \tag{15}$$

A gyakorlatban a *box counting* dimenzió meghatározásához a következőt kell tennünk. Egy adott ϵ értéktől elindulva csökkentjük az oldalhosszt és minden egyes lépésben kiszámoljuk $N(\epsilon)$ értékét. Ezután $\log(1/\epsilon)$ függvényében ábrázolva $\log(N(\epsilon))$-t egyenest illesztünk az adatpontok lineáris szakaszára, és az egyenes meredeksége lesz a fraktáldimenzió értéke. Az $\epsilon \to 0$ limesz természetesen nem érhető el. A *box counting* számlálás eredményei és az adatokra illesztett egyenesek (alakjuk $ax + b$) az alábbi ábrákon láthatóak:



(a) t = 2 (b) t = 6 (c) t = 82

24. ábra. A *box counting* számlálás adatpontjai és az illesztett egyenesek (szaggatottal jelölve) különböző időpontokban.

t	D_0	Illesztési tartomány
2	1.9993 ± 0.0001	[1,5]
6	1.967 ± 0.005	[1,4.2]
82	1.73 ± 0.01	[1,4]

8. táblázat. Az egyenesillesztésből kapott *box counting* dimenzió értékek, illesztésből adódó hibákkal.

A fraktáldimenzió az attraktor eléréséig időben csökken, ami megfelel az elvárásainknak, hiszen a részecskeeloszlás időben „összehúzódik”.

3. A Lorenz-rendszer egy másik realizációja esetén megjelenő attrakor

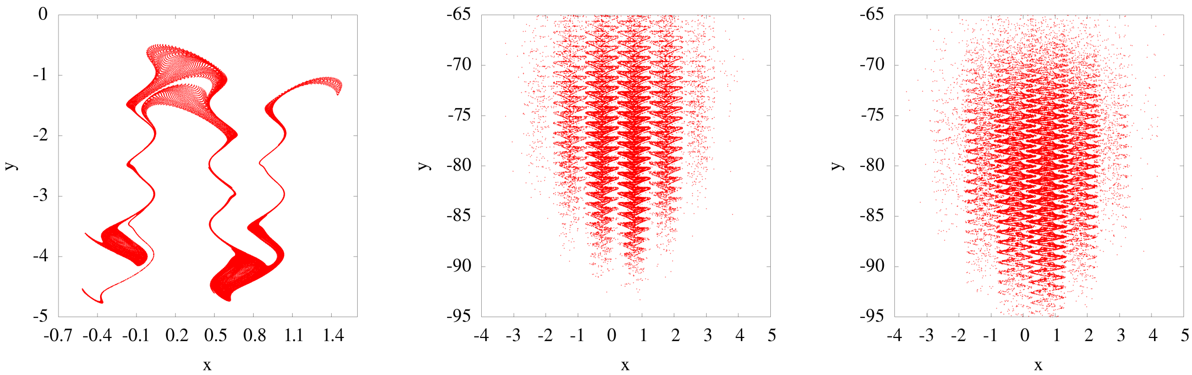
Ebben a fejezetben megvizsgáljuk, hogy más kezdőfeltételekkel realizált Lorenz-rendszer milyen eltérő szerkezetekhez vezet az attraktorban, illetve a részecskék statisztikájában milyen eltérések fedezhetőek fel.

Az alábbi táblázat mutatja az eltérő kezdeti feltételeket:

Változó	Kezdeti értéke
X	0.100001
Y	0.000001
Z	0

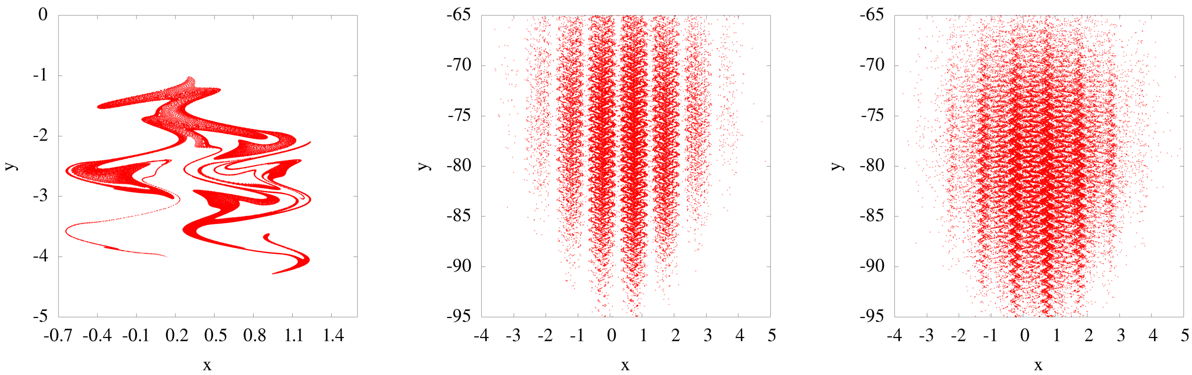
9. táblázat. A Lorenz-modell változóinak kezdeti értékei, a második realizáció esetén. Vegyük észre, hogy alig térünk el a modellrealizáció (2. táblázat) kezdeti feltételeitől.

Az alábbi ábrák a fraktálszerkezetet mutatják be a két különböző realizáció esetén, különböző időpontokban:



(a) t = 4 (b) t = 86 (c) t = 90

25. ábra. A fraktálszerkezet időfejlődése az (x, y) síkban a modellrealizáció esetén.

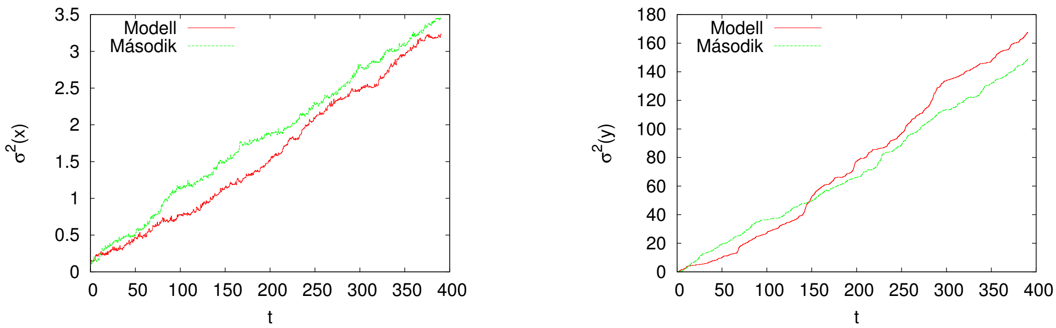


(a) t = 4 (b) t = 86 (c) t = 90

26. ábra. A fraktálszerkezet időfejlődése az (x, y) síkban a második realizáció esetén.

A részecskeeloszlás alakja a szimuláció kezdetén tér el a legjobban. A második realizáció esetén is megfigyelhetőek a korábban említett effektusok, a részecskék „összefogazódása” és oszlopokba rendeződése, de jól láthatóan ezen jelenségek más módon jelennek meg ebben az esetben. A fraktálok geometriája és a részecskék sűrűsége a fraktálon nagyon eltérő.

A szórásnégyzetek időfejlődése látható a két különböző realizáció esetén a további két ábrán:



27. ábra. A koordináták szórásnégyzeteinek az időfejlődése a két realizáció esetén.

A $\sigma^2(x)$ időfüggésében, mindkét realizáció esetén felfedezhető a függvényre „ráülő” kis fluktuáció, illetve a $\sigma^2(x)$ növekedésének kisebb megtorpanásai. A második realizáció esetén $\sigma^2(x)$ nem sokkal ugyan, de meredekebben növekszik, mint a modellrealizáció $\sigma^2(x)$ értékei.
A $\sigma^2(y)$ függvény szintén hasonló viselkedést mutat, mint a modellrealizáció $\sigma^2(x)$ függvénye. A második realizáció esetén $\sigma^2(y)$ először nagyobb értékeket vesz fel időben, mint a modellrealizáció esetén, majd kisebbeket. Kisebb „ugrások” figyelhetőek meg benne, és így egy lineárishoz közelibb jellegű növekedést mutat időben.
Az ábrák alapján azt mondhatjuk, hogy a két realizáció esetén kezdetben erősen, később kevésbé eltérő fraktálszerkezetek alakulnak ki, melyek szétterjedése hasonló, de nem ugyanolyan módon történik. Azt mondhatjuk tehát, hogy az eredmények jellege megegyezik, de a snapshot attraktor pontos időfejlődése erősen függ a gerjesztő függvény pontos alakjától.

4. Az eredmények összefoglalása

Esőcseppek mozgását tanulmányoztuk egy térben periodikus, keverő és nyíró tulajdonságú levegőáramlást leíró modellben. Az áramlást időben aperiodikusnak választottuk, és összehasonlítottuk az időben periodikus áramlás [7] esetével. Megvizsgáltuk a térbeli periodicitást periodikus határfeltétellel figyelembe vevő szimulációk során kialakuló fraktálszerkezeteket aperiodikus és periodikus gerjesztéssel is, és azt a következtetést vontuk le, hogy az aperiodikus esetben valóban egy időben változó, kaotikus jellegű attraktorral, egy *snapshot* attraktorral van dolgunk. Megállapítottuk, hogy különböző kezdeti feltételekkel indított trajektóriák egyazon *snapshot* attraktorhoz konvergálnak.

Ezután a periodikus határfeltétel elhagyásával végzett szimulációk eredményei kerültek bemutatásra, melyeknek elemzésével a részecskék térbeli szétterjedéséről kaptunk információkat. A részecskeeloszlás ábrái alapján azonosítottuk az eloszlást és magát az attraktort jellemző főbb vonásokat: az oszlopokat és az oszlopok „összefogazódását”, és a részecskék diffúzióját. Ezen jelenségek magyarázatát is megadtuk. Itt fontos észrevétel volt, hogy a részecskék kiterjedése y irányban 6-szor nagyobbnak mutatkozott mint x irányban.

A szimuláció során készült statisztikákat elemezve a következőket találtuk: A $\langle v_y \rangle$ értékek kezdetben exponenciálisan tartanak a $W = 0.8$ esési sebességértékhez, és a későbbi fűrészfog függvényre emlékeztető viselkedésük kapcsolatba hozható a gerjesztő függvény időfüggésével („váltásaival"). Mind aperiodikus, mind periodikus esetben a W nyugvó közegbeli esési sebességnél átlagosan gyorsabban esnek lefelé a részecskék, ám az aperiodikus és a periodikus esési sebesség értéke nem tér el nagyban egymástól. Összehasonlítva az aperiodikus és periodikus szimuláció koordináta-statisztikáit arra a megállapításra jutottunk, hogy a legnagyobb eltérések a két eset között a szórásnégyzetben mutatkoznak: ez az aperiodikus esetben háromszor olyan gyorsan növekszik, mint a periodikus esetben.

A szórásnégyzet viselkedése az aperiodikus esetben mind függőleges, mind vízszintes irányban diffúzióra utal. A szórásnégyzetek időfejlődéséből meghatározott diffúziós együtthatók azt mutatják, hogy a hosszútávú diffúziós együttható az y irányú kiterjedés vizsgálatakor (D_y) hozzávetőlegesen 56-szor nagyobbnak adódott, mint x irányú esetben (D_x).

Amikor az aperiodikus gerjesztés esetére koncentráltunk, a függőleges koordináta durvaskálájú hisztogramjainak a vizsgálata nyomán szintén azt a következtetést vontuk le, hogy függőleges irányban közel diffúzió játszódik le a részecskék süllyedése közben. Hasonlóan nyilatkoztunk a vízszintes irány durvaskálájú eloszlásáról. Korábbi megfigyelésinkkel összhangban itt megállapítottuk, hogy a diffúzió sokkal kisebb mértékű. A finomskálájú eloszlás felfedte a a részecskeeloszlás belső szerkezetét. Függőleges irányban felfedeztük, hogy a finomszerkezet hely és időfüggő és vízszintes irányban pedig felfedeztük a térbeli eloszlásban beazonosított oszlopokat és azok időbeli viselkedését.

A szórásnégyzetek időfejlődéséből meghatározott diffúziós együtthatók azt mutatják, hogy a hosszútávú diffúziós együttható az y irányú kiterjedés vizsgálatakor (D_y) hozzávetőlegesen 56-szor nagyobbnak adódott, mint x irányú esetben (D_x).

Meghatároztuk a fraktáldimenziót néhány pillanatban, hogy tájékozódjunk a fraktálalakzat szerkezetváltozásairól. Azt találtuk, hogy a fraktáldimenzió az attraktorra való ráhúzódásig időben csökken.

Általánosabban fogalmazva elmondhatjuk, hogy az aperiodikus gerjesztés mellett kialakuló *snapshot* attraktort vizsgáltuk a részecskék viselkedésén keresztül. Arra jutottunk, hogy ezen attraktor bizonyos tekintetben hasonlóan viselkedik, mint a periodikus gerjesztés mellett megjelenő „klasszikus" attraktor, de sok szempontból el is tér tőle. A legszembetűnőbb eltérés, hogy az attraktorra megérkező részecskék térbeli eloszlása által kirajzolt fraktálszerkezet minden időpillanatban más. A részecskék átlagsebességeinek és szórásnégyzeteinek statisztikáján jól látszott, hogy aperiodikus esetben nagyobb fluktuációkkal terheltek (pl. $\langle v_y \rangle$ és $\sigma^2(y)$), mint periodikus esetben. Ez arra enged következtetni, hogy az aperiodikus gerjesztés esete egy reálisabb közelítése a valóságnak, hiszen a valós, természetben lejátszódó folyamatokban is általában fluktuációkkal terhelt statisztikák jelentkeznek.

5. A modell határai és a kutatás folytatása

Mint minden modellnek, a mi modellünknek is megvannak a határai. A modellben a közegellenállási erőt a Stokes-törvénnyel vettük figyelembe, mely csak lamináris áramlás esetén igaz és elhanyagoltuk a részecskék közötti kölcsönhatást. A „természetesebbnek” mutatkozó, fluktuációkat mutató eredmények alapján azonban azt mondhatjuk, hogy ez a modell közelebb áll a valósághoz, mint elődje. Ezen felül alkalmasnak bizonyult új, potenciálisan a felhőkben is megnyilvánuló alapjelenségek kimutatására. Habár a mi modellünkben a nyugvó közegben mérhetőnél nagyobb átlagos süllyedési sebesség nem kapcsolódik a gerjesztés aperiodicitásához, ez a jelenség egy fontos vonása a valóságos, turbulens áramlásoknak [13, 14, 15]. Ebben a turbulens jelenségben fontos szerepet tölthet be az, hogy a vízszintes irányú mozgás más jellegű, mint a függőleges irányú [15]. A két irány közötti jelentős eltérés nálunk is megjelenik a diffúziós együtthatóban.

A fentiek alapján van értelme a vizsgálat folytatásának. Mindenképpen fel kell deríteni részletesen az irányfüggő diffúzió jelenségét. A káoszelméleti fogalmak közül még nem vizsgáltuk meg a Ljupanov-exponens [5] értékét, aperiodikus és periodikus esetben, illetve a Lorenz-modell egy másik realizációjában. A *box counting* dimenziót is érdemes lehet kiszámítani több időpillanatban, hogy időbeli változását jobban lássuk.

A továbbiakban érdemes lehet megalkotni egy olyan algoritmust, mely helyesen találja el a binhatárokat az x-eloszlás tekintetében, illetve tovább vizsgálni az y-eloszlás finomszerkezetének helyfüggését.

A valóságnak még jobb közelítése lenne, hogyha a részecskék közötti kölcsönhatást is figyelembe vennénk. Egy ilyen modell akár már biztos meteorológiai állítások megfogalmazására is alkalmas lehet.

6. Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Drótos Gábornak, a dolgozat megírásában nyújtott segítséget és azt a sok időt amit rám szánt. Az ő útmutatása és biztatása nagyon hasznosnak bizonyult a szimulációk kivitelezése, interpretációja és a dolgozat megírása közben. Köszönettel tartozom továbbá Tél Tamásnak aki hasznos tanácsokkal látott el minket.

Hivatkozások

[1] Geresdi István: Felhőfizika. Dialóg Campus Kiadó, Budapest-Pécs, 2004.

[2] T. F. Stocker, D. Qin, G.-K. Plattner, M. Tignor, S. K. Allen, J. Boschung, A. Nauels, Y. Xia, V. Bex, P.M. Midgley (szerk.): Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA, 2013.

[3] Gábor Drótos, Tél Tamás:
Chaotic saddles in a gravitational field: The case of inertial particles in finite domains.
Physical Review E 83, 056203 (2011).

[4] E. Ott: Chaos in Dynamical Systems. Cambridge University Press, Cambridge, 1993, 2002.

[5] Tél Tamás, Gruiz Márton: Kaotikus dinamika. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.

[6] S. P. Malinowski, I. Zawadski: J. Atm. Sci. 50, 5 (1993). On the Surface of Clouds

[7] Rafael D. Vilela, Tél Tamás, Alessandro P. S. de Moura, Celso Grebogi:
Signatures of fractal clustering of aerosols advected under gravity.
Physical Review E 75, 065203(R) (2007).

[8] R. T. Pierrehumbert: Tracer microstructure in the large-eddy dominated regime. Chaos, Soliton, Fractals 4, 1091 (1994).

[9] E. N. Lorenz: Deterministic Nonperiodic Flow. J. Atmos. Sci. 20, 130–141 (1963).

[10] F. J. Romeiras, C. Grebogi, E. Ott: Multifractal properties of snapshot attractors of random maps. Phys. Rev. A 41, 784 (1990).

[11] W. H. Press et al: Numerical Recipes. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[12] L. E. Reichl: A Modern Course in Statistical Physics. Wiley-VCH, Weinheim, 2009.

[13] M. Maxey: The motion of small spherical particles in a cellular flow field . Physics of Fluids 30, 1915 (1987).

[14] M. Maxey: The gravitational settling of aerosol particles in homogeneous turbulence and random flow fields. J. Fluid Mech. 174, 441–465 (1987).

[15] J. Bec, H. Homann, Samriddhi Sankar Ray: Gravity-Driven Enhancement of Heavy Particle Clustering in Turbulent Flow. Phys. Rev. Lett. 112, 184501 (2014).

NYILATKOZAT

Név: Bozsó István
ELTE Természettudományi Kar, szak: Fizika BSc., geofizikus szakirány
NEPTUN azonosító: J9HJKX
Szakdolgozat címe:
Felhőben mozgó esőcseppek vizsgálata snapshot attraktor segítségével

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2015. május 28.

a hallgató aláírása