Inga

Szőke Kálmán Benjamin SZKRADT.ELTE

2012. május 18.

1. Bevezetés

A jegyzőkönyv célja a matematikai és fizikai inga szimulációja volt. A program forráskódját a labor honlapjáról lehetett elérni, és ezt módosítottam a feladatokhoz. Több feladaton keresztűl a modell viselkedésének tanulmányozása volt a cél. A kitérés-idő, sebesség-idő diagrammot, fázisteret, energiamegmaradást valamint az Euler, Euler-Cramer és adaptív Runge-Kutta differencálegyenlet megoldó algoritmusokat vizsgáltam.

2. Elméleti leírás

A matematikai ingát a következő differencálegyenlettel írhatjuk le:

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\Theta$$

Θ a kitérés, g a gravitációs gyorsulás, l pedig az inga hossza.

Csillapitással a következő differenciálegyenlet adódik:

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\Theta - q\frac{d\Theta}{dt}$$

Itt a q a közegellenállási állandó.

Szinuszos gerjesztő erővel:

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\Theta - q\frac{d\Theta}{dt} + F_D \sin(\omega_D t)$$

ahol F_D a gerjesztés amplitudója, ω_D az erő körfrekvenciája.

A fizikai ingánál a differenciálegyenletben, $sin(\Theta) = \Theta$ közelítést nem használunk mivel a kitérések nagyok is lehetnek. $\Theta << 1$

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin(\Theta) - q\frac{d\Theta}{dt} + F_D \sin(\omega_D t)$$

Az implementációt a honlapról letölthetö kód segítségével valósítottam meg.

2.1. A program bemeneti paraméterei

```
cout << " Enter linear or nonlinear: ";
cin >> response;
nonlinear = (response[0] == 'n');
cout<< " Length of pendulum L: ";
cin >> L;
cout<< " Enter damping coefficient q: ";
cin >> q;
cout << " Enter driving frequencey Omega_D: ";
cin >> Omega_D;
cout << " Enter driving amplitude F_D: ";
cin >> F_D;
cout << " Enter theta(0) and omega(0): ";
cin >> theta >> omega;
cout << " Enter integration time t_max: ";
cin >> tMax;
cout << " Enter steps of time dt: ";
cin >> dt;
```

2.2. A program kimeneti paraméterei fájlba

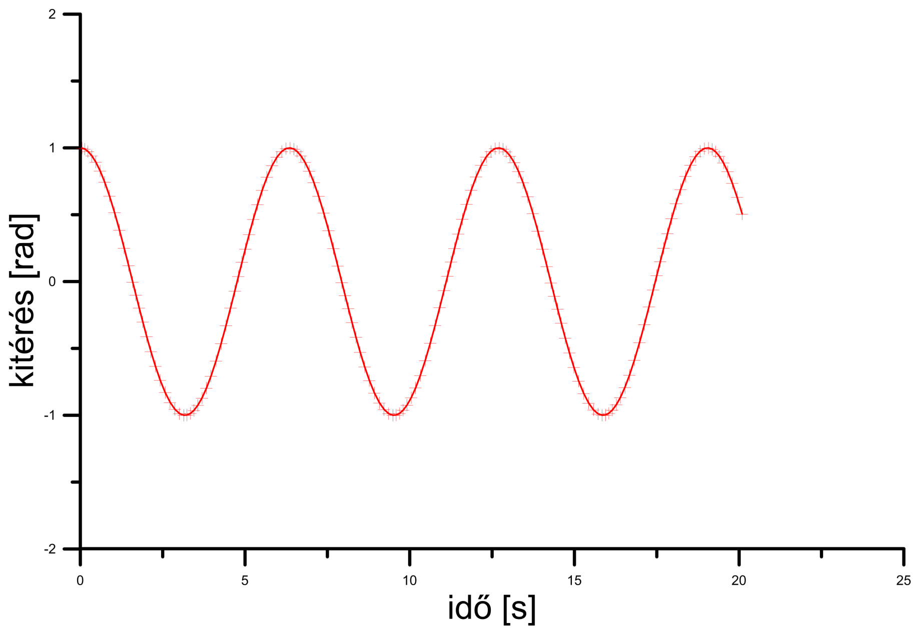
```
dataFile << t << '\t' << theta << '\t' << omega << '\t' << energy(theta, omega) << '\n';
```

3. Eredmények

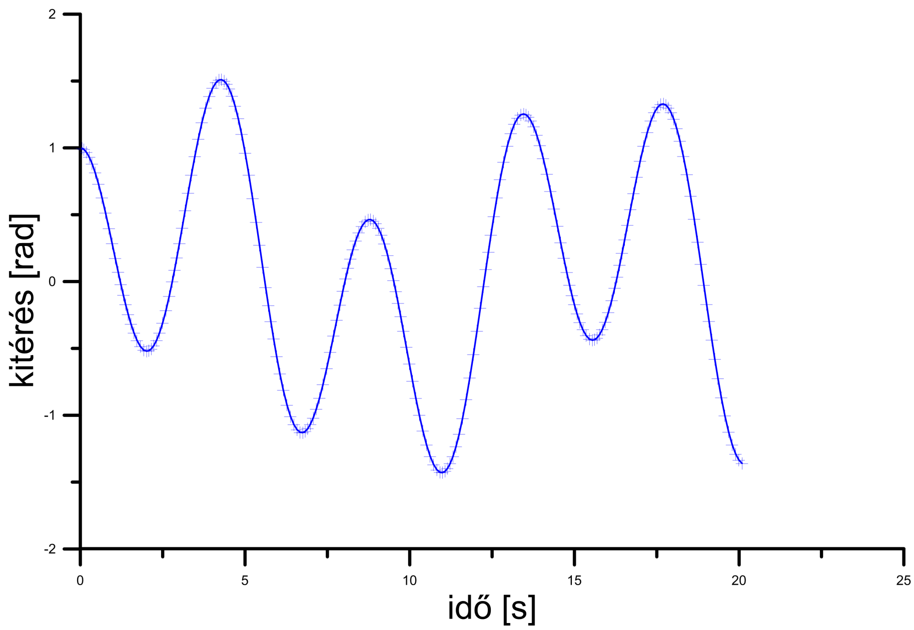
3.1. Kitérés, Szögsebesség, Energia

Az egyszerű matematikai inga vizsgálata során láthatjuk, hogy a gerjesztő és a csillapító erő nélkül a kitérés és a szögsebesség állandó amplitúdójú és köztük kis fázisskülönbség van. Figyelemre méltó az energia szép konstans értéke. A csillapított esetben megigyelhető az értékeken, ahogy a surlódás miatt folyamatosan csökkennek, a maximumokra közelítőleg egy exponenciális görbét illeszthetünk. Gerjesztés esetén a kitérés és a szégsebesség burkolója, valamint az energia is periódikusan változik. A fizikai inga, amely minden tagot figyelembe vesz, az összes többi eset tulajdonságait tartalmazza, egyszerre figyelhetjük meg az exponenciális csökkenést és a periódikusságot, idővel megtörik a szabályosság, a megoldás labilissá válik.

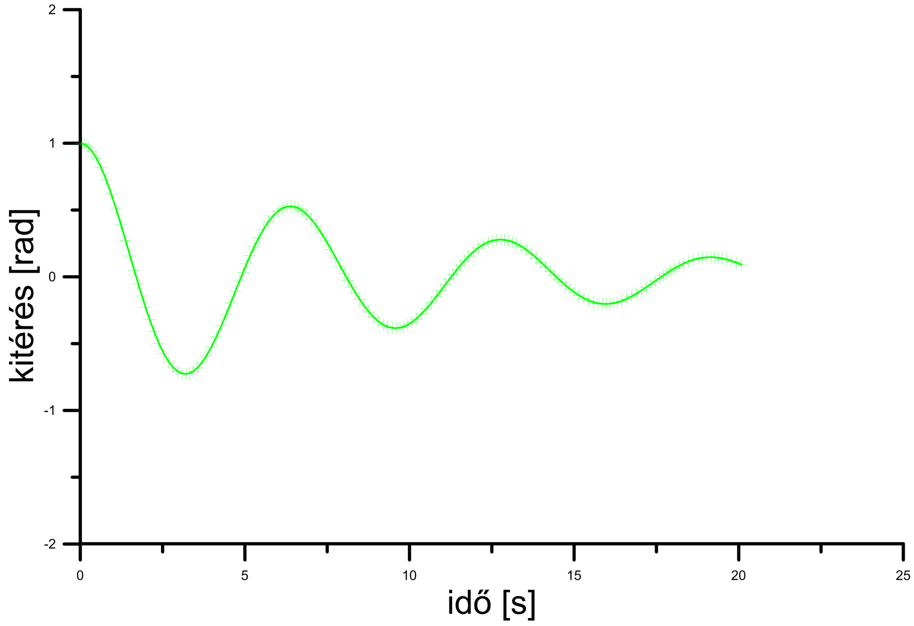
```
Enter linear or nonlinear: linear/nonlinear
Length of pendulum L: 10/5
Enter damping coefficient q: 0.2/0.2
Enter driving frequencey Omega_D: 0.5/0.5
Enter driving amplitude F_D: 1/1
Enter theta(0) and omega(0): 0.08/1 0/0
Enter integration time t_max: 20/20
Enter steps of time dt: 0.05/0.05
```



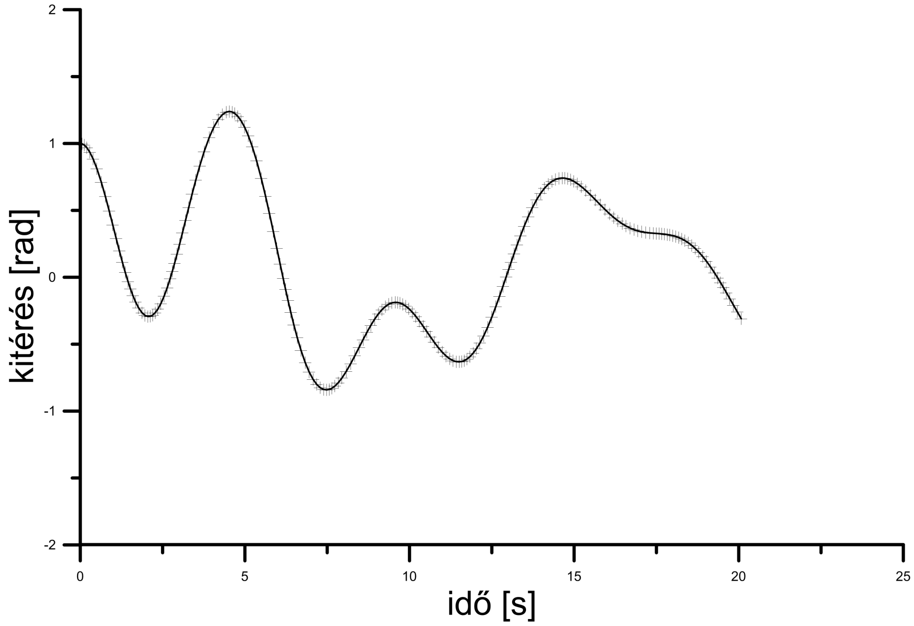
1. ábra. Kitérés-idő diagramm sima matematikai inga



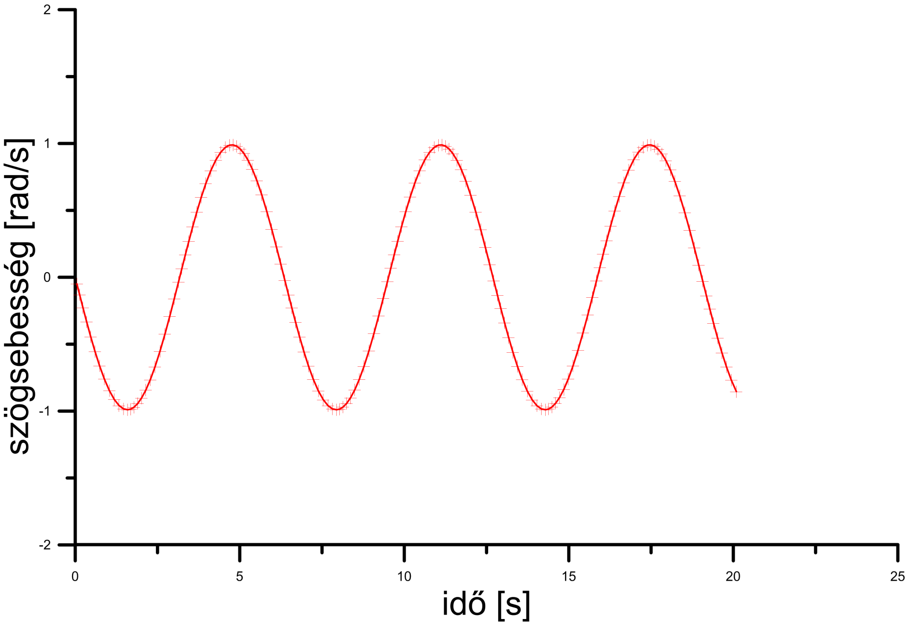
2. ábra. Kitérés-idő diagramm matematikai gerjesztett inga



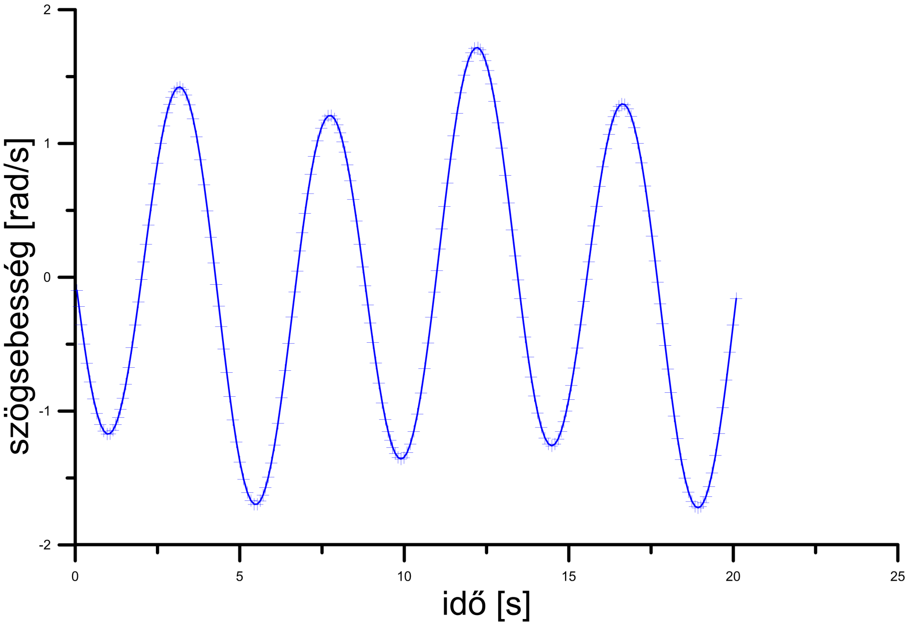
3. ábra. Kitérés-idő diagramm csillapított inga



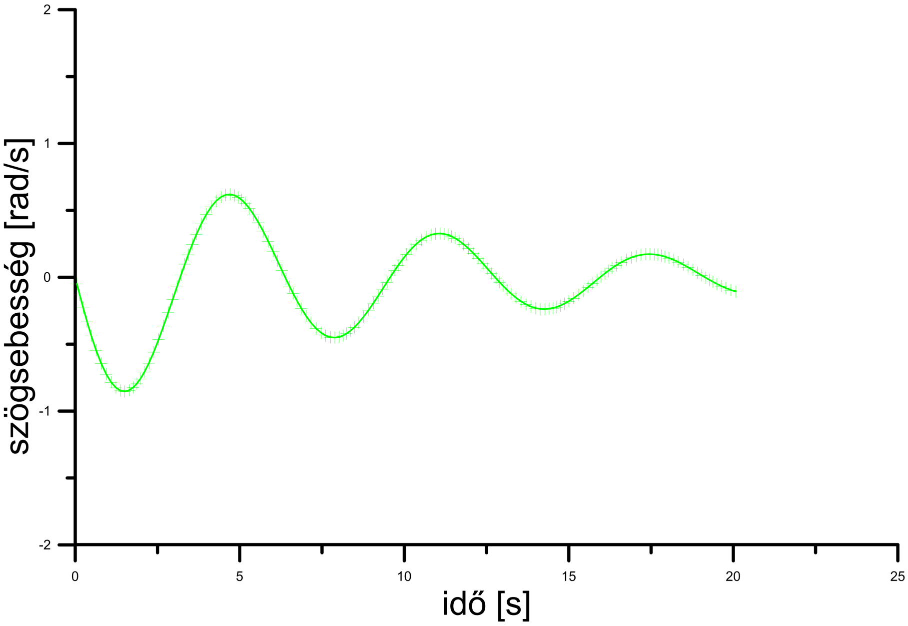
4. ábra. Kitérés-idő diagramm fizikai inga



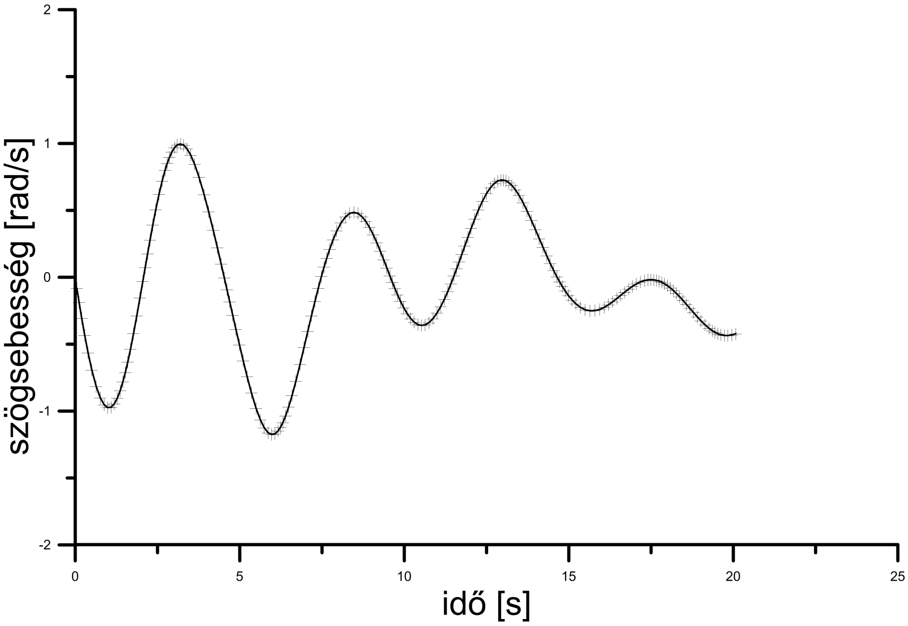
5. ábra. A Sebesség-idő diagramm matematikai inga



6. ábra. A Sebesség-idő diagramm matematikai gerjesztett inga



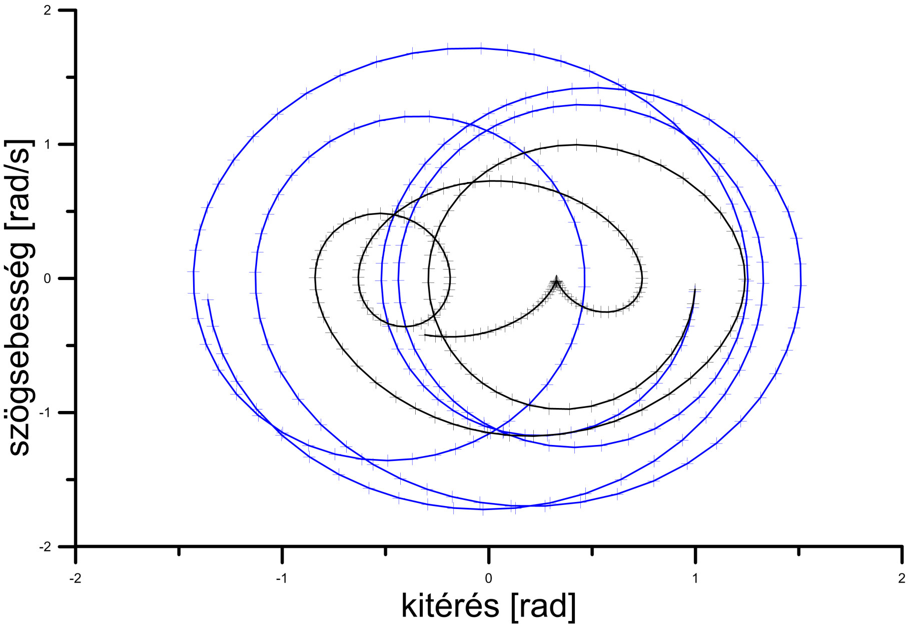
7. ábra. A Sebesség-idő diagramm csillapított inga



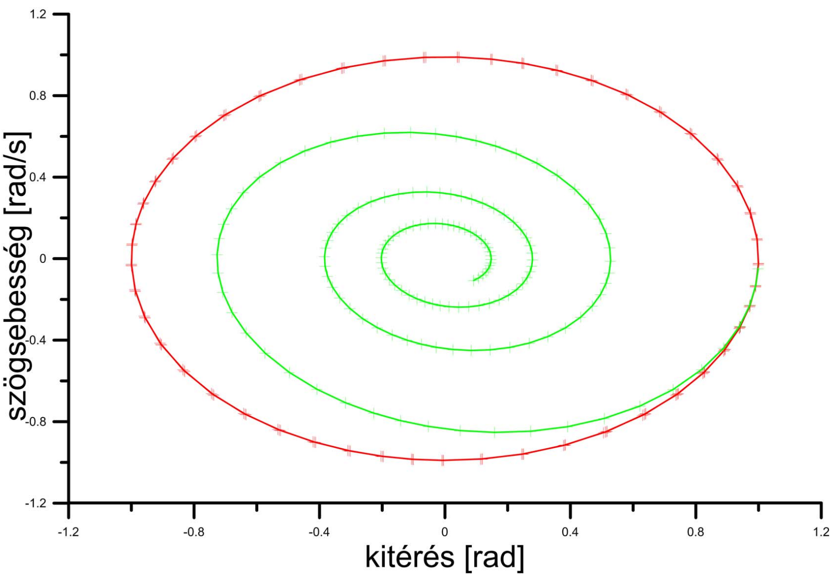
8. ábra. A Sebesség-idő diagramm fizikai inga

3.2. Fázistér, kitérés-sebesség diagramm

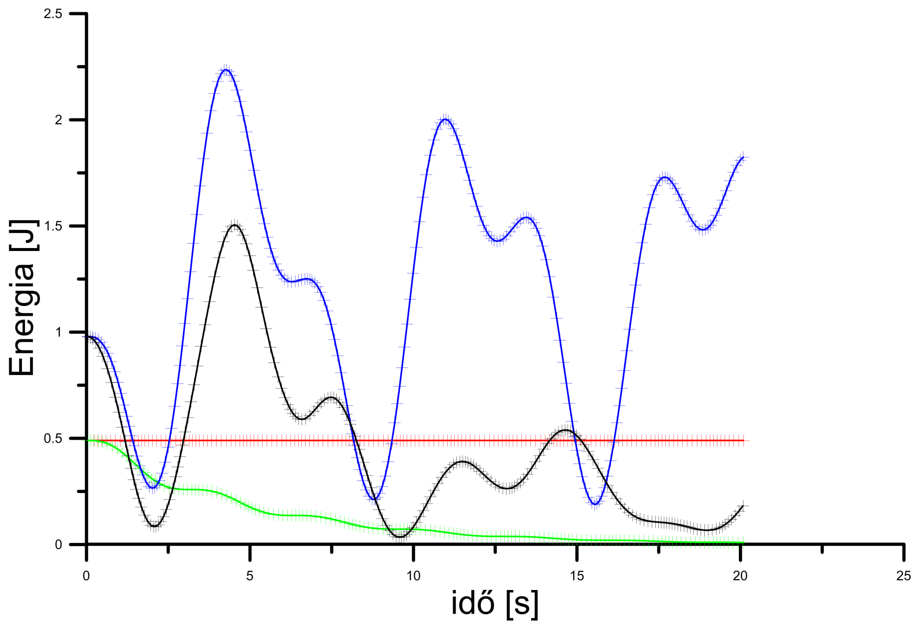
A fázistéren a matematikai inga esetén megkapjuk a várt ellipszist, melynek tengelyei a koordinátatengelyekkel párhuzamosak. A csillapítással a trajektórián látszik, ahogy bespirállozódik, gerjesztett esetben kellően sok ideig várva megfigyelhetnénk, hogy a görbe önmagába zárul. Ahogy az összes többi értéken is látjuk itt is összesítődnek a fizikai ingában az előző két eset tulajdonságai, és hogy az idő múlásával a megoldás destabilizálódik.



9. ábra. A kitérés-sebesség diagramm fizikai inga (kék) gerjesztett matematikai inga (fekete)



10. ábra. A kitérés-sebesség diagramm sima matematikai (piros) csillaított (zöld) inga



11. ábra. Energia-idő függvénye, matematikai gejesztett (kék), sima (piros), csillapított (zöld), fizikai inga (fekete)

3.3. Differenciálegyenlet megoldó módszerek összehasonlítása

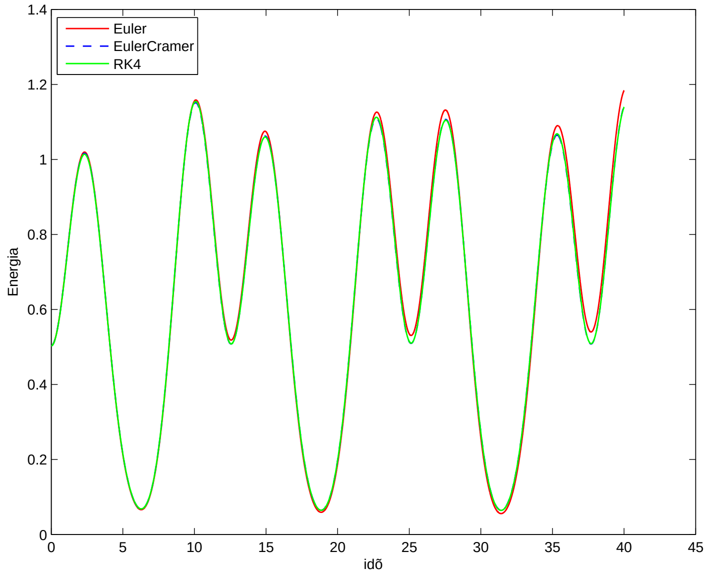
Az Euler, Euler-Cramer és Runge-Kutta módszerek vizsgálatára legmegfelelőbb az energia nyomonkövetése.

3.3.1. Euler-Cramer algoritmus

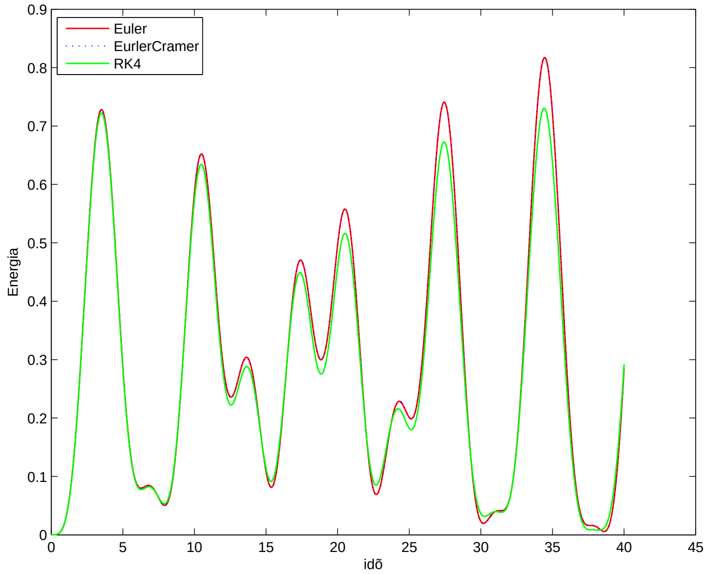
```
void EulerCramer (long double theta, long double omega, long double tMax, long double dt)
{
    ofstream dataFile("EulerCramer_inga.dat");
    long double x = theta;
    long double v = omega;
    long double t = 0;
    long double E;
    while(t < tMax)
    {
v += f(x,t) * dt;
        x += v * dt;
        E = energy(x,v);
        t += dt;
        dataFile << t << "\t" << x << "\t" << v << "\t" << E << endl;
    }
    dataFile.close();
}
```

3.3.2. Euler algoritmus

```
void Euler (long double theta, long double omega, long double tMax, long double dt)
{
    ofstream dataFile("Euler_inga.dat");
    long double x = theta;
    long double v = omega;
    long double t = 0;
    long double E;
long double xn;
    while(t < tMax)
    {
xn=x;
        x += v * dt;
        v += f(xn,t) * dt;
        E = energy(x,v);
        t += dt;
        dataFile << t << "\t" << x << "\t" << v << "\t" << E << endl;
    }
    dataFile.close();
}
```



12. ábra. Matematikai inga



13. ábra. Fizikai inga

Tartalomjegyzék

Hivatkozások

[1] Jegyzet
http://complex.elte.hu/∼csabai/szamszim/

[2] C++ forráskód
http://complex.elte.hu/∼csabai/szamszim/code/sz2009/osc/pendulum.cpp