2. jegyzőkönyv: Az inga

Harangozó Szilveszter Miklós, HASPABT.ELTE

2010. március 12.

1. Bevezetés

Ebben a jegyzőkönyvben az egyszerű ingát és annak eseteit vizsgáljuk. Bemutatjuk a matematikai, majd a csillapító és gerjesztő tagokkal bővített inga szimulációinak eredményeit. Az egyes értékek változását megvizsgáljuk Euler, Euer-Cromer és adaptív Runge-Kutta differencálegyenlet-implementáció segítségével is.

2. Módszer

A matematikai ingát a következő egyenlet segítségével írhatjuk le:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta. \tag{1}$$

ahol θ a kitérés, g gravitációs gyorsulás és l az inga hossza.

Csillapítással:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta - q\frac{d\theta}{dt}. \tag{2}$$

ahol q a légellenállási/súrlódási állandó.

Szinuszos gerjesztő erővel:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta - q\frac{d\theta}{dt} + F_D sin(\omega_D t). \tag{3}$$

ahol F_D a gerjesztés amplitudója, ω_D az erő körfrekvenciája.

A fizikai inga, melyben eltérés, hogy nem alkalmazzuk a $sin(x) = x, x << 1$ közelítést, így megengedhetjük a nagyobb kitéréseket is:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}sin(\theta) - q\frac{d\theta}{dt} + F_D sin(\omega_D t). \tag{4}$$

3. Megvalósítás

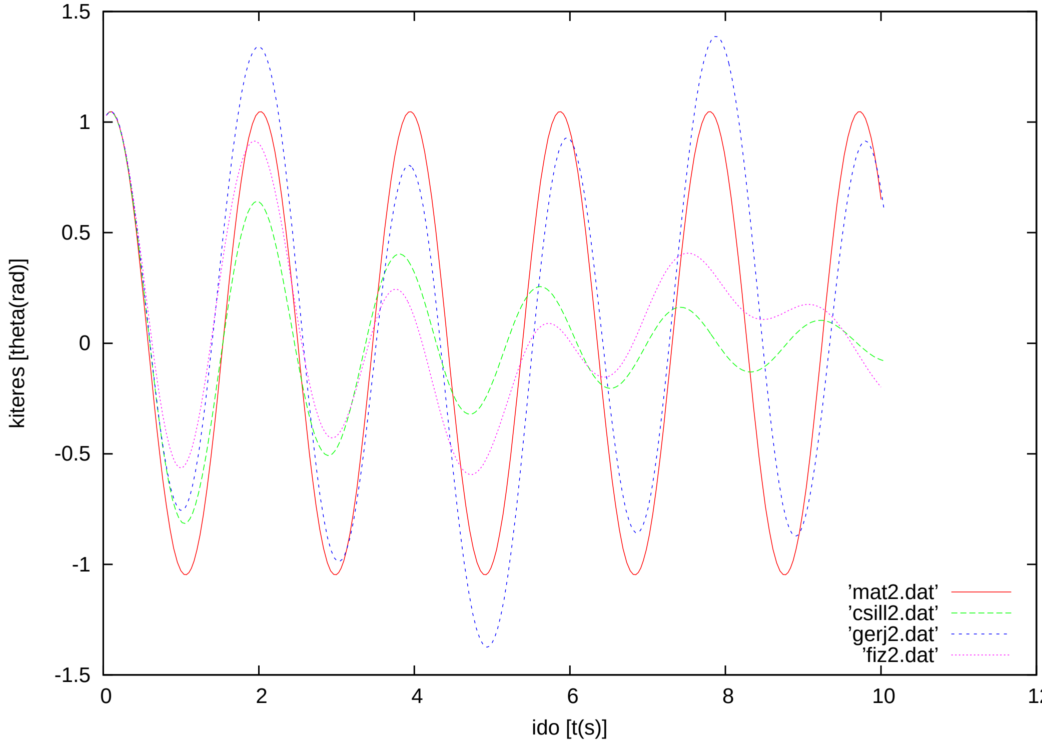
Az implementációt ahonlapról letölthető kód segítségével valósíthatjuk meg. Néhány változtatás után a programunk a kimeneti fájl negyedik oszlopába elmenti az aktuális energiát, és még két file-t készít amikbe a program eredeti működéséhez hasonlóan tárolja a másik két módszer eredményeit. A futás során kétszer hívjuk meg az alábbi függvényt annyi különbséggel, hogy az Euler módszer használatakor az X és a V értékeket fordított sorrendben frissítjük.

```
vector<vector<double>> EulerCromer (double theta, double omega, double tMax, double dt) {
double X = theta;
double V = omega;
vector<double> Eredmeny;
vector<vector<double>> Kiirando;
Eredmeny.clear();
double T = 0;
while(T < tMax){
Eredmeny.clear();
double A = -X*(g/L)-q*V+F_D*sin(Omega_D*T);
    V += A * dt;
    X += V * dt;
T += dt;
Eredmeny.push_back(T);
Eredmeny.push_back(X);
Eredmeny.push_back(V);
Eredmeny.push_back(energy(X,V));
Kiirando.push_back(Eredmeny);
}
return Kiirando;
}
```

4. Eredmények

4.1. Kitérés, Szögsebesség, Energia

Az egyszerű matematikai inga vizsgálata során láthatjuk, hogy a gerjesztő és a csillapító erő nélkül a kitérés és a szögsebesség állandó amplitúdójú és köztük kis fázisskülönbség van. Figyelemre méltó az energia szép konstans értéke. A csillapított esetben megfigyelhető az értékeken, ahogy a súrlódás miatt folyamatosan csökkennek, a maximumokra közelítőleg egy exponenciális görbét illeszthetünk. Gerjesztés esetén a kitérés és a szögsebesség burkolója, valamint az energia is periódikusan változik. A fizikai inga, amely minden tagot figyelembe vesz, az összes többi eset tulajdonságait tartalmazza, egyszerre figyelhetjük meg



1. ábra. Kitérés-idő függvény

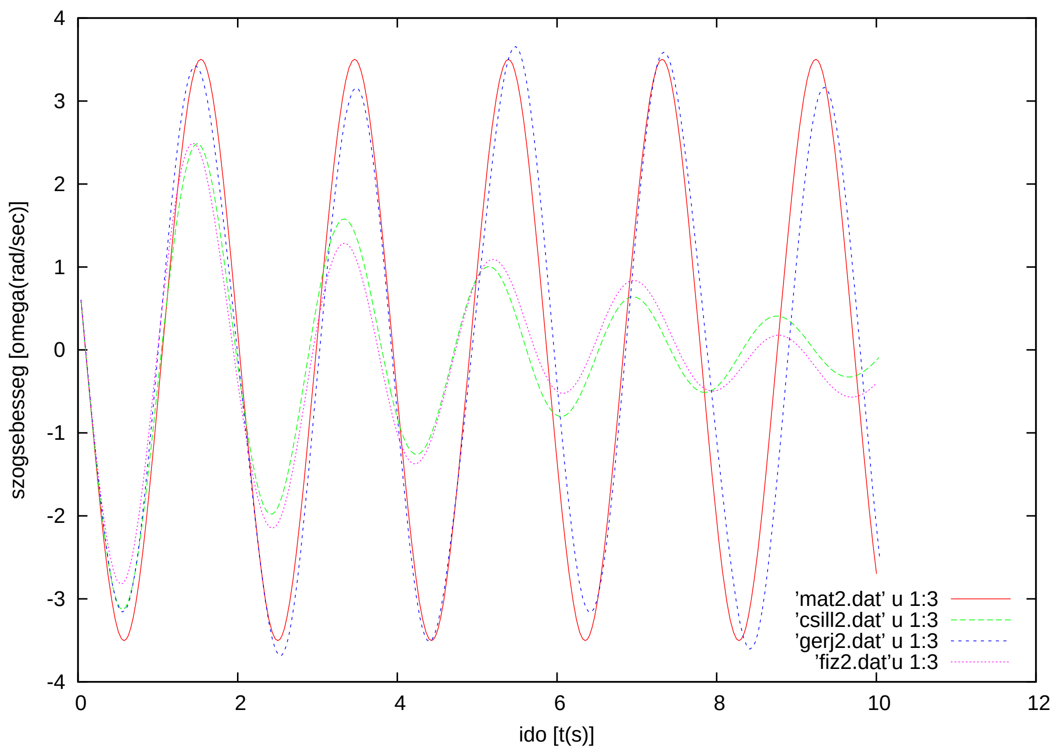
az exponenciális csökkenést és a periódikusságot, idővel megtörik a szabályosság, a megoldás labilissá válik.

4.2. Fázistér

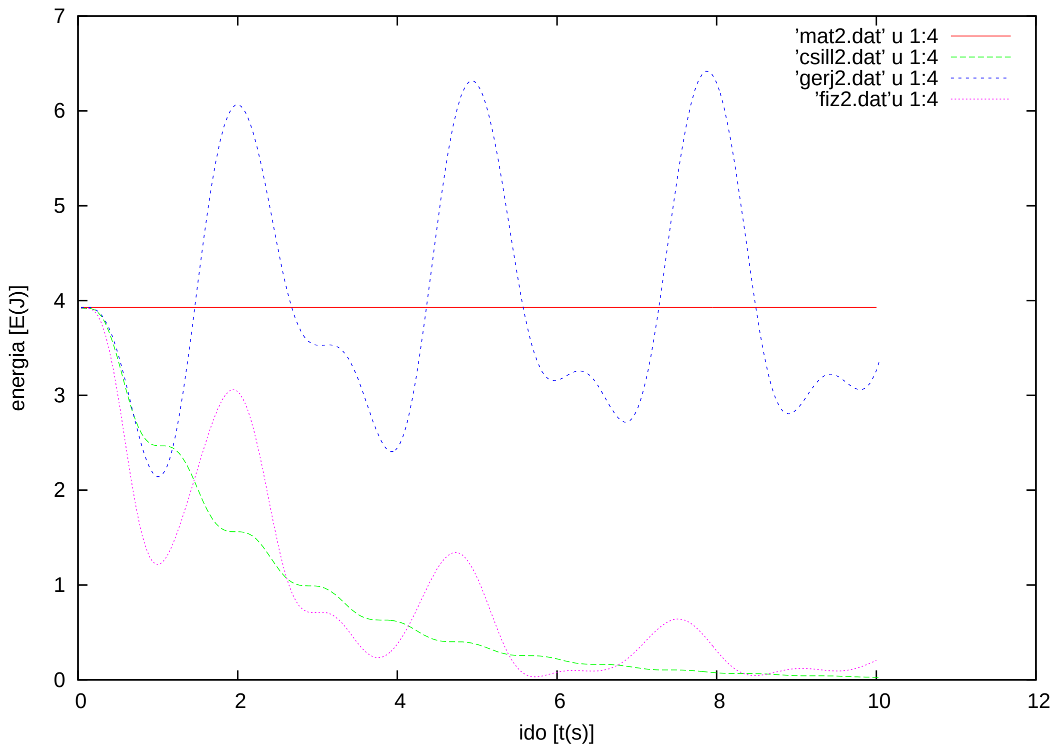
A fázistéren (4) a matematikai inga esetén megkapjuk a várt ellipszist, melynek tengelyei a koordinátatengelyekkel párhuzamosak. A csillapítással a trajektórián látszik, ahogy bespirállozódik, gerjesztett esetben kellően sok ideig várva megfigyelhetnénk, hogy a görbe önmagába zárul. Ahogy az összes többi értéken is látjuk itt is összesítődnek a fizikai ingában az előző két eset tulajdonságai, és hogy az idő múlásával a megoldás destabilizálódik.

4.3. Differenciálegyenlet megoldó módszerek összehasonlítása

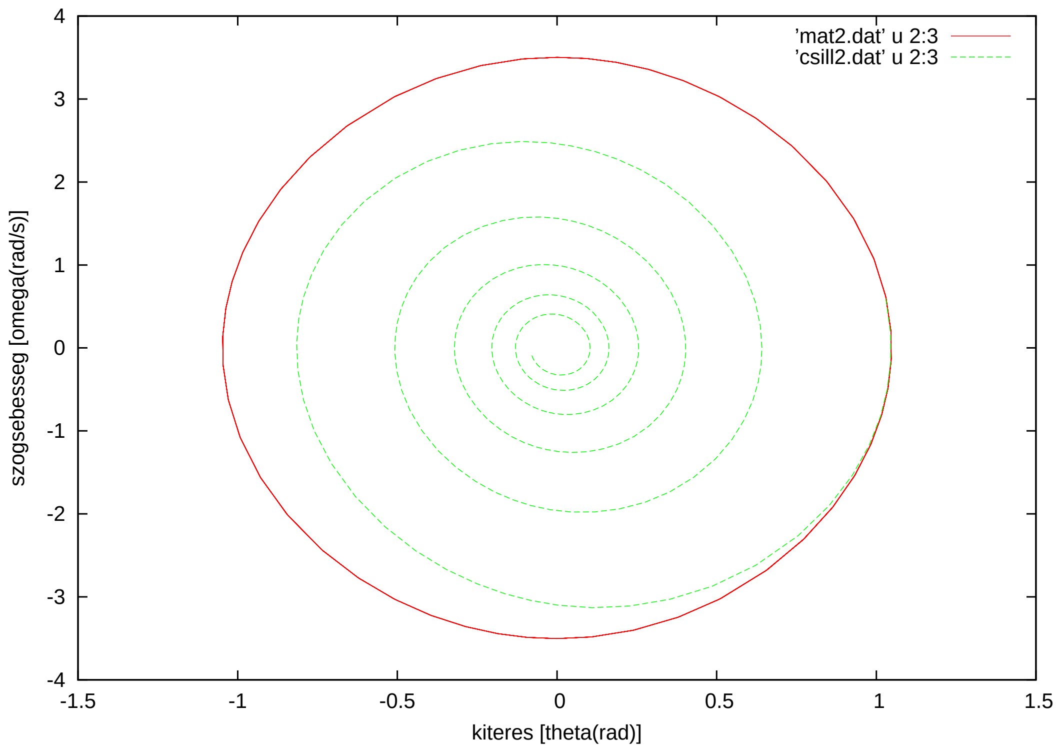
Az Euler, Euler-Cromer és Runge-Kutta módszerek vizsgálatára legmegfelelőbb az energia és a fárzistér alakulásának nyomonkövetése. Az energiaértékeken (6) megfigyelhető, hogy az Euler módszer alkalmazásával az energia exponenciálisan



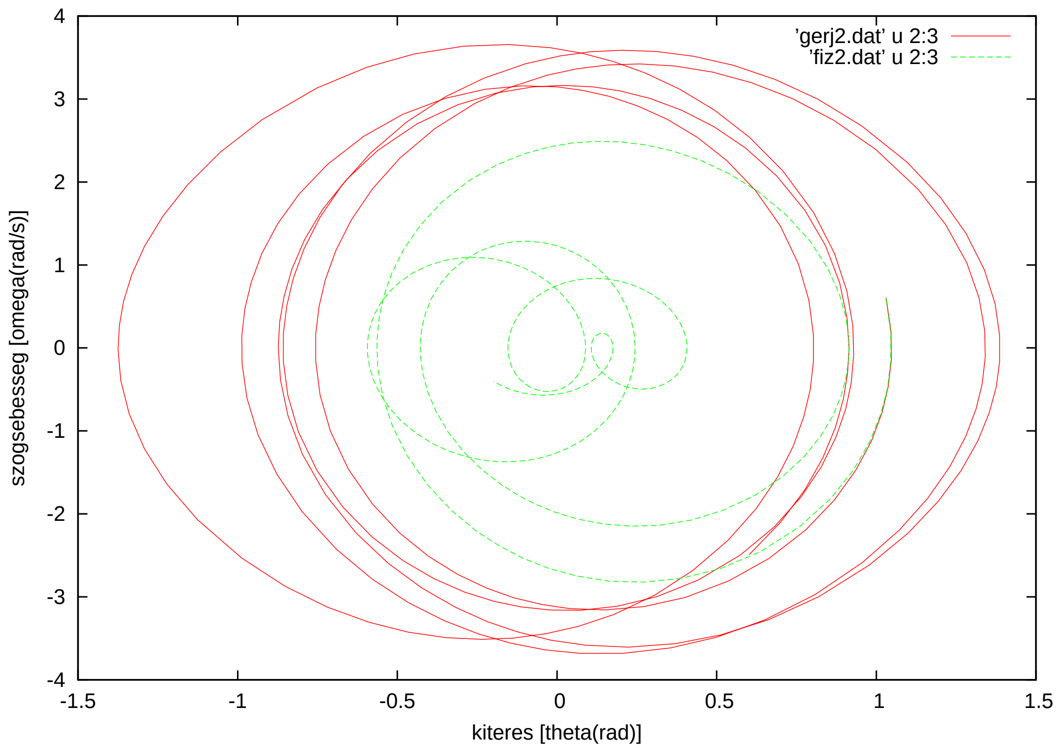
2. ábra. Szögsebesség-idő függvény



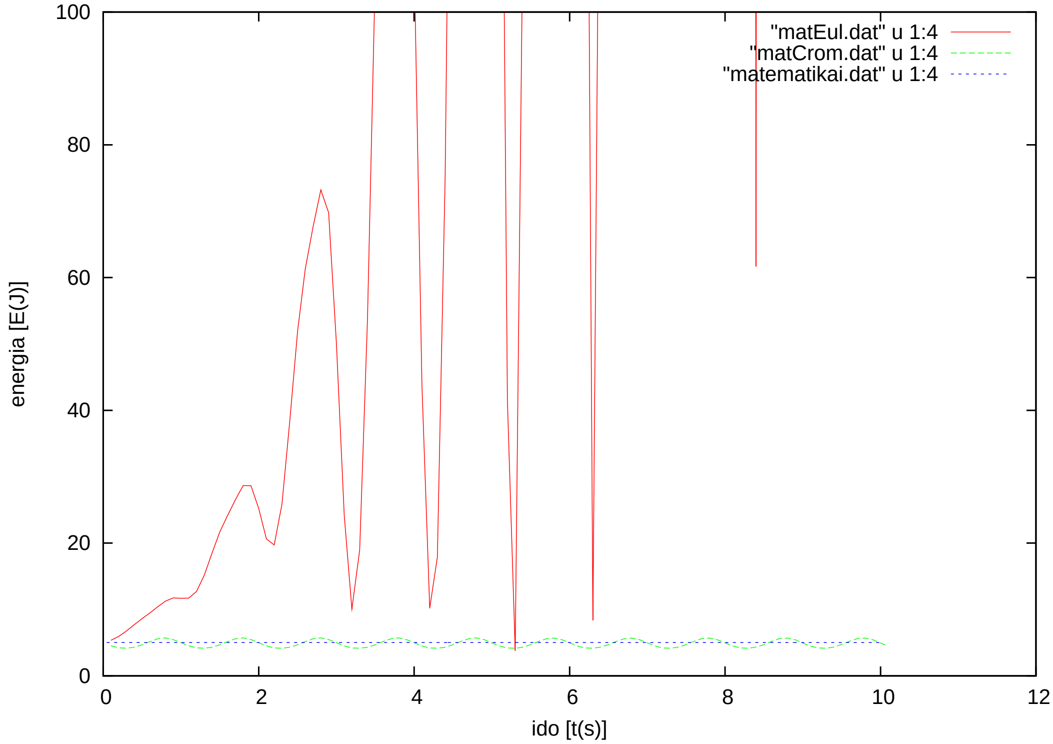
3. ábra. Energia-idő függvény



4. ábra. Matematikai és Csillapított inga fázistere



5. ábra. Gerjesztett és Fizikai inga fázistere



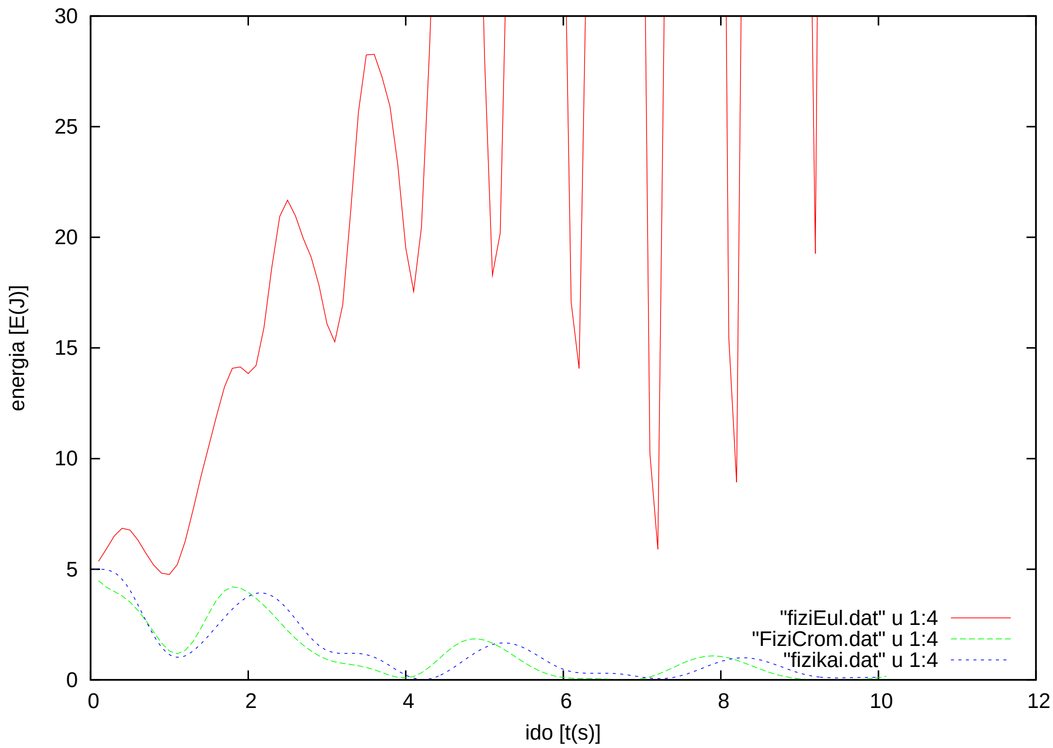
6. ábra. Számítási módszerek alkalmazása matematikai inga esetén

a végtelenbe divergál, míg a másik kettő esetében elfogadható. A Runge-Kutta módszer azonban láthatóan pontosabb megoldást ad, kisebb a fluktuációja a valós érték körül. Ezen felül észre vehetjük, hogy a matematikaiinga, vagyis idealizáltabb esetben a különböző implementációk is ”ideálisabban” viselkednek, vagyis a matematikai ingánál majdnem tökéletesen konstans értéket adott vissza a Runge-Kutta módszer az energiára.

Hivatkozások

[1] http://complex.elte.hu/ csabai/szamszim/simLec3.pdf

[2] http://complex.elte.hu/ csabai/fizNum2/index.html



7. ábra. Számítási módszerek alkalmazása fizikai inga esetén