

## 6. A Zeeman-effektus

Modern fizika laboratórium, Fizika BSc

A mérést végezte:

Bokányi Eszter (BOERAAT.ELTE), Radics Máté (RAMRAAT.ELTE)

Mérés időpontja: 2011. március 3.

Beadás időponja: 2011. március 16.

Értékelés:

# 1. A mérés elve

## 1.1. Bevezetés

Zeeman fedezte fel, hogy erős mágneses térben egyes spektrumvonalak több vonalra hasadnak fel. A felhasadás oka az atomi mágneses momentum(ok) és a külső mágneses tér kölcsönhatása. Az mérés során ezt az effektust vizsgáltuk a Hg 546,07 nm-es (zöld) vonalán.

## 1.2. A Zeeman-felhasadásról

Külső kis mágneses térben az  $n$  (fő-),  $l$  (mellék-, vagy az eredő pályá-impulzusmomentum  $\sim$ ),  $s$  (az eredő spin-impulzusmomentum  $\sim$ ),  $j$  (az elektron összipulzusmomentum  $\sim$ ), valamint  $m$  (mágneses-) kvantumszámokkal jellemzett energianívó a következőképpen hasad fel:

$$E = E_0 + \mu_B B g_j m_j \quad (1)$$

Ahol

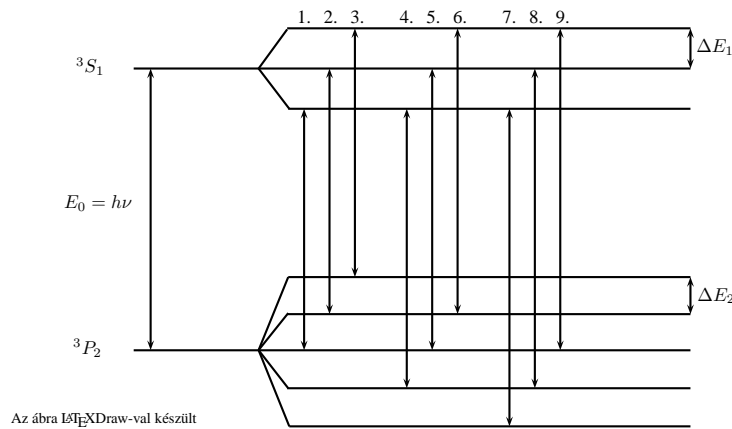
$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$$

a Landé  $g$ -faktor,  $B$  a külső mágneses tér,  $m_j$  a mágneses kvantumszám,  $\mu_B$  pedig a Bohr-magneton.  $m_j$  összesen  $2j+1$  db értéket vehet fel, azaz minden  $(n, l, j)$  szint  $2j+1$  db, egymáshoz képest egyenlő energiakülönbséggel rendelkező alnívóra hasad fel. Az átmeneteket a következő kiválasztási szabályok írják le:  $\Delta s = 0$ ;  $\Delta l = 1, 0, -1$ ;  $\Delta j = 1, 0, -1$  (kivéve  $j = 0 \rightarrow j = 0$ );  $\Delta m_j = 1, 0, -1$  (kivéve  $m_j = 0 \rightarrow m_j = 0$ , ha  $\Delta j = 0$ ). A  $\Delta m_j = 0$  komponensek ( $\pi$ ) a mágneses térrel párhuzamosan, míg a  $\Delta m_j = \pm 1$  komponensek ( $\sigma^\pm$ ) a térre merőlegesen polarizáltak.

## 1.3. A várható Zeeman-átmenetek (előzetes mérési feladat)

A Hg két vegyértékelektronnal rendelkezik; úgy közelítjük az átmeneteket, mintha mindig csak az egyik gerjedne. Az adott vonalnál (546,07 nm) ez a  $6s7s \ ^3S_1 \rightarrow 6s6p \ ^3P_2$  átmenetnek felel meg. A mágneses térben az első szinten  $j=1$ , tehát az három részre, a második szinten  $j=2$ , tehát az öt részre hasad. Az ezek között lehetséges 15 átmenetet a kiválasztási szabályok 9-re korlátozzák. A szintek és a különböző átmenetek szemléltetését l. az 1. ábrán.

A felhasadt energiaszintek az (1) egyenlet miatt egyforma távolságra helyezkednek el egymástól. Jelölje a  $6s7s$  felhasadt szintjeinek távolságát  $\Delta_1$ , a  $6s6p$ -ét  $\Delta_2$ ! A 1.3.1 és a 1.3.2 részben található táblázatokban összefoglaltuk a különböző mágneses terek által létrehozott elméleti  $\Delta_1$  és  $\Delta_2$  értékeket.



1. ábra. A lehetséges energiaátmenetek

**1.3.1. A  $^3S_1$ ,  $m_j = 0 \rightarrow m_j = 1$  különbség**

I [Å]	B [T]	$\Delta_1 [\cdot 10^{-24} J]$
0,19	0,17	3,14
0,24	0,21	3,96
0,28	0,24	4,62
0,32	0,28	5,28
0,35	0,31	5,77
0,70	0,62	11,55
0,80	0,71	13,20
0,90	0,80	14,85
1,00	0,89	16,50
1,10	0,98	18,15

**1.3.2. A  $^3P_2$ ,  $m_j = 0 \rightarrow m_j = 1$  különbség**

I [Å]	B [T]	$\Delta_2 [\cdot 10^{-24} J]$
0,19	0,16	2,35
0,24	0,21	2,97
0,28	0,24	3,46
0,32	0,28	3,96
0,35	0,31	4,33
0,70	0,62	8,66
0,80	0,71	9,90
0,90	0,80	11,14
1,00	0,89	12,38
1,10	0,97	13,61

**1.4. Zeeman-energiák elméleti értékei**

Az 1. ábrán megszámozott átmenetek energiáit a következőképpen számolhatjuk ki  $\Delta_1$  és  $\Delta_2$  ismeretében, ha a mágneses tér nélküli átmenet energiája  $E$  (a harmadik oszlopban az energiaeltolódások abszolút értékét láthatjuk):

1.	$E - \Delta_1$	$\Delta_1$
2.	$E - \Delta_2$	$\Delta_2$
3.	$E + \Delta_1 - 2\Delta_2$	$ \Delta_1 - 2\Delta_2 $
4.	$E - \Delta_1 + \Delta_2$	$ \Delta_1 - \Delta_2 $
5.	$E$	
6.	$E + \Delta_1 - \Delta_2$	$ \Delta_1 - \Delta_2 $
7.	$E - \Delta_1 + 2\Delta_2$	$ \Delta_1 - 2\Delta_2 $
8.	$E + \Delta_2$	$\Delta_2$
9.	$E + \Delta_1$	$\Delta_1$

Látható, hogy szimmetrikusak az eredeti energiához képesti eltolódások. Mivel a  $\sigma$ -átmenetek 3-3 vonalát a kísérlet során egy gyűrűnek fogjuk látni, átlagos energiát számolunk az intenzitásukkal súlyozva.

A  $\sigma$ -vonalak relatív intenzitását a következő egyenletek adják meg,  $j \rightarrow j-1$  átmenetekre, a mágneses térre merőleges megfigyelésnél:

$$I_r = (j \mp m_j - 1)(j \mp m_j) \quad m_j \rightarrow m_j \pm 1$$

Tehát az 1., 2., 3. vonalak intenzitásai csakúgy, mint a 9., 8., 7.-é, 1:3:6 arányban vannak ( $j = 2 \rightarrow j = 1$  átmenettel számolva, mivel ezek a folyamatok megfordíthatók). Ennek megfelelően az átlagos energiaeltolódás a  $\sigma$ -vonalak csoportjainál:

$$E_Z = 0,1 \cdot \Delta_1 + 0,3 \cdot \Delta_2 + 0,6 \cdot |\Delta_1 - 2\Delta_2|, \quad (2)$$

ez lesz az átlagolt Zeeman-energia. A  $\pi$ -vonalak elméleti Zeeman-energiáját az

$$E_Z = |\Delta_1 - \Delta_2| \quad (3)$$

kifejezés adja meg.

## 2. A mérési összeállítás

### 2.1. Mérőeszközök (a mérési leírásban szereplő jelöléseket használva)

- Hg spektrállámpa (SL) + hűtőventillátor
- Elektromágnes (M) ( $B=0,89 \text{ T/A}$ ), és a hozzá tartozó áramgenerátor
- Lencse (L1)
- Interferenciaszűrő (IF)
- Polarizátor (P)
- Fabry-Perot-interferométer (FP;  $d=8 \text{ mm}$ )
- Lencserendszer (L2)
- Webkamera
- Számítógép

Az összeállítás kis mértékben eltért a jegyzetben ábrázolttól, ott ugyanis egysoros CCD chip szerepelt a webkamera helyett, valamint egyetlen lencse az L2 lencserendszer helyett.

## 3. Kiértékelés

### 3.1. A képfájlok feldolgozása

Az interferenciagyűrűk sugarának meghatározásához először a webkamera által készített színes képeket szürkeárnyalatosra konvertáltuk a Gimp nevű programmal. Ezáltal minden pixel egy 0-255-ig terjedő számmal lett kódolva, amely az adott pixelre eső fényintenzitást jelöli.

Az Octave nevű programcsomaggal ezt a szürkeárnyalatos képfájlt numerikus mátrixszá alakítottuk, majd ebből a mátrixból az 584. sort (l. lentebb, ez a körök átmérője) elmentettük egy-egy adatfájlba. A mellékletben található az ezt végrehajtó zeeman.m nevű szkript. Az adatsorokat gnuplottal ábrázoltuk, az ábrázoláshoz felhasznált zeeman.plot szkript és a megfelelő nevű intenzitásgrafikonok a mellékletben találhatók.

A középponttól kifelé számolt első öt interferenciagyűrű adataival dolgoztunk: egy-egy fájlba kézzel felvettük az ezeket az intenzitáscsúcsokat elválasztó "osztópontokat". Ezután a peak.m (l. Melléklet) nevű Octave-szkript megkereste ezen osztópontok között a maximumok helyét és intenzitását, és ezeket az adatokat megfelelő néven elmentette egy fájlba. Kézzel visszaellenőriztük, hogy reális helyekre tette-e a csúcsokat, és ha nem, módosítottunk az osztópontokon.

### 3.2. Kalibráció

A mérés kiértékeléséhez meg kellett határozni, melyik az a pixelsor, amelyre valamennyi interferenciakör középpontja illeszkedik. A vízszintes és a függőleges középpontot is szimmetriatulajdonságokat kihasználva kerestük meg.

A vízszinteshez Gimp segítségével közelítőleg meghatároztuk a kérdéses helyet, majd felvettük az ettől "felfelé" 20 pixel távolságra lévő sor intenzitáseloszlás-görbéjét. Ezután a várt tengely másik oldaláról 30 pixeltől kezdve egyesével haladtunk "befelé" - az aktuális és a fentebb említett görbét együtt ábrázolva – amíg a két görbe fedésbe nem került – majd vettük a két sor számának számtani közepét, így 584-et kaptunk.

A kalibrációs kép 584. adatsorából a képfájlok feldolgozása c. szakaszban leírt módszerrel kapott öt csúcsot megnéztük a nulladik interferenciarendtől balra és jobbra is, mivel ezeknek is szimmetrikusan kell elhelyezkedniük, ebből ki lehetett számolni a függőleges középpont helyét is, amely 720 pixelnek adódott.

### 3.3. A nagyítás meghatározása

Tudjuk, hogy az egymást követő interferenciarendek ( $m$ ) gyűrűinek ( $D_m$ ) átmérői között fennáll az alábbi összefüggés:

$$D_{m-1}^2 - D_m^2 = N \cdot \frac{\lambda}{2d} = \text{const.},$$

ahol  $\lambda = 546,07\text{nm}$  a vizsgált hullámhossz,  $d = 0,008\text{m}$  pedig a Fabry–Pérot-interferométer lemezeinek távolsága.

Ez gyűrűsugárra átírva (olyan alakban, hogy  $R^2(m)$  egy egyenes egyenlete legyen):

$$R^2 = \frac{2N\lambda}{d} \cdot m + \text{const.}$$

Tehát ha ábrázoljuk a gyűrűsugarakat az interferenciarend függvényében, erre egyenest illesztünk, melynek meredeksége  $a$ , akkor a nagyítás:

$$N = \frac{d \cdot a}{2\lambda}.$$

Gnuplot programmal egyenest illesztve az adatokra  $a = 46539(\pm 1,7\%)$ -nak adódott, tehát a fenti képletből (a mértékegységek nem fontosak, mert ki fognak esni a következő számolásokban):

$$N = 3,4 \cdot 10^8$$

### 3.4. $\sigma$ -felhasadások hullámhosszeltolódása

Ha két interferenciagyűrűrendszert kettő olyan, közel azonos hullámhosszú spektrálvonalak – esetünkben a Zeeman-felhasadt vonalak – hozzák létre, melyek hullámhosszai  $\lambda$  és  $\Delta\lambda$ , akkor az azonos rendű gyűrűk sugarai és a  $\Delta\lambda$  hullámhosszkülönbség között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{4N}(R_m^2 - R_{m'}^2) \quad (4)$$

Mivel a  $\sigma$  felhasadásokból (a mágneses térre merőleges polarizációjú komponensek) csak a kétoldalra elkülönülő "csoportokat" látjuk, ezért az ezek között a csoportok között mért hullámhosszkülönbségnek a fele felel meg az eredeti energiaszinthez képesti átlagos hullámhossz-eltolódásnak.

A következő táblázat mutatja a mellékletben található mérési adatokból az előző képlet alapján számolt hullámhosszkülönbségeket. Az utolsó oszlop az öt rendből számolt eltolódások átlagának a felét, azaz  $\sigma$ -vonalak csoportjának átlagos eltolódását mutatják. A hullámhosszértékek pikométerben értendők.

$\sigma$ -felhasadások							
I (A)	B (T)	5	4	3	2	1	$\Delta\lambda$ (pm)
0,19	0,17	5,72	8,09	5,50	5,12	5,64	3,01
0,24	0,21	7,60	7,09	9,05	6,99	5,98	3,67
0,28	0,25	8,37	9,14	8,67	8,60	8,53	4,33
0,32	0,28	9,49	10,17	10,44	10,21	10,12	5,04
0,35	0,31	10,66	10,12	9,17	10,99	10,05	5,10

### 3.5. $\pi$ -felhasadások hullámhosszeltolódása

A  $\sigma$ -felhasadásokhoz hasonlóan kaphatjuk meg a  $\pi$ -felhasadások (a mágneses térrel párhuzamos polarizációjú komponensek) átlagos hullámhossz-eltolódását is, a különbség csak annyi, hogy itt a  $j=0$  csúcsokhoz képest tudjuk kiszámolni balra is és jobbra is az eltolódást, amelynek abszolútértékét mutatja a táblázat. A hullámhosszértékek itt is pikométerben vannak, az utolsó oszlopban jobb és bal oldali értékek együttes átlagát láthatjuk.

$\pi$ -felhasadások												
I (A)	B (T)	5		4		3		2		1		$\Delta\lambda$ (pm)
0,70	0,62	5,03	3,40	5,84	4,63	2,96	4,28	3,57	4,05	4,45	2,17	4,04
0,80	0,71	6,59	4,88	3,79	6,32	4,75	5,93	4,57	4,93	5,86	0,15	4,78
0,90	0,80	7,35	4,86	6,57	5,96	5,94	5,35	5,07	4,28	4,63	5,39	5,54
1,00	0,89	6,95	5,96	6,22	5,31	5,36	5,93	5,34	5,80	5,79	5,12	5,78
1,10	0,98	5,81	6,37	6,54	6,25	6,59	6,47	6,58	6,00	4,67	6,61	6,19

## 4. A Zeeman-energia és B kapcsolata, $\mu_B$ számolása

$\Delta_1 = 2\mu_B B$ , és  $\Delta_2 = 1,5\mu_B B$ -t, és a (2) egyenletet felhasználva

$$E_Z^\sigma(B) = 1,25\mu_B B \quad (5)$$

és hasonló okokból a (3) egyenletet felhasználva

$$E_Z^\pi(B) = 0,5\mu_B B \quad (6)$$

A hullámhossz-eltolódásokból az alábbi képlettel lehet a Zeeman-energiát számolni ( $\lambda_0 = 546,07\text{nm}$ ):

$$E_Z = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda_0 + \Delta\lambda}. \quad (7)$$

### 4.1. $\sigma$ -felhasadások

$I(A)$	$B(T)$	$E_z$ mért ( $\cdot 10^{-24} J$ )	$E_z$ számított ( $\cdot 10^{-24} J$ )	Eltérés (%)
0,19	0,1691	1,96	2,00	2,0
0,24	0,2136	2,48	2,44	1,6
0,28	0,2492	2,89	2,88	0,3
0,32	0,2848	3,30	3,36	1,8
0,35	0,3115	3,61	3,40	6,2

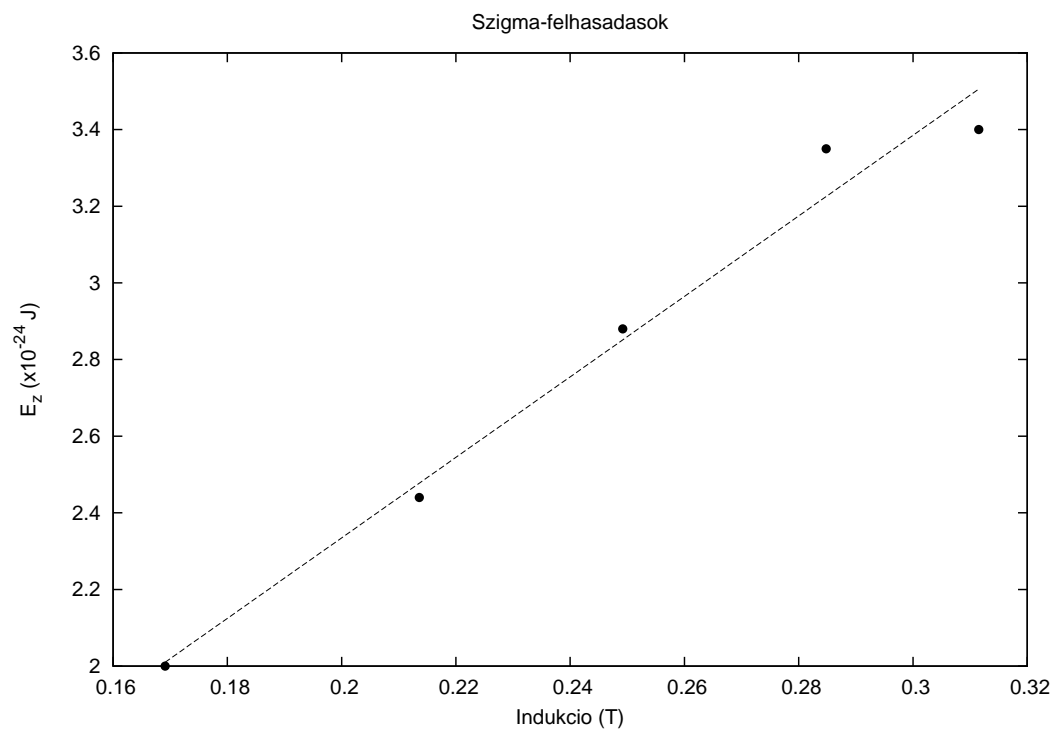
A  $\sigma$ -felhasadások Zeeman-energiája. A 1.4 alapján számított és a (7) alapján mért eredmények, valamint az azok közti eltérés.

Az  $E_{Zm}(B)$  függvény pontjaira egyenest illesztettünk, melynek meredeksége:

$$m_\sigma = (10,5 \pm 0,9) \cdot 10^{-24} J/T,$$

ezért a

$$\mu_B = (8,4 \pm 0,7) \cdot 10^{-24} J/T$$



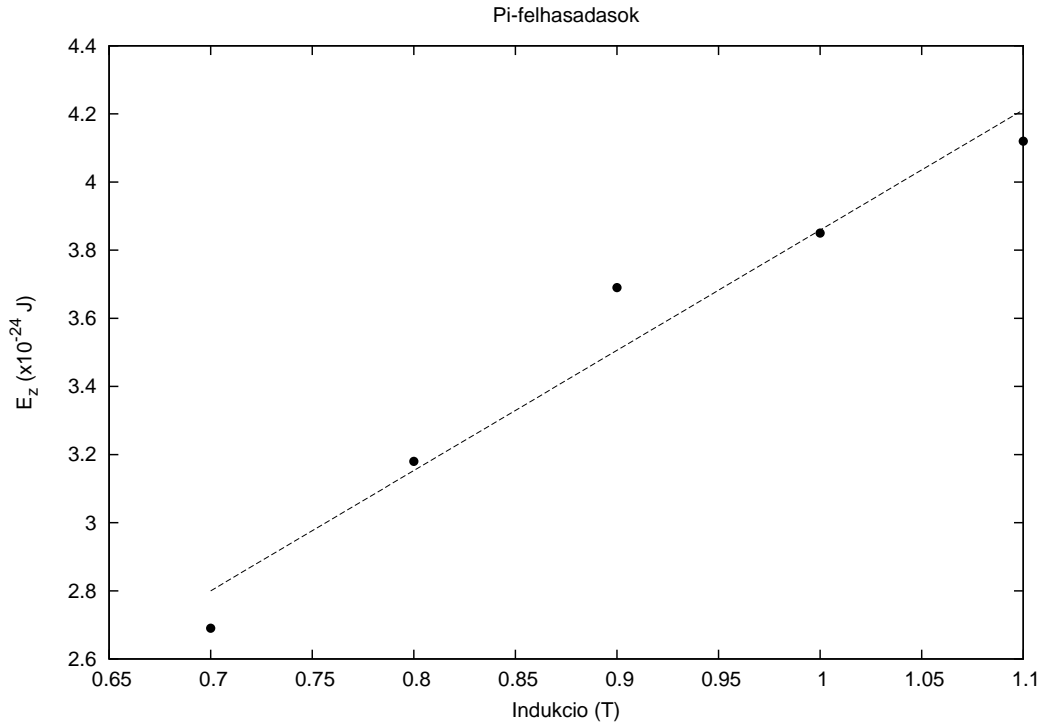
## 4.2. $\pi$ -felhasadások

$I(A)$	$B(T)$	$E_z$ mért ( $\cdot 10^{-24} J$ )	$E_z$ számított ( $\cdot 10^{-24} J$ )	Eltérés (%)
0,7	0,623	2,89	2,69	7,4
0,8	0,712	3,30	3,18	3,8
0,9	0,801	3,71	3,69	0,5
1,0	0,89	4,13	3,85	7,3
1,1	0,979	4,54	4,12	10,2

A  $\pi$ -felhasadások Zeeman energiája. A 1.4 alapján számított és (7) alapján mért eredmények, valamint az azok közti eltérés.

Ezeknél az adatoknál is egyenest illesztettünk a  $E_{Zm}(B)$  függvény pontjaira, ennek meredeksége  $m_\pi = (3,5 \pm 0,4) \cdot 10^{-24} J/T$ . Ebből

$$\mu_B = (7 \pm 0,8) \cdot 10^{-24} J/T \quad (8)$$

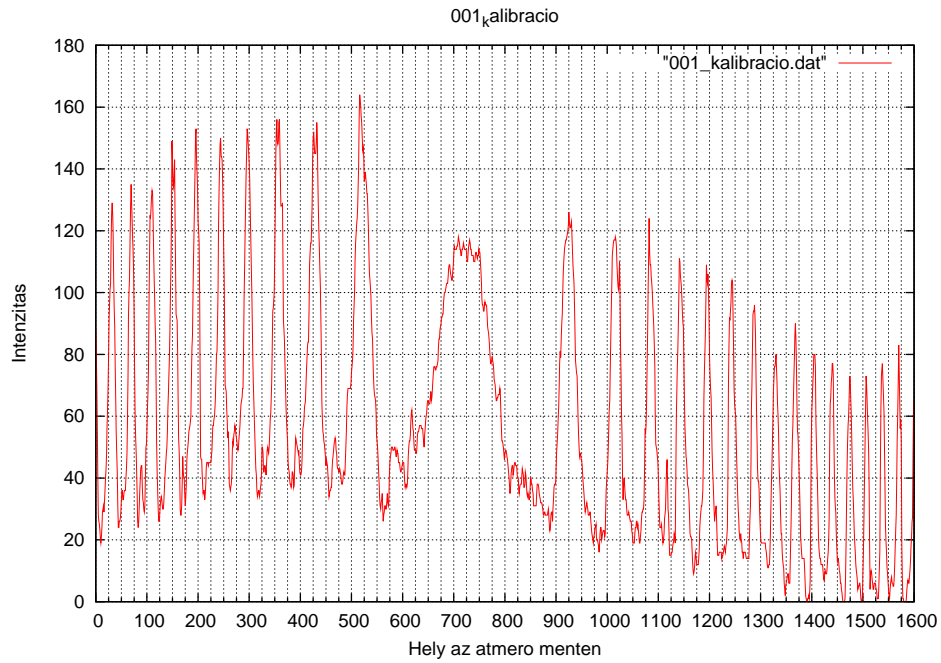


A fenti adatok viszonylag jó egyezést mutatnak a szakirodalomban elfogadott  $9,27 \cdot 10^{-24} J/T$  értékkel; az eltérés valószínűleg abból következik, hogy az interferenciakép kis mértékben aszimmetrikus volt, azaz az egyik oldalon sűrűbben követték egymást a gyűrűk, mint a másikon (az eltérés ugyan nem volt számottevő, de ilyen kis nagyságrendeknél már így is nagy változást idézett elő).

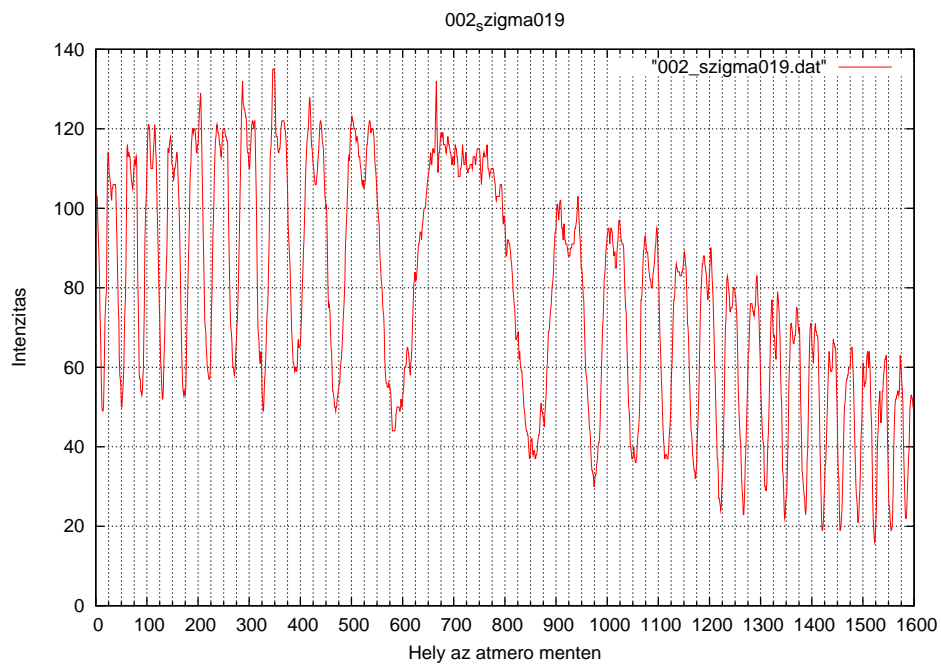


## 5. Melléklet

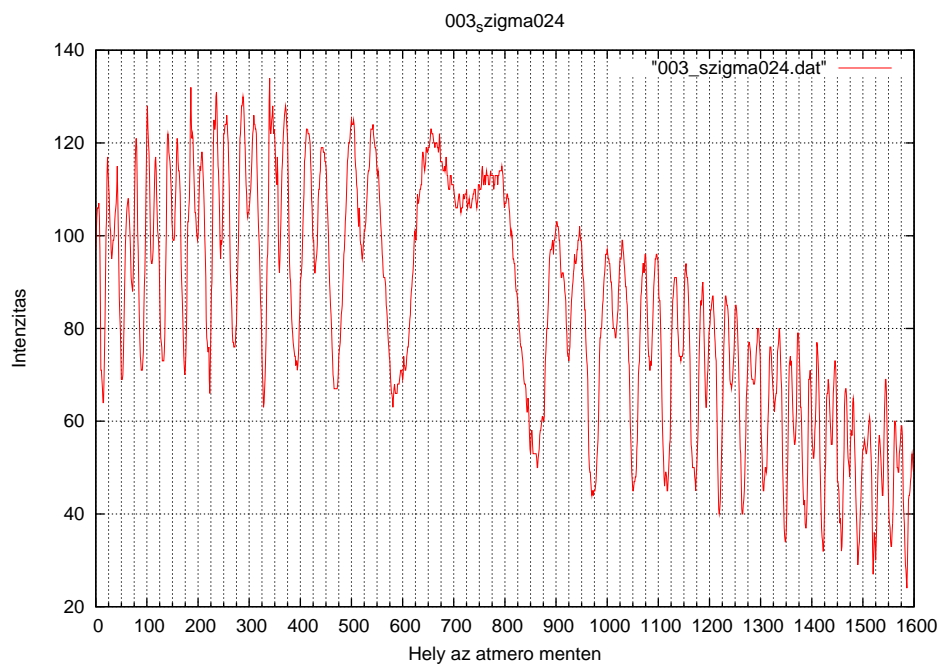
### 5.1. Intenzitásgrafikonok



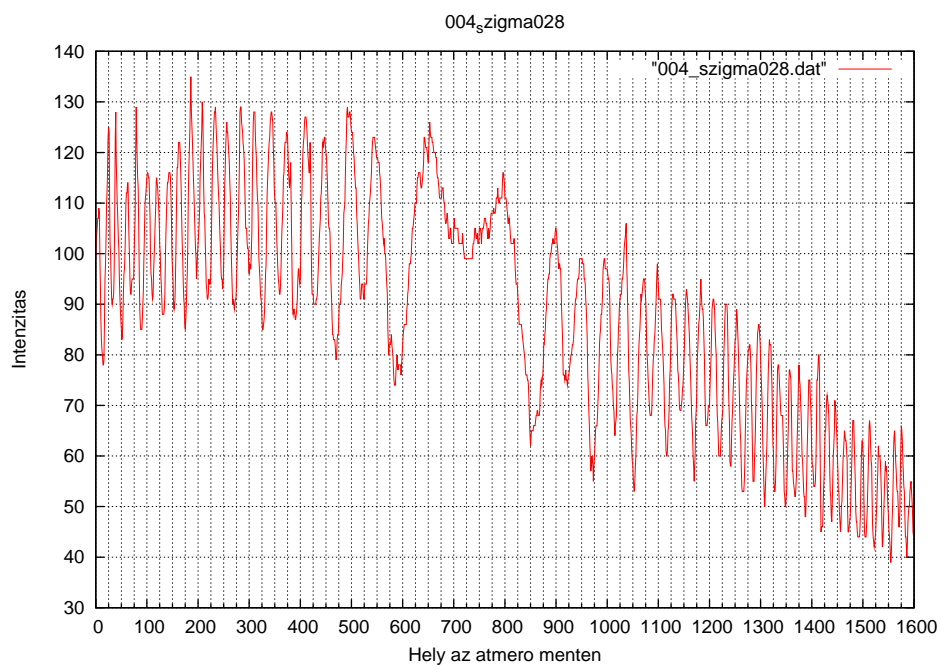
2. ábra.



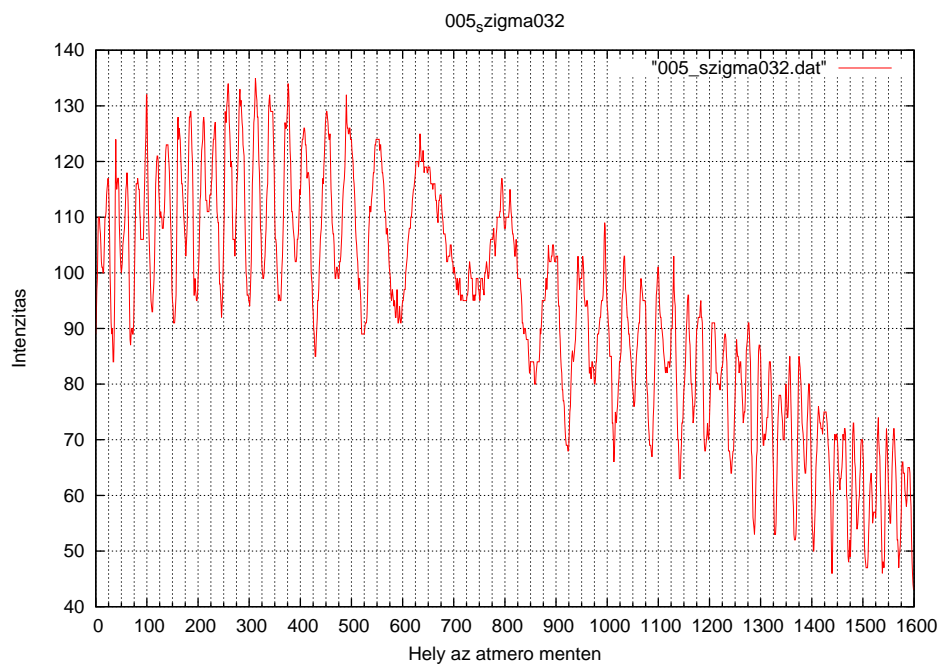
3. ábra.



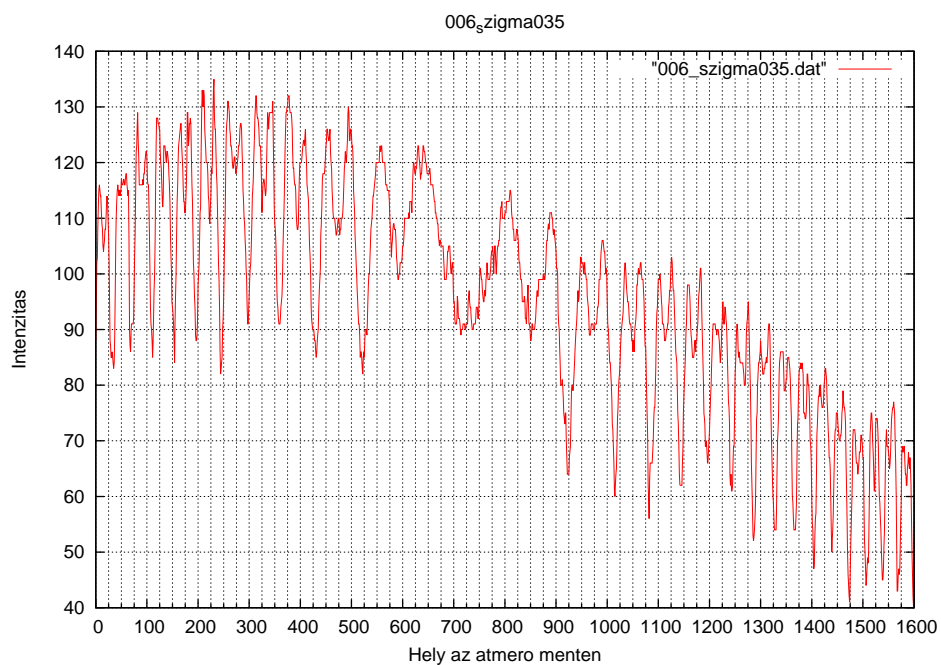
4. ábra.



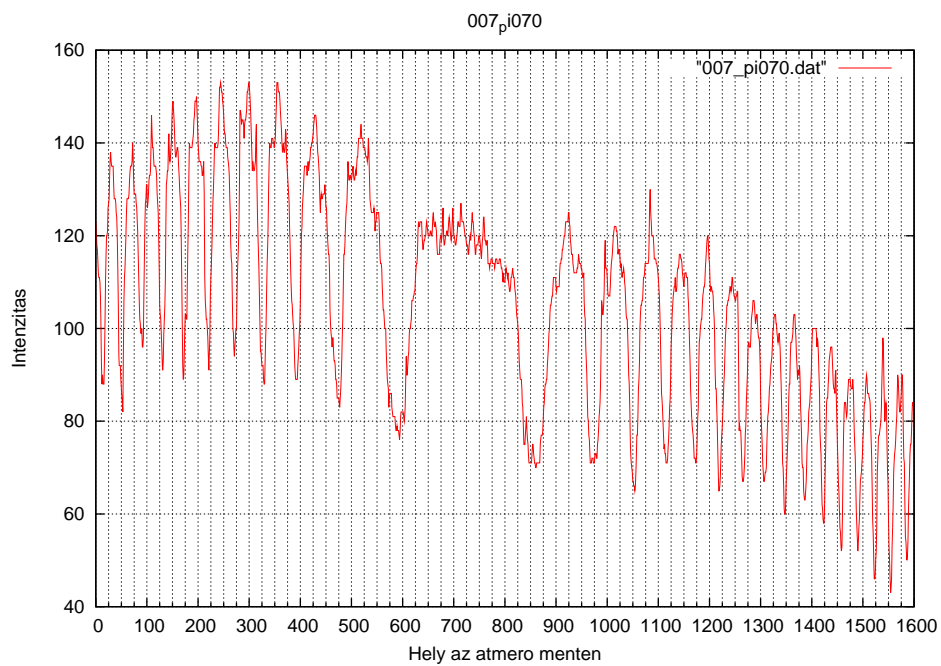
5. ábra.



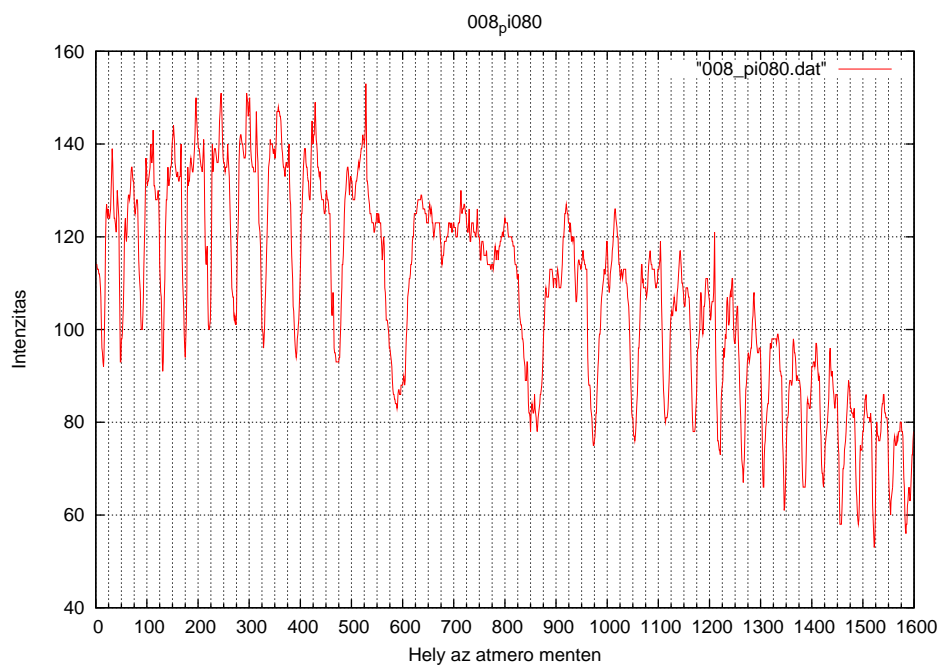
6. ábra.



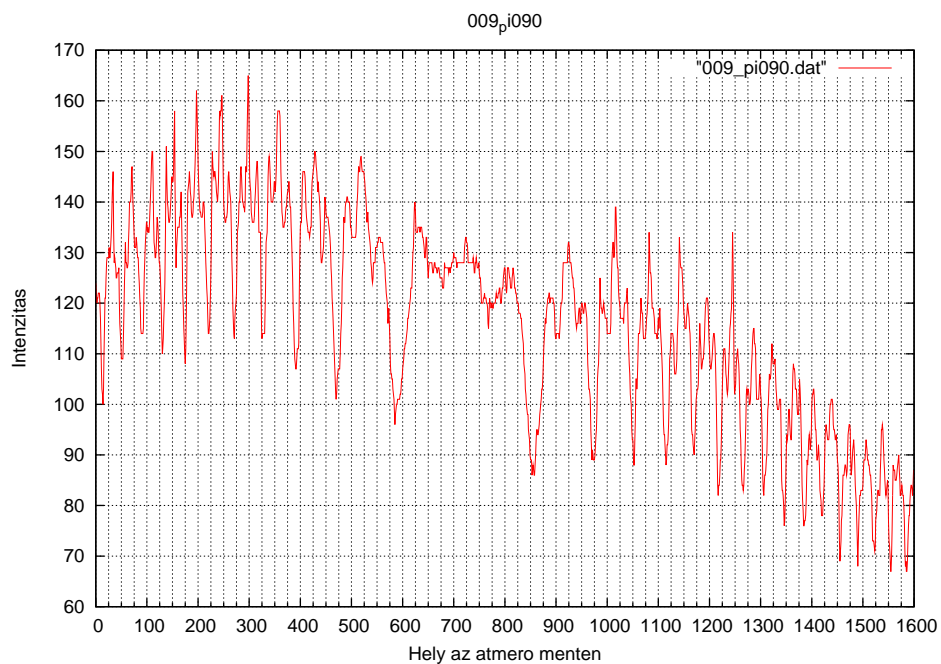
7. ábra.



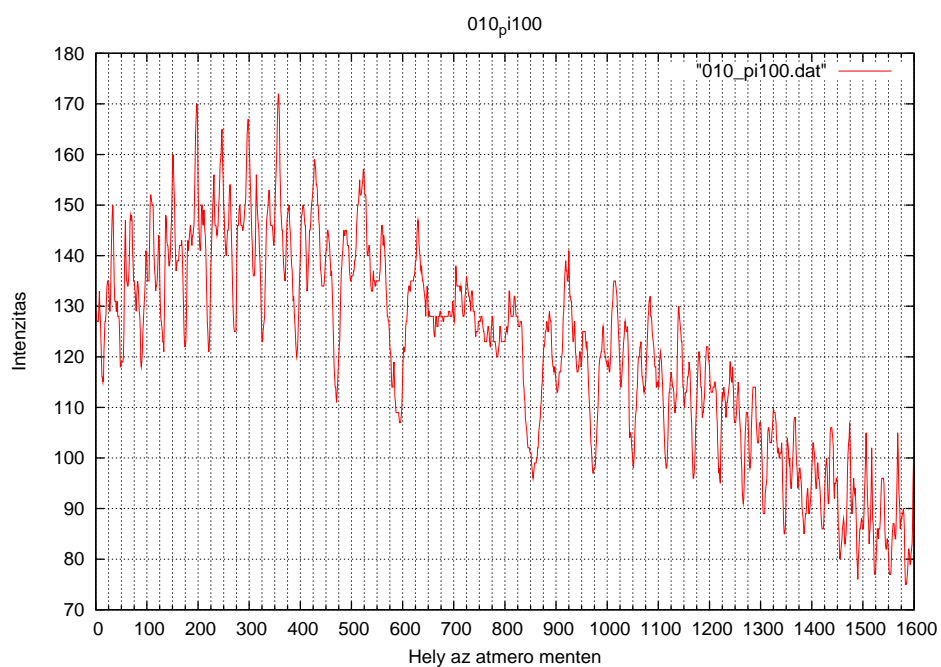
8. ábra.



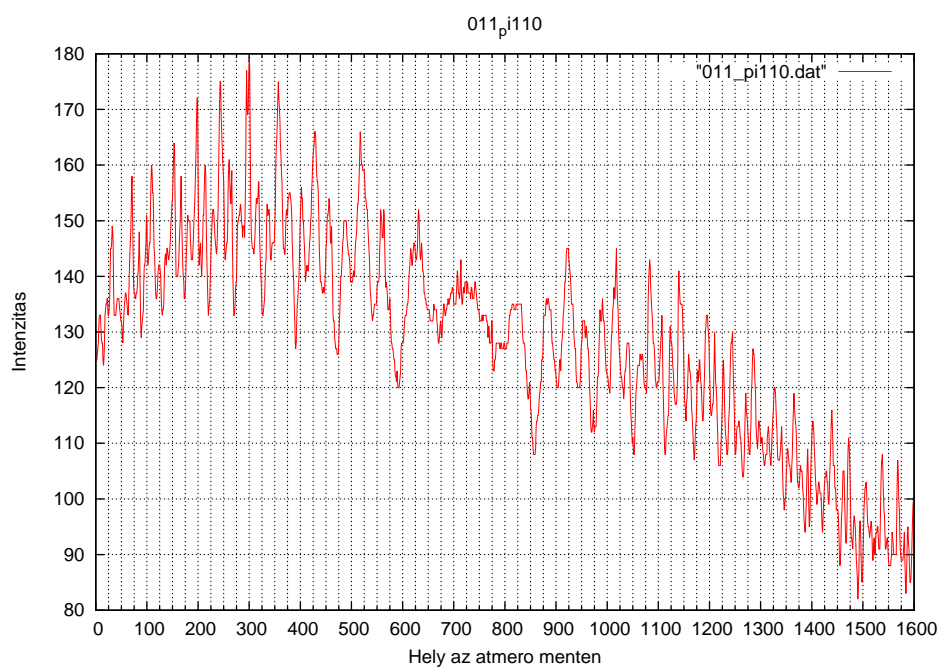
9. ábra.



10. ábra.



11. ábra.



12. ábra.

## 5.2. Szkriptek

### 5.2.1. zeeman.m

```
function zeeman(filename)

% Értékadás:

img=strcat(filename, ".bmp");
datazee=strcat(filename, ".dat");

% A képekből a megfelelő adatsor kivétele:

tempmx=imread(img);
tempvect=tempmx(584,:);
vect=tempvect';
x=[1:1:1600]';
save("-ascii", datazee, "vect")

endfunction
```

### 5.2.2. zeeman.plot

```
#!/bin/sh

gnuplot << EOF

set term po eps color enh
set output "$1.eps"

set xla "Hely az atmero menten"
set yla "Intenzitas"
set title "$1"

set xtics 100
set mxtics 4
set grid mxtics
set grid xtics
set grid ytics

plot "$1.dat" w l
set output

EOF
```

### 5.2.3. peak.m

```
function peak(file, osztofile)

adat=load(file);
osztó=load(osztófile);

kimenet=strcat("csucs_", file);

for i=1:(length(osztó)-1)
f(i)=max(adat(osztó(i):osztó(i+1)));

for j=osztó(i):osztó(i+1)
if (adat(j) == f(i))
z(i)=j;
endif;
endfor;
endfor;

A(:,1)=z';
A(:,2)=f';

save("-ascii", kimenet, "A")

endfunction
```



### 5.3. Csúcsok helye és intenzitása

1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11	
475	150	482	121	483	131	485	129	485	127	488	135	488	134	491	140	491	150	490	150	490	152
423	153	467	120	463	126	463	126	460	134	460	131	475	153	474	151	472	161	472	165	475	175
360	156	432	132	431	130	435	129	437	133	435	127	466	142	461	140	459	146	456	154	458	161
287	155	408	122	410	126	408	128	407	135	405	132	436	147	435	142	440	136	439	149	438	151
203	164	370	135	379	134	375	128	379	132	373	131	419	153	424	151	421	165	421	167	419	179
		351	122	348	128	345	124	343	134	341	132	405	144	405	147	403	148	405	156	400	157
		301	128	305	123	308	127	311	126	309	126	373	141	378	141	380	149	380	153	384	153
		279	122	275	119	271	123	267	129	261	126	363	153	362	148	360	158	362	172	362	175
		218	123	215	125	227	129	229	132	225	130	348	143	341	140	341	144	341	150	339	155
		183	122	177	124	174	123	165	124	160	123	304	136	309	139	311	146	313	150	317	156
												289	146	290	149	290	150	291	159	290	166
												271	131	268	130	271	141	265	145	263	154
												226	136	226	135	227	141	229	145	229	150
												200	144	191	153	200	149	195	157	202	166
												186	141	190	145	163	133	159	146	156	152