

Modern fizika laboratórium

Granuláris anyagok

Készítette: Básti József és Hagymási Imre

1. A mérés elméleti háttere

A granuláris anyagok nagy számú makroszkópikus részecskéből álló anyagok. Ezen mérettartományban a részecskére ható gravitációs erő, két részecske összenyomódásakor fellépő taszítóerő és az érintkezési pontokon fellépő surlódási erő tartozik a legjellemzőbb erőhatások közé.

A részecskék átlagos helyzeti energiájához képest az egy szabadsági fokra jutó $k_B T$ termikus energia elhanyagolható, ezáltal elvész a hőmérséklet átlagoló szerepe. Nem alakul ki termikus egyensúly, nincs ergodicitás, külső megzavarás nélkül a rendszer bármely metastabil állapota végtelen sok ideig fennmarad. Keveredés, homogén eloszlások kialakulása helyett rendeződés, szegregáció, komplex struktúrák kialakulása lép fel.

1.1. A nyomás magasságfüggése granuláris anyagokban

A granuláris anyagok leírása még nyugalmi állapotban sem egyszerű. Ezt fogjuk megvizsgálni a mérés során, amikor is magas, hengeres tartóba helyezett granuláris anyag alján mérjük a függőleges irányban ható nyomóerőt. A részecskék egymással csak az érintkezési pontokban hatnak kölcsön, amelyek egy kvázi véletlenszerű hálózatot hoznak létre az anyagon belül. A kísérletek tanúsága szerint a legnagyobb feszültségek láncszerű struktúrák mentén jelentkeznek, ezeket nevezzük erőláncoknak. Régóta ismert tény, hogy a szemcsés anyagokban fellépő nyomás nem írható le a hidrosztatikus $P(z) = \rho g z$ nyomással. Az oszlop magasságát növelve, az oszlop alján mért nyomás nem nő lineárisan a végtelenségig, hanem egy adott karakterisztikus magasság fölött telítésbe megy és végtelen magas oszlop esetén is véges nyomást mérhetünk. Ez arra vezethető vissza, hogy a boltívszerűen rendeződő erőláncok az edény falának közvetítik a szemcsék súlyából származó erőt, így egy idő után az anyag teljes súlyát a falak tartják meg. A leíráshoz a Janssen modellt használjuk.

Tekintsünk egy R sugarú függőleges hengeres edényt megtöltve granuláris anyaggal, melynek átlagos sűrűsége ρ . Feltesszük, hogy a függőleges nyomás nagysága csak a mélységtől függ. Az anyag minden dz vastagságú, $S = R^2 \pi$ felületű vízszintes szeletének egyensúlyban kell lennie. Ennek egyenlete, figyelembe véve, hogy hat a gravitációs erő, a nyomás különbségéből származó erő és a falaknál fellépő surlódási erő:

$$\rho g S dz - \frac{dP(z)}{dz} S dz - dF_{frict} = 0. \quad (1)$$

Feltesszük, hogy a vízszintes irányban mérhető nyomás arányos a függőleges nyomással:

$P_{hor}(z) = KP(z)$, ahol K az ún. Janssen-együttható. A súrlódás pedig:

$$dF_{frict} = \mu KP(z)2\pi R dz. \quad (2)$$

Az egyenlet megoldása $P(0) = 0$ kezdőfeltétellel:

$$P(z) = \lambda \varrho g(1 - e^{-z/\lambda}), \quad (3)$$

azaz z növelésével a nyomás telítésbe megy és a telítődés karakterisztikus távolsága λ . Ebből az egyenletből könnyen látszik, hogy az oszlop látszólagos tömege szintén exponenciális telítődést mutat az oszlop m valódi tömegének függvényében:

$$m_l(m) = m_\infty(1 - e^{-m/m_\infty}). \quad (4)$$

Ugyanis felhasználva, hogy $m_l = PA/g$ és $m = za\varrho$ kapjuk, hogy $P_\infty = \lambda\varrho g$. Ennek segítségével $m_\infty = A\lambda\varrho$, ami a végtelen oszlopmagassághoz tartozó látszólagos tömeg. Mivel $z/\lambda = m/m_\infty$, így:

$$m_l(m) = m_\infty(1 - e^{-m/m_\infty}). \quad (5)$$

A mérés során ezt az összefüggést fogjuk megvizsgálni.

1.2. A mérés

A mérés során árpát használtunk granuláris anyagként. A mérés alkalmával kb. 20 db műanyagpohárba darabonként azonos mennyiségű (40 g) árpát mértünk ki. A tömeget egy elektromos mérleggel mértük, amelynek pontossága elvileg ± 2 g. Azonban a pontatlanság ennél jóval nagyobb is lehetett, mivel a mérleg nullszintje időnként elcsúszott. Ez annak tudható be, hogy ha a mérlegen levő anyag mennyiségét kis adagokban növeljük, a mérleg a 2 g-nál kisebb különbségeknek utána táráz, így nagyon sok anyagot tehetünk rá anélkül, hogy a kijelzett tömeg változna. A poharakba kimért anyagot egy $2R = (5.0 \pm 0.1)$ cm átmérőjű hengerbe töltöttük és minden betöltés után feljegyeztük a mérleg által mutatott tömeget. Ebből az adatból még le kell vonni a dugattyú tömegét, amelyet minden egyes sorozat előtt lemértünk. Kétféle töltési módszert alkalmaztunk: először csak egyszerűen beleöntjük az anyagot a hengerbe (A-módszer), másodszor pedig egy tölcésrszerű speciális eszközön keresztül történt a betöltés.

Az 1. táblázatban összefoglaltuk az árpával mért eredményeket. Mindkét fajta beöntésnél 3-3 mérést végeztünk.

Az illesztett görbék pedig az 1.(a)-(f) ábrákon láthatók. Az illesztések eredményei a 2. táblázatban láthatók:

	A módszer			B módszer		
n	m_l (1.)	m_l (2.)	m_l (3.)	m_l (1.)	m_l (2.)	m_l (3.)
0	38	38	38	40	42	42
1	90	94	92	62	72	70
2	122	114	112	88	98	94
3	136	128	128	112	120	118
4	148	144	144	130	140	142
5	162	156	156	144	162	160
6	172	166	170	160	176	176
7	180	180	182	176	196	194
8	192	192	188	186	210	208
9	200	200	196	200	222	222
10	210	208	208	208	232	234
11	216	218	214	220	242	246
12	226	224	222	232	254	256
13	234	232	230	238	264	266
14	242	238	240	244	272	280
15	248	246	248	252	282	290
16	252	252	254	260	290	296
17	258	258	258	268	300	306
18	264	262	264	274	312	314
19	268	264	268	278	318	320
20		270	274	286	324	326
21		274		292		332

1. táblázat. A látszólagos tömegértékek az A és B módszer esetében. n a beöntött poharak száma, $n = 0$ a dugattyú tömege. A tömegértékek g-ban értendők.

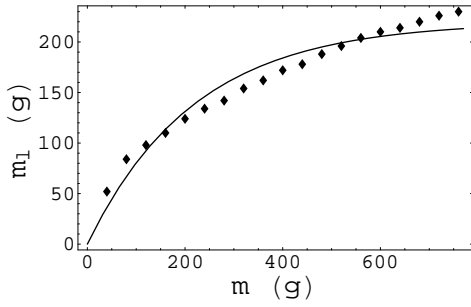
	A módszer	B módszer
1. mérés	$(219 \pm 4)\text{g}$	$(231 \pm 8)\text{g}$
2. mérés	$(222 \pm 2)\text{g}$	$(270 \pm 7)\text{g}$
3. mérés	$(220 \pm 5)\text{g}$	$(280 \pm 9)\text{g}$

2. táblázat. Az illesztett m_∞ paraméterek.

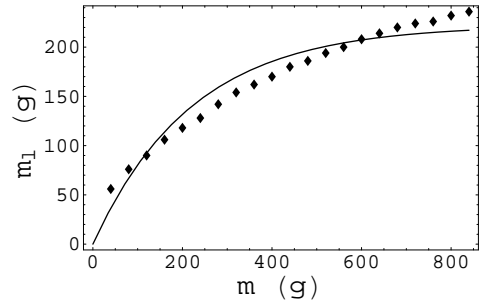
1.3. A Janssen-együttható számítása

A Janssen-együttható megadásához a

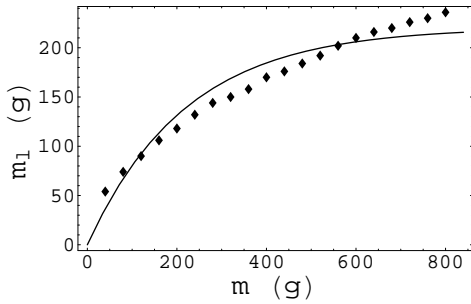
$$\lambda = \frac{R}{\frac{2\mu K}{4}}, \quad (6)$$



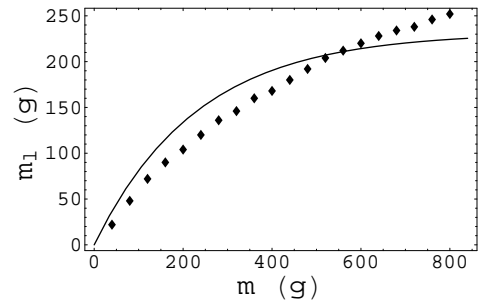
(a) Az A módszer 1. mérésének eredményei.



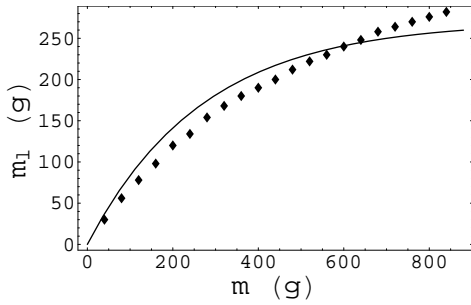
(b) Az A módszer 2. mérésének eredményei.



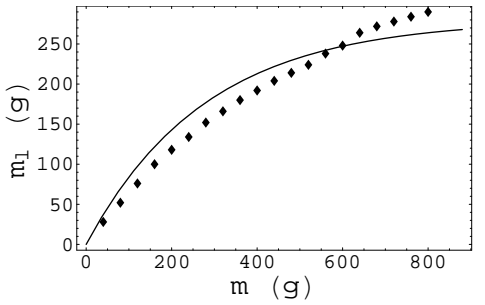
(c) Az A módszer 3. mérésének eredményei.



(d) A B módszer 1. mérésének eredményei.



(e) A B módszer 2. mérésének eredményei.



(f) A B módszer 3. mérésének eredményei.

1. ábra.

illetve a (3) és (4) egyenletekből adódó

$$\lambda = \frac{m_{\infty}}{\rho A} \quad (7)$$

összefüggések szükségesek. A henger alapterülete meghatározható a sugarából. A sűrűség meghatározásához szükséges az árpaoszlop magassága, amelynek értékére 55.1 ± 0.5 cm-t kaptunk. Ekkor 20 pohárnyi árpa volt a hengerben.

Ez alapján az árpa sűrűségére $\varrho_{\text{árpa}} = (739 \pm 37) \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ -t kaptunk. Mérési sorozatonként a 3. táblázat foglalja össze a Janssen-együtthatóra kapott értékeket.

	A módszer	B módszer
1. mérés	(0.57 ± 0.02)	(0.54 ± 0.02)
2. mérés	(0.56 ± 0.02)	(0.46 ± 0.02)
3. mérés	(0.56 ± 0.02)	(0.44 ± 0.02)

3. táblázat. A Janssen-együtthatók mérési sorozatonként.

Ezeket átlagolva

$$K_{\text{árpa}} = 0.52 \pm 0.05 \quad (8)$$

értéket kapunk az árpa Janssen-együtthatójára.

2. Mikroszkópikus erőeloszlás vizsgálata

A mérés ezen részében az erőláncokkal foglalkozunk.

2.1. Elméleti háttér, a q-modell

A modell alapfeltevése az, hogy az erőláncok kialakításában egy kiszemelt szemcsére felülről ható erők nem egyenletesen oszlanak meg az őt tartó szemcsék között. Tekintsünk egy szabályos rácsot, melynek minden rádspontjában egy egységnyi tömegű részecske található. Minden részecske az alatta levő rétegben megtalálható N részecskén nyugszik. Egy adott szemcsére ható összes súlyerő ennek az N részecskének továbbítódik véletlenszerű megoszlásban: az i -edik részecske által a j -edik részecskének továbbított erőt jelölje a q_{ij} véletlen változó. Hasonlóan tart a részecske N felette levő másikat, az i -edik által megtartott súlynak $w(M, i)$, a következő sztochasztikus egyenletet kell kielégítenie:

$$w(M, j) = 1 + \sum_{i=1}^N q_{ij}(M-1)w(M-1, i). \quad (9)$$

A modell keretein belül figyelmen kívül hagyjuk a q_{ij} térbeli korrelációit és feltesszük, hogy mindenütt azonos eloszlást követnek. Ez a feltevés az átlagtér-közelítésnek felel meg. Azt mondhatjuk tehát, hogy a q_{ij} változóknak eleget kell tenniük a:

$$\sum_{j=1}^N q_{ij} = 1 \quad (10)$$

kényszerfeltételnek. A legegyszerűbb választás az, amikor a minden q_{ij} készlet valószínűsége ugyanaz. Megmutatható, hogy ekkor az egy szemcse által megtartott redukált súly, $v = w/M$ eloszlásfüggvénye $M \rightarrow \infty$ határesetben, egy adott eloszláshoz tart:

$$P_{\text{egyenletes}}(v) = \frac{N^N}{(N-1)!} v^{N-1} e^{-Nv}. \quad (11)$$

Az is megmutatható, hogy ha q_{ij} -k eloszlására más feltevést teszünk, átlagtérközelítésben akkor is hasonló eredményre jutunk, nagy v -k esetén:

$$P(v) \simeq v^{N-1} e^{-av}, \quad (12)$$

ahol a konstans. Azt kaptuk ehát, hogy a szemcséken mérhető erők eloszlása exponenciálisan cseng le. Ez jóval lassabb, mint a Gauss-típusú e^{-x^2} , vagyis ez azt jelenti, hogy az átlagos erőnél lényegesen nagyobb erők súlya meglepően nagy. Ezt az eredményt ellenőriztük a mérés során.

2.2. A mérés menete és kiértékelése

Egy henger alakú tartó aljára egy kartonlapon fekvő indigót erősítettünk. A tartóba szabályos üveggolyókból álló szemcsés anyagot töltöttünk, amelyre egy dugattyút helyeztünk és egyikünk ráállt. Az erő a szemcsés anyagban az erőláncokon keresztül továbbítódik a falnak és az edény aljának. Az edény alján levő szemcsék nekinyomódnak az indigónak és a rájuk ható erővel arányos foltot hagynak a papíron. Ezáltal a papíron lévő foltok méreteloszlásából következtetni tudunk az erőeloszlásra. A kísérlet elvégzése során ügyelnünk kell, hogy a golyók beöntéskor ne hagyjanak nyomot a papíron.

Összesen öt lenyomatot készítettünk. Ezeket a megadott képfeldolgozó laborprogramok, illetve a GIMP segítségével értékeltük ki. A dobozméret 15, a háttér 245 volt. Ezáltal öt darab méreteloszlás adatsort kaptunk. Mindegyikre illesztettünk Gauss-görbét, illetve a q-modellnek megfelelő exponenciálist. Az illesztések a 2-3. ábrán láthatók. Illusztrációként egy lenyomat látható az 5. ábrán. A fél-logaritmikus ábrák a 4. ábrán láthatók. Az illesztendő

Gauss-görbét az alábbi módon paramétereztük:

$$f(x) = ae^{-b(x-x_0^2)}, \quad (13)$$

a q-modell szerinti függvényt pedig:

$$f(x) = Ax^n e^{-Bx} \quad (14)$$

alakban kerestük. Az illesztések eredményeit a 4. táblázat foglalja össze.

	a	b	x_0	A	B	n
1. mérés	85 ± 2	$(9.8 \pm 0.9) \cdot 10^{-5}$	66 ± 3	4 ± 1	0.019 ± 0.001	1.0 ± 0.1
2. mérés	112 ± 6	$(3.7 \pm 0.9) \cdot 10^{-5}$	20 ± 21	78 ± 29	0.009 ± 0.001	0.2 ± 0.1
3. mérés	198 ± 48	$(2 \pm 1) \cdot 10^{-5}$	-66 ± 56	157 ± 49	0.011 ± 0.001	0.09 ± 0.1
4. mérés	110 ± 1	$(12.0 \pm 0.6) \cdot 10^{-5}$	82 ± 1	0.23 ± 0.09	0.026 ± 0.001	1.8 ± 0.1
5. mérés	91 ± 2	$(9.4 \pm 0.9) \cdot 10^{-5}$	62 ± 3	6 ± 2	0.018 ± 0.001	0.9 ± 0.1

4. táblázat. Az illesztett Gauss-görbék illetve q-modellek paraméterei.

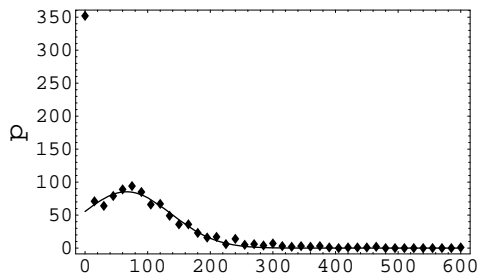
Jól látható a fél-logaritmikus ábrákon, hogy az eloszlás lecsengése jó közelítéssel egyenes. Az illesztési paraméterekből leolvasható, hogy az exponenciális lecsengést kb. 10% hibával tudtuk kimérni.

Annak eldöntésére, hogy melyik görbe illeszkedik jobban az adatsorra célszerű kiszámítani R^2 értékét illesztésként. Ezt foglalja össze az 5. táblázat.

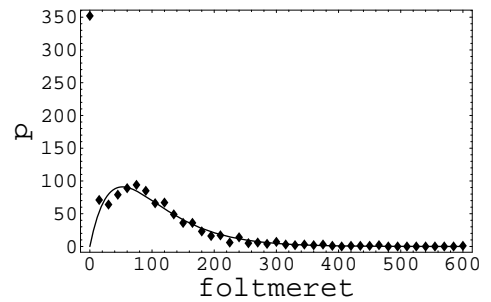
	Gauss	q-modell
1. mérés	0.987	0.978
2. mérés	0.946	0.921
3. mérés	0.972	0.962
4. mérés	0.991	0.984
5. mérés	0.985	0.975

5. táblázat. Az R^2 értékek az egyes illesztésekre.

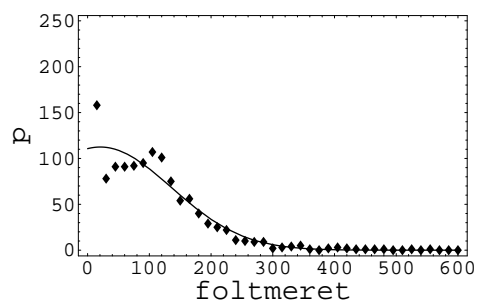
Az R^2 definíciója alapján tehát azt mondhatjuk, hogy a Gauss-görbék jobban illeszkednek a pontokra, mint a q-modell alapján származtatott eloszlás.



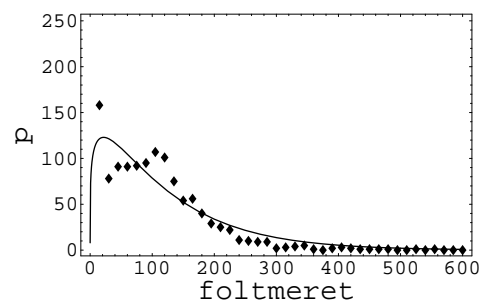
(a) 1. mérés, Gauss-illesztés.



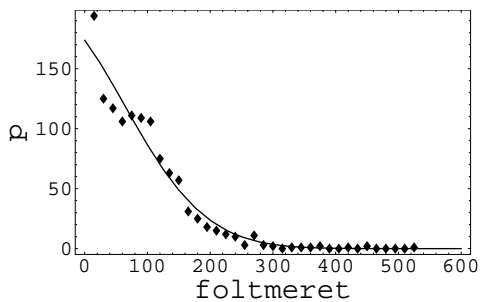
(b) 1. mérés, q-modell illesztés.



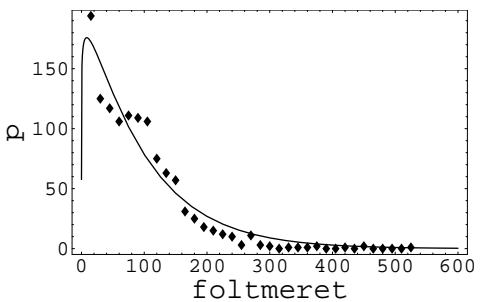
(c) 2. mérés, Gauss-illesztés.



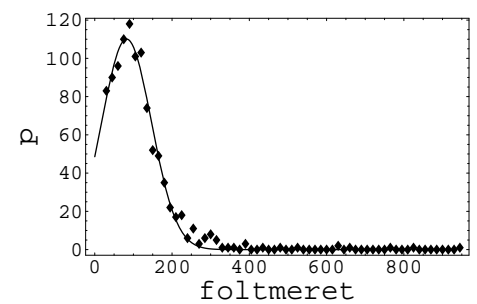
(d) 2. mérés, q-modell illesztés



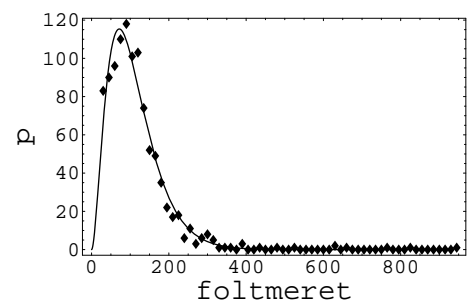
(e) 3. mérés, Gauss-illesztés



(f) 3. mérés, q-modell illesztés

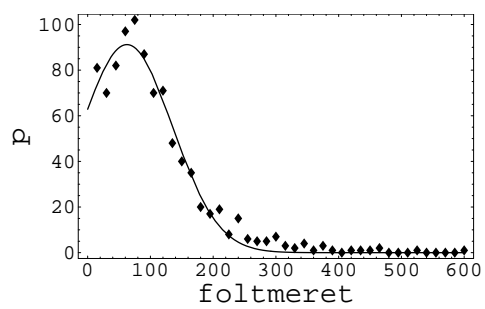


(g) 4. mérés, Gauss-illesztés

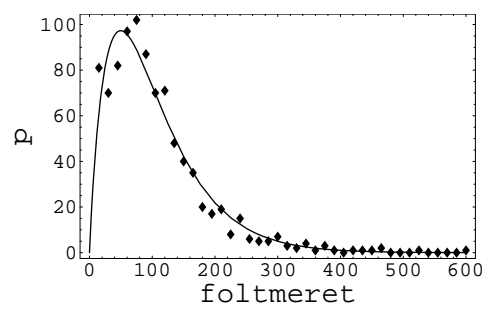


(h) 4. mérés, q-modell illesztés

2. ábra.

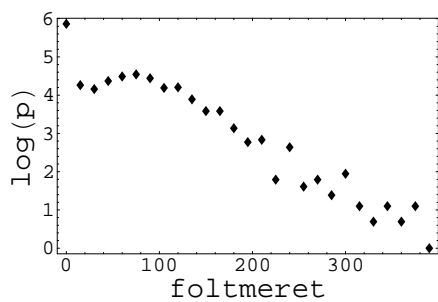


(a) 5. mérés, Gauss-illesztés

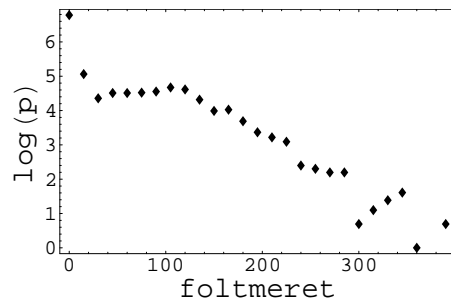


(b) 5. mérés, q-modell illesztés

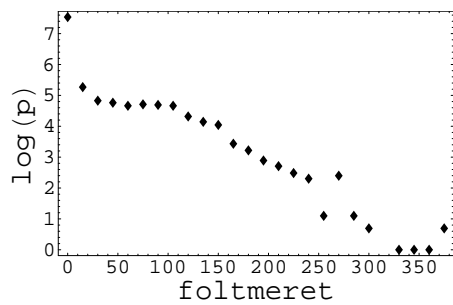
3. ábra.



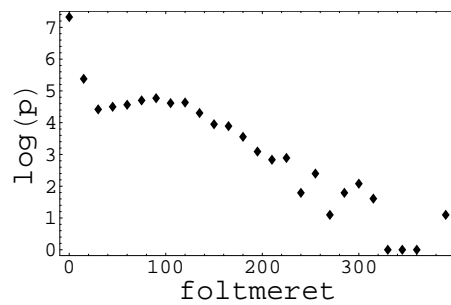
(a) 1. mérés



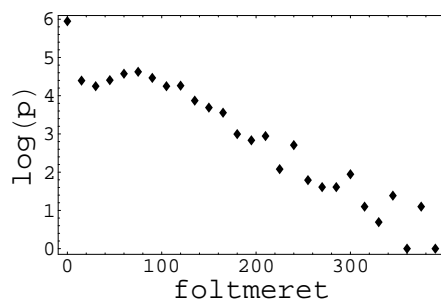
(b) 2. mérés



(c) 3. mérés

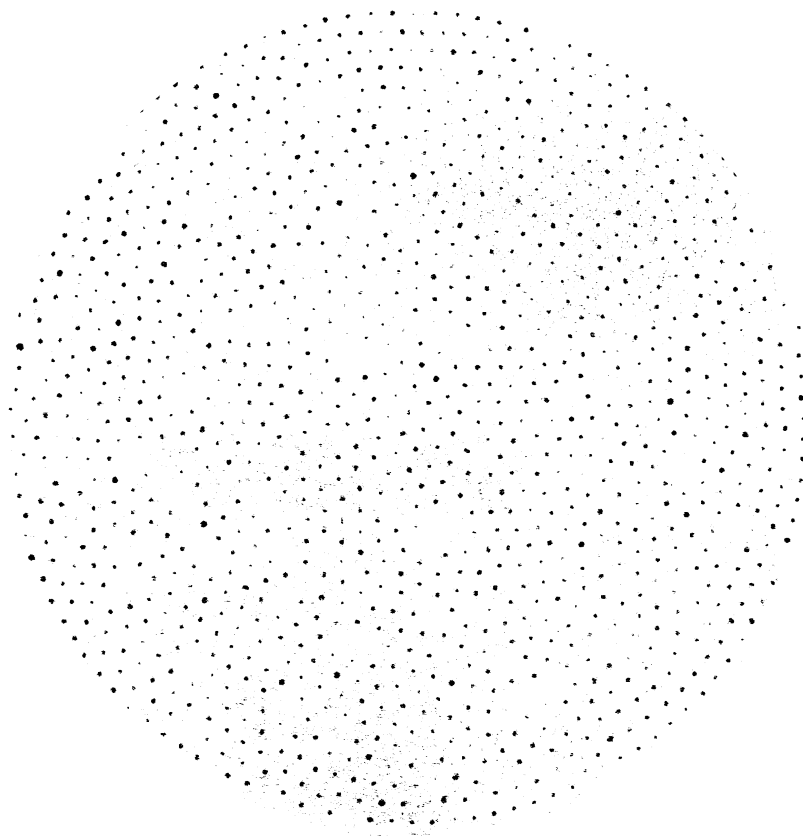


(d) 4. mérés



(e) 5. mérés

4. ábra. A fél-logaritmikus ábrák.



5. ábra. Egy mérés során készült lenyomat.