1. jegyzőkönyv: Harmonikus oszcillátor

Harangozó Szilveszter Miklós, HASPABT.ELTE

2010. március 5.

1. Bevezetés

Első feladatunk a harmonikus oszcillátor modellezése. A program forráskódját a honlapon [1] elérhető állományból használtam fel. Cél a modell viselkedésének tanulmányozása volt, melynek során az idő-kitérés és a sebesség-gyorsulás között fennáló kapcsolat került részletes elemzésre. Továbbiakban megfigyeljük az energiamegmaradást, valamint a program futási idejét.

2. Elméleti háttér és megvalósítás

A probléma megoldását harmonikus oszcillátor mozgásegyenletének felírásával kezdjük meg:

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x \tag{1}$$

Ez az egyenlet analatikusan integrálható, megoldása a következő:

$$x(t) = x_0 cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} sin(\omega t) \tag{2}$$

Ám ez a formula nem numerikus megoldást kínál a problémára, ezért a másodredű differenciálegyenletünket felbontjuk két csatolt elsőrendű differenciálegyenletre, amiket az Euler-Cromer algoritmus segítségével írunk fel és így implementáljuk a számítógépbe:

$$\frac{dx}{dt} = v \tag{3}$$

$$\frac{dv}{dt} = \omega^2 x = a \tag{4}$$

$$v(t+dt) = v(t) + a(t)dt, \tag{5}$$

$$x(t+dt) = x(t) + v(t)dt \tag{6}$$

Az energiát a következőképp számoljuk:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{7}$$

A modellező programunk először bekéri a kezdeti adatokat (körfrekvenicia, kezdeti kitérés és sebesség, méréshossz, időegység per periódus), valamint a kimeneti fájl nevét. Később ebbe tárolja a program a megadott szintaktika szerint, az egyenlet léptetése során kapott hely és sebesség, valamint az energia értékeket.

Programon a változtatás a fájlba való kiiratásnál: tabulátorral elválasztva a negyedik oszlop az energiaértékek.

```
file << t << '\t' << x << '\t' << v << '\t' << energy() << '\n';
```

3. Eredmények

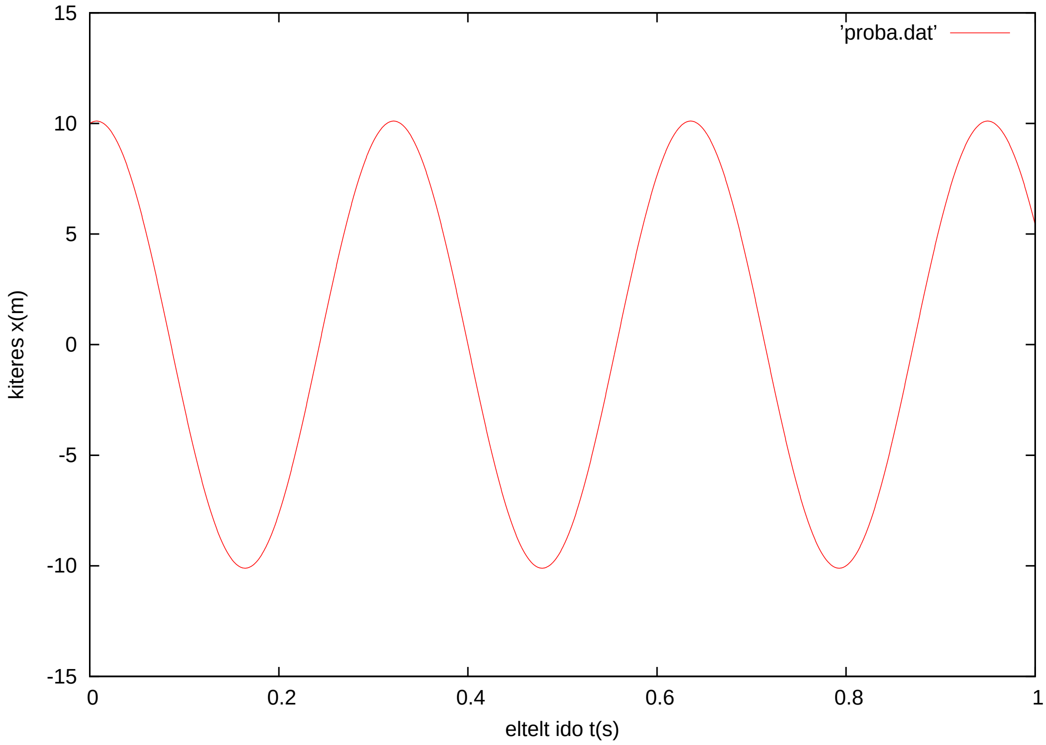
3.1. Kitérés-idő diagramm

A feladatot a kimeneti fájl első két oszlop adatainak kiplotolásával oldhatjuk meg. Megfelelő ábrázolás után látható, hogy tetszőleges kezdőfeltétel mellett indítva mindig hasonló, periodikus, szinuszos görbét kapunk. Bármely esetben a különbség csak a görbe amplitudóján, fázis és frekvenciaértékeiben jelentkezik, ami várható volt a speciális körülmények miatt. Az (1). ábrán csupán az első pár periódust ábrázolva sokkalta áttekinthetőbb az eredmény. $\omega = 20, x = 10, v = 30$

3.2. A kitérés-sebesség diagramm

A kimeneti fájl második két oszlopát kiplotolva megkapjuk a fázisteret. Korábbi tanulmányaink szerint egy ellipszist kell kapnunk, melynek főtengelyei a koordinátarendszer tengelyeivel párhuzamosak:

Egy pár különböző paraméterű próbálkozás után azonban kiderül, hogy ha a periódusonkénti mintavételt csökkentjük, akkor a tengelyek elcsúsznak a megfelelő irányból. Ez a (2). ábrán szemléltethető úgy, hogy különböző mintavételezéssel valósítjuk meg ugyanazt az esetet (látható, hogy kisebb mintavételezés esetén a fázistér görbe már nem egy folytonos ellipszis, hanem egy bonyolultab Lissajous-görbe lesz):

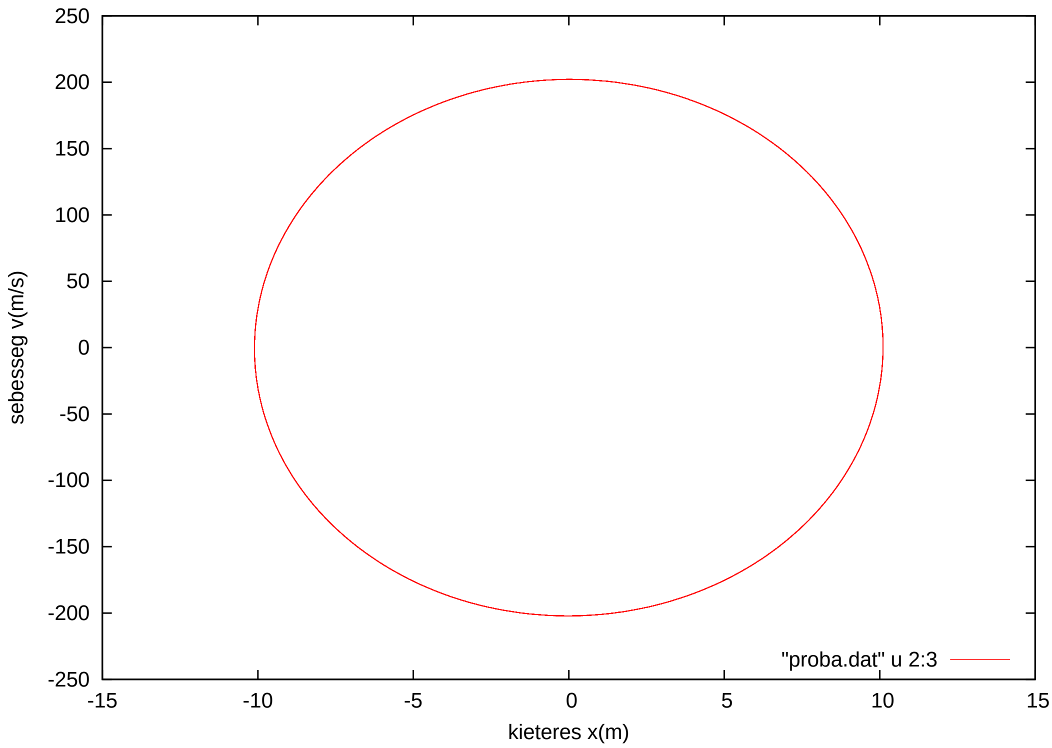


1. ábra. Kitérés-idő függvény

3.3. Energiamegmaradás

A programot emiatt módosítottam, hogy az aktuális energiaértékeket is kiírja a kimeneti fájlba. Megfigyelhető a (4). ábrán, hogy ha az energiát alacsony mintavételi frekvencia esetén vizsgáljuk, vagyis relatív magas dt mellett figyeljük, akkor ingadozik. Azonban ha a köztes időket csökkentjük az energia egy konstans függvényhez tart, teljesül az energiamegmaradás.

Vizsgáljuk meg az energia alakulását ha más algoritmust használunk a kiszámításához. A sima Euler algoritmus csupán annyiban különbözik az Euler-Cromertől, hogy az új hely kiszámításához a $v(t+dt)dt$ értéket veszi figyelembe a $v(t)dt$ helyett. A két algoritmusnál különbözik az energia. Míg az Euler-Cramernél oszcillál, addíg az Eulernél exponenciálisan növekszik (ahol a jobb láthatóság érdekében a függőleges tengelyt logaritmuikusan skálázzuk).



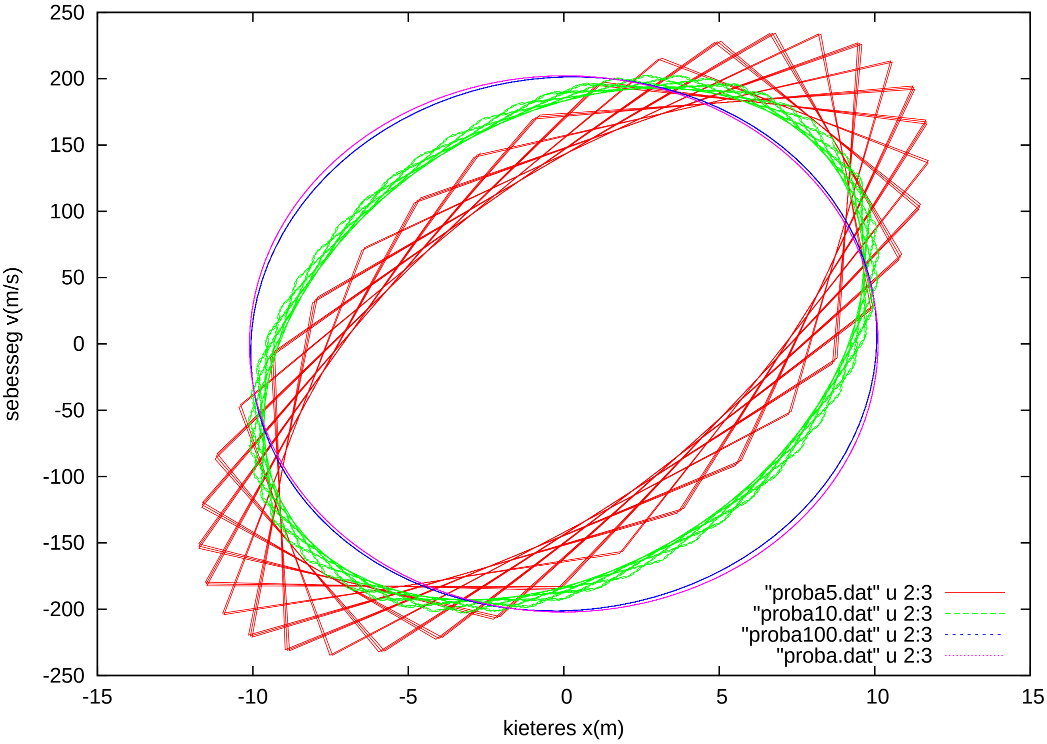
2. ábra. Kitérés-sebesség függvény, vagyis a fázistér

3.4. Futási idő

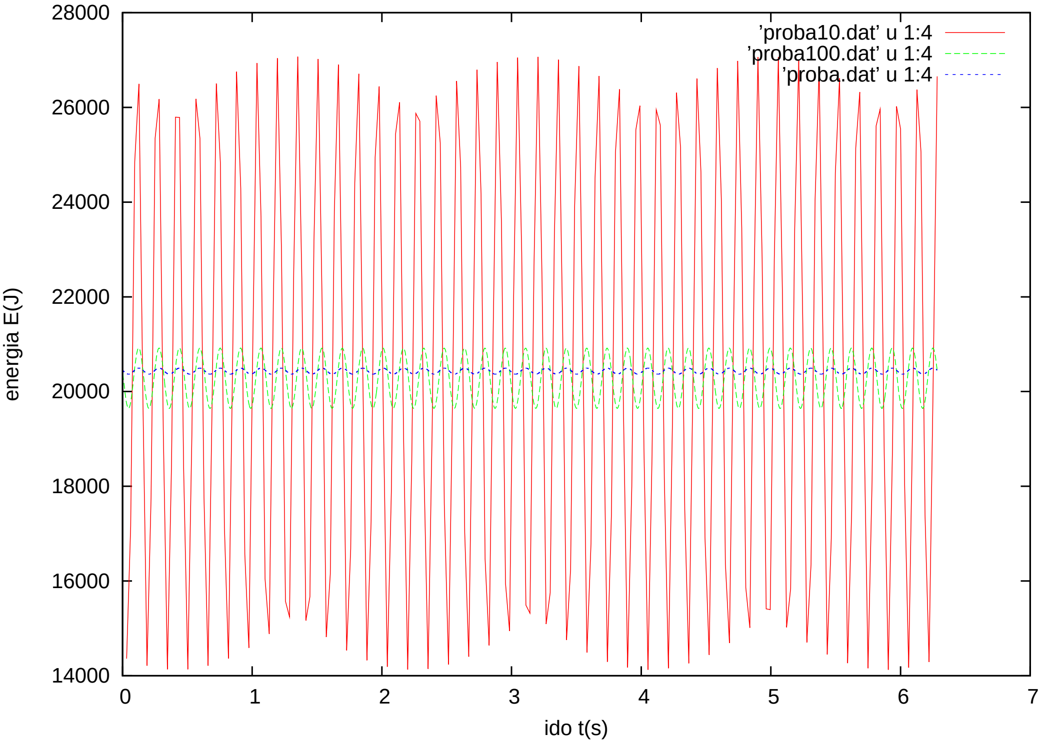
A program futási idejének méréséhez a számoló függvény köré építhetünk a kódban egy mérőt, amely a rendszer felbontását növelve (100000 és 10000000 között) rögzíti a rendszeridőket és annak különbségeiből számítja a mérendő értékeket. A (5) ábrán látszik, hogy a felbontással lineárisan nőtt a számításhoz szükséges idő.

Hivatkozások

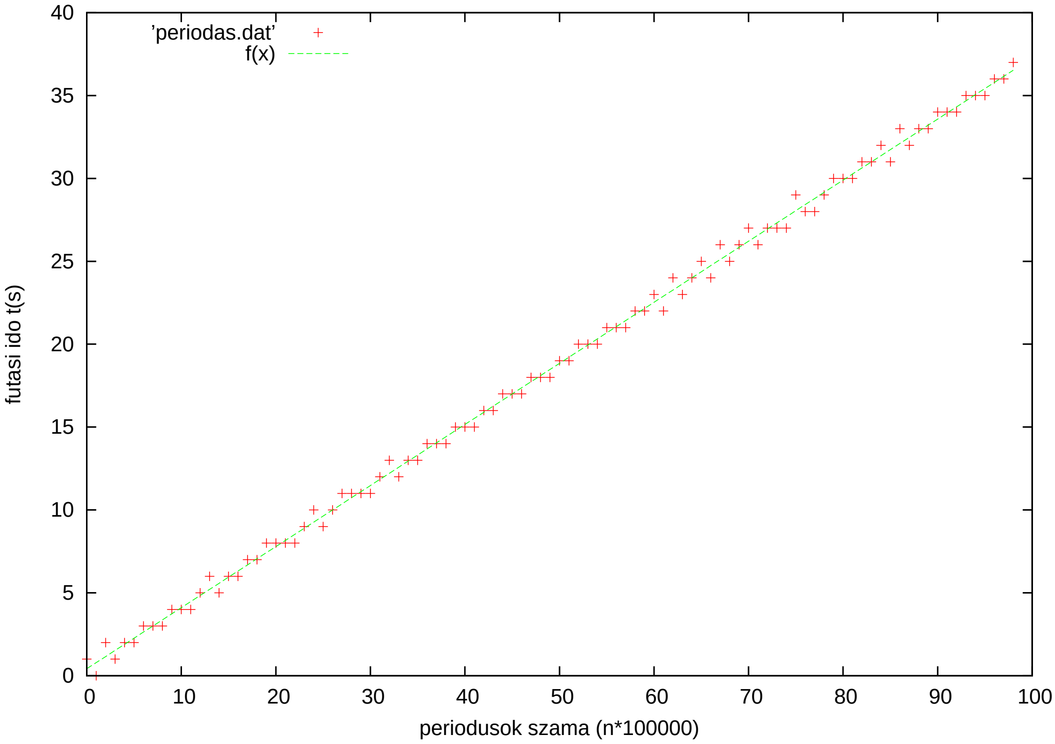
[1] http://complex.elte.hu/ csabai/szamszim/



3. ábra. A fázistér különböző mintavételezési frekvenciával: 5,10,100 és 1000 ponttal egy periódusban



4. ábra. A rendszer energiája a rendszeridő függvényében



5. ábra. Futási idő a felbontás függvényében