

3. jegyzőkönyv: Bolygómozgás

Harangozó Szilveszter Miklós, HASPABT.ELTE

2010. április 6.

1. Bevezetés

Mostani feladatunk a bolygók mozgásának modellezése. Mint mindig a program forráskódját a honlapon [1] elérhető állományból használhatjuk. Célunk a két különböző megvalósítási módszer összehasonlítása és eredményeinek felhasználása.

2. Elméleti háttér

A bolygók mozgását alapvetően Kepler 3 törvénye írja le. Ezeket később igazolta a Newton féle gravitációs modell, mely segítségével tehettünk több általánosítást is: a törvények nem csak csillag és bolygó párosra hanem bármely két testre érvényesek, és nem csak ellipszis hanem parabola és hiperbola pályák is létezhetnek a természetben.

A két test közötti tömegvonzás:

$$F_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \quad (1)$$

Mivel az erőter centrális, a perdület megmarad és a mozgás egy síkban történik. Mivel esetünkben a Nap és a bolygók mozgását vizsgáljuk, a nagy tömegkülönbségek miatt tekinthetjük a Napot mozdulatatlannak és a bolygók tömegét elhanyagolhatóan kicsinek.

Mivel ellipszis pályákról beszélünk az origótól mért távolságot kifejezhetjük a θ szög függvényében, és meghatározhatjuk a pálya adott pontjához tartozó sebességet:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 - \epsilon \cos \theta} \quad b = a\sqrt{1 - \epsilon^2} \quad v = \sqrt{G(m_1 + m_2) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \quad (2)$$

Ha felhasználjuk Kepler 3. törvényét megtudhatjuk a keringési időt:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)}} \quad (3)$$

Még egy trükkel egyszerűbbé, biztonságosabbá és stabilabbá tehetjük a szimulációnkat: ha ügyesen választjuk meg a mértékegységeket. Nyilvánvalóan a méter és a másodperc nem lenne célravezető, így a távolságot Csillagászati Egységben és az időt egy földi évben mérjük. A képletekben látható hogy gyakran együtt fordul elő a következő kifejezés így hasznos előre a programnak definiálni:

$$G(M_{Nap} + m_{Fold}) = 4\pi^2 AU^3/ev^2 \quad (4)$$

3. Megvalósítás

A honlapon található programon több változtatást is eszközöltünk: mivel több adatot számolunk ki vele és egymás után a két módszer is végigfut, ezért az elkészítendő fileok nevét a program előre bekéri. A Newton törvénybe beépítjük a relativisztikus korrekciót a Merkúr perihélium precessziójának mérésére.

```
f[3] = - GmPlusM * r_x / rCubed*(1 + (1.1e-8/rSquared));
f[4] = - GmPlusM * r_y / rCubed*(1 + (1.1e-8/rSquared));
```

Ezen kívül bevezetünk 3 függvényt, amelyek segítségével megállapíthatjuk a tengelyek elfordulását: Az első az adott pont koordinátáiból kiszámítja az origótól való távolságot, a második a két pont különbségének az origótól való távolságát, míg a harmadik az adott pont és az origó által meghatározott egyenes és az x-tengely által bezárt szöget.

```
double dist(Vector &x){ //distance from origo
return sqrt(x[1]*x[1]+x[2]*x[2]);
}
double megadist(Vector &x,Vector &y){
return sqrt((x[1]-y[1])*(x[1]-y[1])+(x[2]-y[2])*(x[2]-y[2]));
}
double somealgo(Vector &x){
return atan2(x[2],x[1])*180/PI;
}
```

Így miután leellenőrizzük a feltételeket, egy külön fileba kiirathatjuk az adott perihéliumot, afféliumot és a perihélium és az origó által bezárt szöget:

```
if(dist(x) < r_min){
perihelium = x;
r_min = dist(x);
}
else if(dist(x) > r_max){
affelium = x;
r_max = dist(x);
}

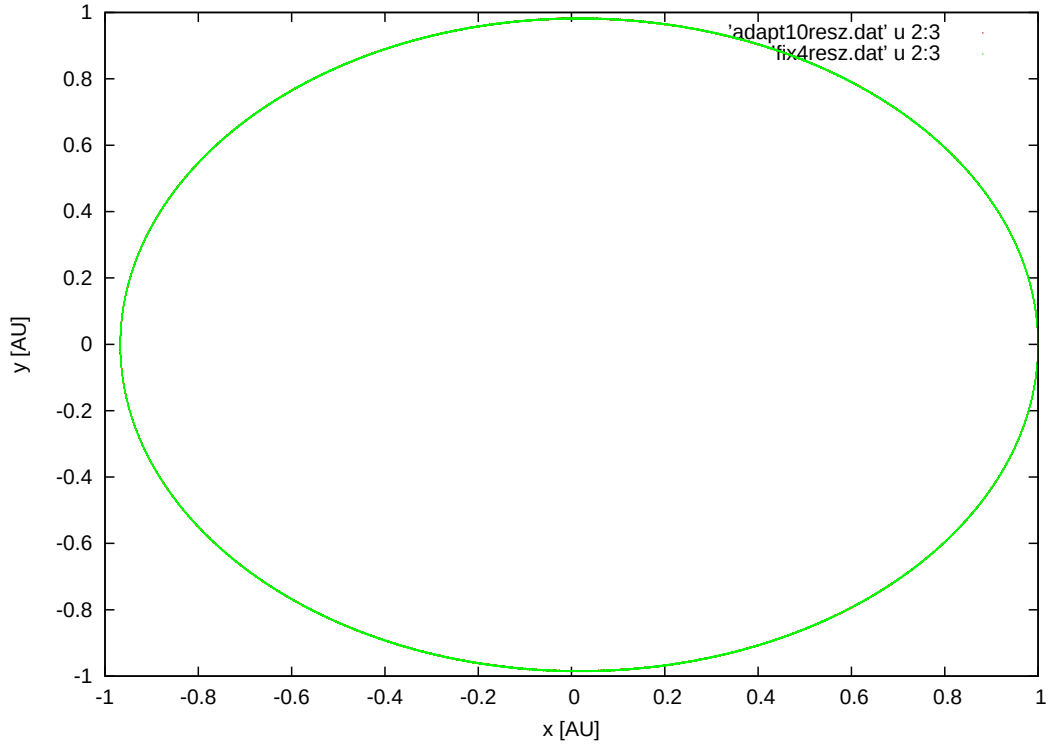
for(int i = 0; i < 5; ++i) periFile << perihelium[i] << '\t';
for(int i = 0; i < 5; ++i) periFile << affelium[i] << '\t';
if(somealgo(perihelium) >= 50) periFile << -(-180+somealgo(perihelium)) << '\t';
else periFile << 180+somealgo(perihelium) << '\t';
periFile << megadist(perihelium,affelium) <<endl;
```

4. Eredmények

4.1. A pontosság

Az első feladatban a Föld adatait adjuk be kezdőértéknek a program számára: ez 1 AU és 0.0167 excentricitásnak felel meg. A program módosításainak köszönhetően, kapásból megkapjuk a perihéliumok és az x-tengely által bezárt szögeket minden periódusban. Egyszeri lefutásra beállíthatunk egy fix lépésközt és egy célpontosságot az adaptív lépésközőknek. Ez esetünkben 10^{-4} és 10^{-11} volt először majd ezeket változtattuk a töbi lefutás során. Az első eredmények koordinátáit kiplotolva láthatjuk hogy majdnem teljesen egy kört kapunk a pályára, igazolva a program működését (1. ábra).

A következő két ábra a perihélium elfordulásokat ábrázolja fix lépésközőkkel és ennek adaptív változtatásával. Az előbbin látható, hogy a kisebb pontosság nagyobb perihélium ingadozást idéz elő. Más jegyzőkönyvek tanulsága azt mutatja, hogy ezek a kis szögek sok idő elteltével egyre nagyobbak lesznek, összeadódnak és egy idő után a szimuláció már nem fogja a valóságot követni. Az utóbbi esetben ugyan sokkalta nagyobb ingadozást vehetünk észre, de ez az idő múlásával nem fog változni, egyazon intervallumon belül fog ingadozni, és itt is érvényes lesz, hogy a nagyobb megkövetelt precízitás kisebb ingadozást okoz.



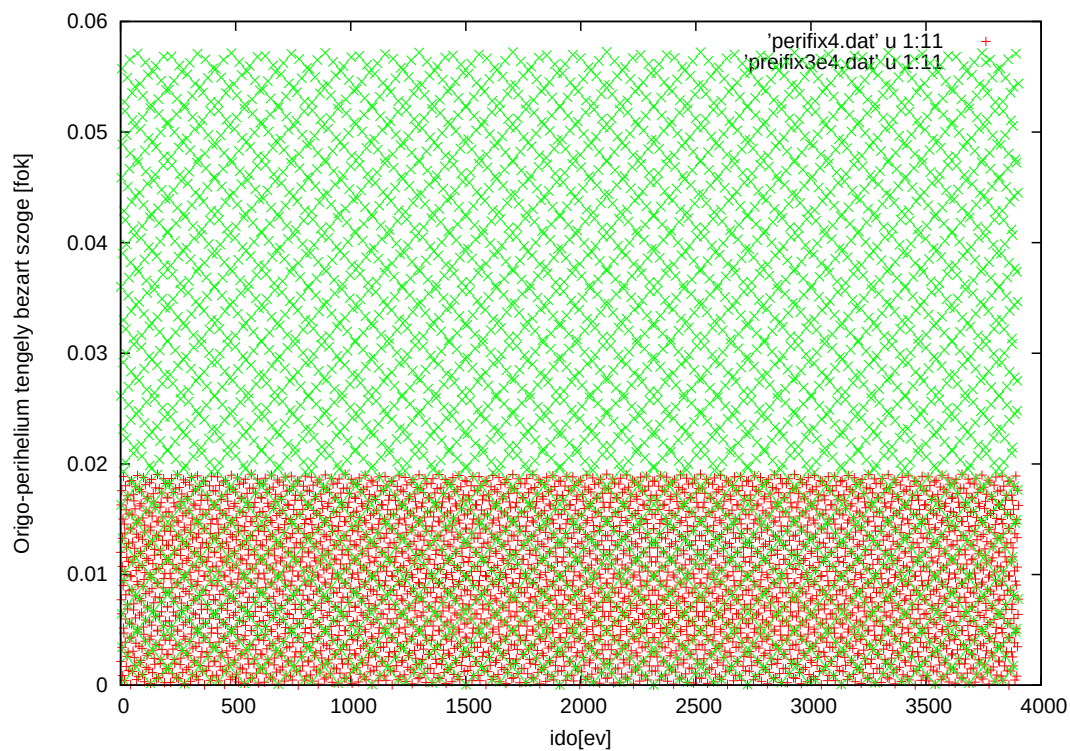
1. ábra. A Föld pályája

4.2. Adaptív lépéshossz a pálya függvényében

Ehhez a feladathoz is kis változtatást eszközöltünk a programon: kiirattuk az éppen aktuális lépésközt a koordináták mellé. A programot pár periódusra lefuttatva az eredmény szépen látható lesz. A 4. ábrán az x-tengely koordinátáinak függvényében ábrázoljuk a lépésközöket. A két csúcsot a pálya alakjával magyarázhatjuk: mivel ellipszisről van szó, ahol kevésbé görbül a pálya a kívánt pontossághoz elegendő nagyobb lépésközöket használni, a viszonylag lassab változás miatt.

4.3. A Merkúr perihélium precessziója

Ehhez a feladathoz csak az adaptív lépésközzel készített információkat használjuk fel. A bevitt paraméterek: affélium = 0,4667AU excentricitás = 0,20563. Ugyan az effektust így is csak a program sokperiódusú futtatása után tudjuk kimérni, de az eredmény így egyértelműsödik. Az 5. ábrán látszik, hogy az adatpontok egy egyenes körül szórnak, így illeszthetünk. A meredekség-

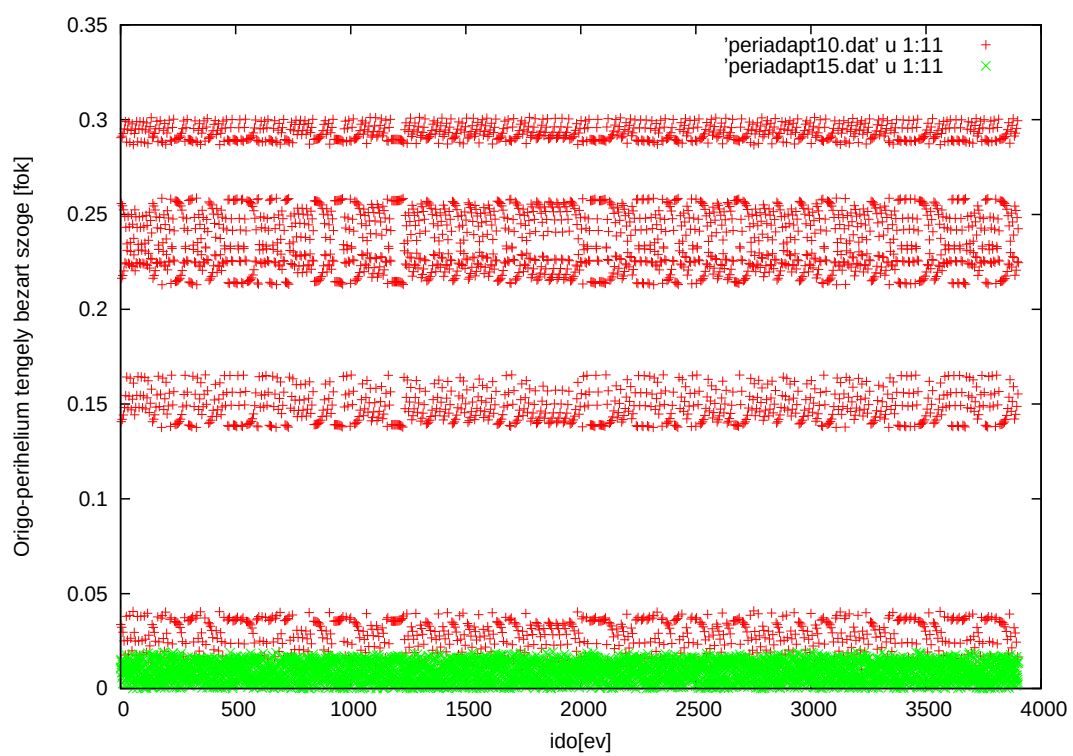


2. ábra. Perihélium elfordulás a fix lépésköz változtatásával

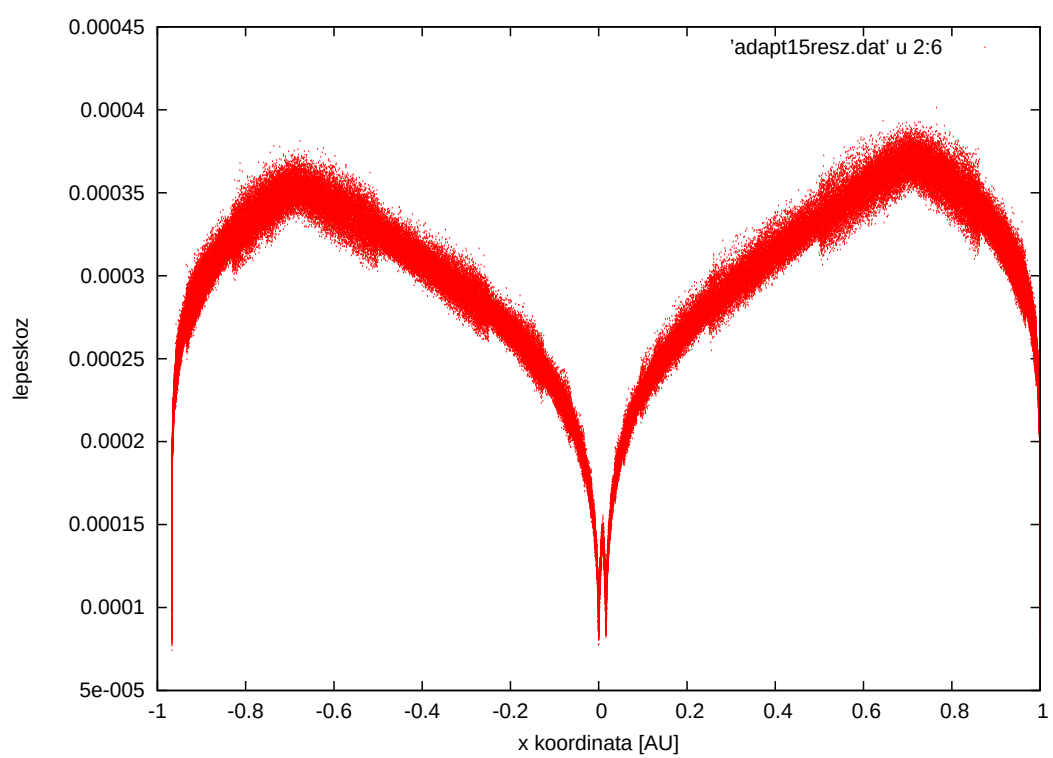
ből megállapíthatjuk, hogy mennyire adott megfelelő adatokat a szimuláció a valósághoz képest. $m = 0.000119664$ Ez 43,07904 szögmásodperces elfordulást jelent 100 évre, ami szépen visszaadta a várt eredményt.

Hivatkozások

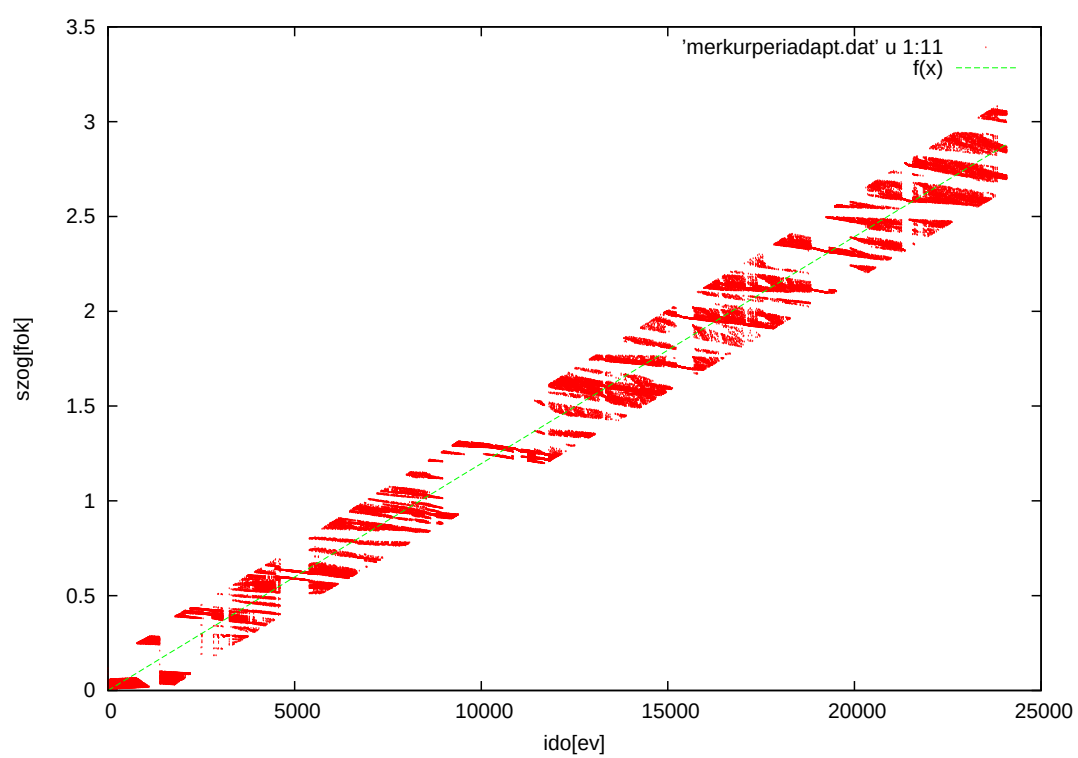
[1] <http://complex.elte.hu/~csabai/szamszim/>



3. ábra. Perihélium elfordulás adaptív lépésközzel



4. ábra. Adaptív lépésköz az x-tengely koordinátáinak függvényében



5. ábra. A Merkúr perihéliumprecessziója