

18. Granuláris anyagok

Modern fizika laboratórium, Fizika BSc

Bokányi Eszter (BOERAAT.ELTE), Radics Máté (RAMRAAT.ELTE)

Mérés időpontja: 2011. március 21.

Leadás időpontja: 2011. április 7.

Érdemjegy:

1. Bevezetés

1.1. A granuláris anyagok

Granuláris vagy szemcsés anyagoknak azokat a rendszereket nevezzük, amelyek nagy számú ($10^4 - 10^{15}$) makroszkopikus ($10\ \mu m - 10\ m$) részecskékből állnak. Ebben a mérettartományban a részecskékre ható erők a gravitációs erő, a két részecske összenyomásakor fellépő taszítóerő, és az érintkezési pontokban fellépő súrlódási erő; a legegyszerűbb esetben a részecskék közti esetleges kölcsönhatás(ok)tól eltekintünk.

A részecskék átlagos helyzeti energiájához képest az egy szabadsági fokra jutó $k_B T$ termikus energia elhanyagolható, így a granuláris anyagokat nem lehet statisztikus fizikai módszerekkel leírni. Nem alakul ki termikus egyensúly, külső behatás nélkül a rendszer bármely metastabil állapota fennmarad; keveredés és homogén eloszlások kialakulása helyett rendeződés és szegregáció lép fel, valamint komplex struktúrák alakulnak ki.

1.2. A mérés elve

1.2.1. A nyomás mélységfüggése granuláris oszlopokban - a Janssen-modell

Egy R sugarú, ρ átlagos sűrűségű granuláris anyaggal töltött hengeres edényt vizsgálunk. A Janssen-modell főbb feltételezései:

- A függőleges nyomás nagysága csak a mélységtől függ:

$$P(x, y, z) = P(z) \quad (1)$$

- A vízszintes irányban mérhető nyomás arányos a függőleges nyomással:

$$P_{\text{hor}} = K P(z) \quad (2)$$

- A falaknál fellépő tapadási súrlódási erők mind felfelé mutatnak, és maximális értéküket veszik fel:

$$dF_{\text{frict}} = \mu K P(z) \cdot 2R\pi dz, \quad (3)$$

ahol μ a fal és az anyag közti súrlódási együttható.

Az anyag minden dz vastagságú, $S = R^2\pi$ felületű vízszintes szeletének egyensúlyban kell lennie. Ezekre a szeletekre hat a gravitációs erő, a fölötte és alatta mérhető nyomás különbségéből adódó erő és a falaknál fellépő súrlódási erő:

$$\rho g S dz - \frac{dP(z)}{dz} S dz - dF_{\text{frict}} = 0 \quad (4)$$

A (3) egyenletet behelyettesítve:

$$\frac{dP(z)}{dz} + \frac{1}{\lambda} P = \rho g \quad (5)$$

ahol

$$\lambda = \frac{R}{2\mu K}$$

Az (5) lineáris differenciálegyenletet megoldása a $P(0) = 0$ kezdeti feltétellel:

$$P(z) = \lambda \rho g \left(1 - e^{-z/\lambda}\right) \quad (6)$$

Vagyis z növelésével a nyomás λ karakterisztikus távolságon exponenciálisan telítésbe megy. A konkrét feladatra felírva az egyenletet:

$$P(z) = m_{\infty} \left(1 - e^{-m/m_{\infty}}\right) \quad (7)$$

A mérés során szeretnénk meghatározni m_{∞} értékét, és így a fenti összefüggést igazolni.

1.3. Mérészközök

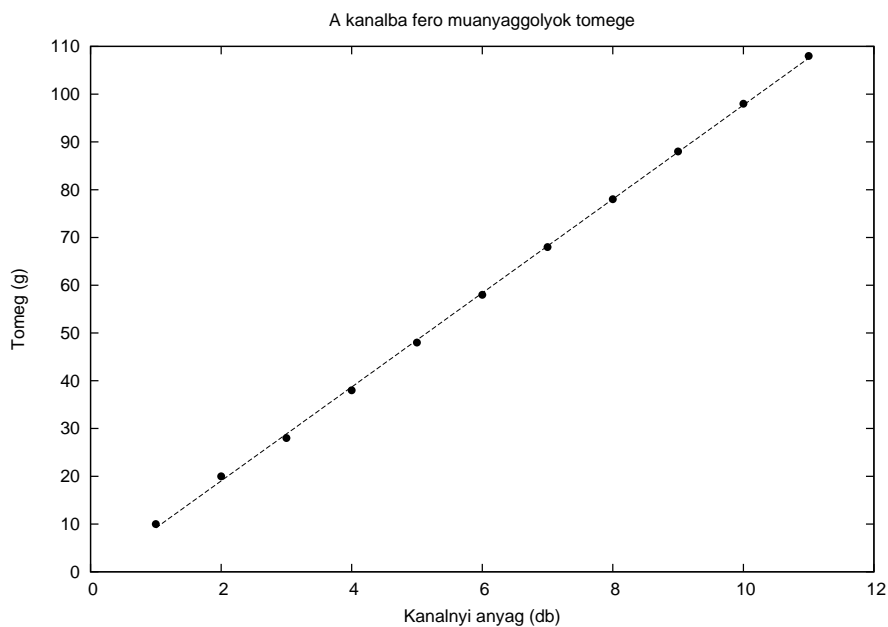
- Granuláris anyagok: műanyag- és üveggolyók, valamint köles
- Műanyagpoharak és mérőkanál
- Üveghenger
- Táramérleg
- Talpas fémhenger szorosan beleilleszkedő dugattyúval
- Indigó
- Karton- és fénymásolópapír

2. A mért adatok

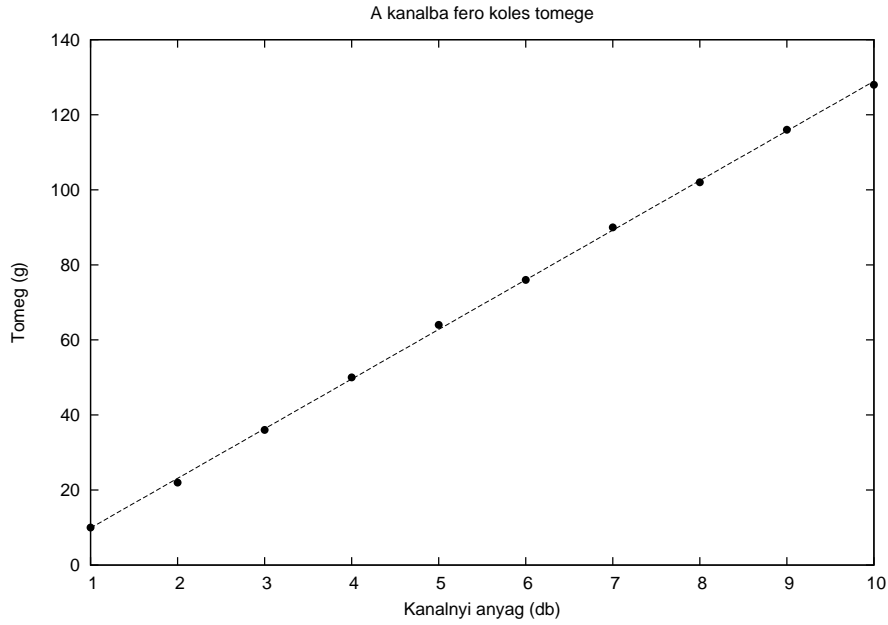
2.1. Kalibráció

A granulátumokat műanyagpohárból töltöttük a hengerbe; a pohárba mérőkanállal raktuk az anyagot. Meg kellett mérni, hogy hány g egy kanálnyi, illetve egy pohárnyi anyag tömege. Együttal a mérleg érzékenységét is ellenőriztük.

Kanál	Műanyag (g)	Köles (g)
1	10	10
2	20	22
3	28	36
4	38	50
5	48	64
6	58	76
7	68	90
8	78	102
9	88	116
10	98	128
11	108	—



Egy kanálnyi műanyaggyökö tömege (= meredekség): $m_{mua} = 9,84 g \pm 0,6\%$



Egy kanálnyi köles tömege: $m_{kol} = 13,22 \text{ g} \pm 0,6\%$

2.2. A Janssen-együttható kiszámítása

A Janssen-együttható megadásához szükséges összefüggések (5), (6) és (7) alapján:

$$\lambda = \frac{R}{2\mu K}; \lambda = \frac{m_\infty}{\rho A}, \quad (8)$$

amelyből a K Janssen-együttható triviálisan következik:

$$K = \frac{R}{2\mu\lambda} \quad (9)$$

A sűrűséget a henger $d = 4,7$ cm-es átmérőjéből, valamint a benne lévő anyag magasságából számíthatjuk. A henger keresztmetszete $A = 17,35 \text{ cm}^2$ -nek adódott.

2.3. A súrlódási együttható meghatározása

A Janssen-együttható kiszámolásához tudnunk kell az üveg és a két granuláris anyag között fellépő tapadási súrlódási együtthatójának nagyságát.

Ennek meghatározásához rendelkezésünkre állt egy üveglap, amely ugyanabból az anyagból készült, mint a henger, amivel mértünk, ill. egy könnyű papír téglatestre a granuláris anyagainkból egy-egy sor ráragasztva. A téglatestet (a mérendő granuláris anyaggal lefelé) ráhelyeztük az üveglapra, amelyet lassan elkezdtünk dönteni. Megkerestük azt a szöget, amelynél a téglatest éppen elindul. Ennek a szögnek a tangense lesz a tapadási súrlódási együttható.

Mi közvetlen módon a szög szinuszát mérük, mert a lejtő összes hossza $L = 25,0(0,1)\text{cm}$ (hibája elhanyagolható a magasság hibájához képest), ill. megmértük mindkét esetben a lejtő magasságát:

- $h_{muanyag} = 5,3(0,5)\text{cm}$; $\delta h = 9\%$
- $h_{koles} = 5,4(0,5)\text{cm}$; $\delta h = 9\%$

A hibákat hozzávetőlegesen becsültük, a magasságértékeké abból származik, hogy nagyon pontatlanul lehetett csak beállítani a szöget, amelynél elindult a téglatest. Mivel

$$\mu_0 = \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}, \quad (10)$$

ezért

- $\mu_0^{muanyag} = 0,216$; $\delta \mu_0 = 9\%$ kb. marad, a számolások után is;
- $\mu_0^{koles} = 0,221$; $\delta \mu_0 = 9\%$.

2.3.1. Műanyaggyölyök

n	1. mérés	2. mérés	3. mérés
1	42	32	34
2	54	60	56
3	64	80	74
4	76	94	90
5	92	106	108
6	104	120	112
7	114	132	118
8	124	142	128
9	132	148	142
10	140	152	148
11	146	162	156
12	150	168	158
13	156	174	162
14	160	178	166
15	162	184	168
16	164	186	168
17	172	186	174
18	172	188	174

A görbékre $P(z) = m_{\infty} (1 - e^{-m/m_{\infty}})$ alakú görbét illesztettünk (ld. 1, 2, 3. ábrák). Az illesztési paraméter m_{∞} értéke:

1. mérés: 174 ± 3 g

2. mérés: 205 ± 2 g

3. mérés: 185 ± 2 g

Ezek átlaga: 188 g $\pm 8\%$. A sűrűdési együttható: $\mu_{mua} = 0,216 \pm 9\%$, a hengerben lévő anyag magassága $h = 49,5$ cm volt. Ezekből adódik, hogy $V_{henger} = 858,83$ cm³, amiből a hengerben lévő 3·18 kanálnyi anyag tömegének ($m = 3 \cdot 18 \cdot 9,84 = 531,36$ g $\pm 0,6\%$) ismeretében: $\rho_{mua} = 0,619$ g/cm³, azaz $\lambda = 17,5$ 1/cm. (9)-be behelyettesítve megkapjuk a keresett eredményt:

$$\mathbf{K_{muanyag} = 0,3107 \pm 17,6\%}.$$

2.3.2. Köles

n	1. mérés	2. mérés	3. mérés
1	40	40	36
2	66	70	64
3	84	82	82
4	100	98	102
5	112	114	110
6	126	128	122
7	138	138	134
8	146	146	142
9	158	152	146
10	160	160	152
11	164	164	158
12	168	168	162
13	174	170	166
14	176	174	168
15	176	178	170
16	184	182	172
17	186	186	176
18	184	188	176

Ezekre az adatokra is görbét illesztettünk (ld. 4, 5, 6. ábrák). Az illesztési paraméter értéke:

1. mérés: $183,74 \pm 1,84$ g
2. mérés: $183,19 \pm 2,01$ g
3. mérés: $173,41 \pm 1,58$ g

Az előző logikát követve: $\bar{m}_\infty = 180,11$ g $\pm 3\%$; $\mu_{kol} = 0,221 \pm 9\%$; $h = 61,6$ cm $\rightarrow V_{henger} = 1070,5$ cm³ $\rightarrow \rho_{kol} = 0,667$ g/cm³ $\rightarrow \lambda = 15,56$ 1/cm \rightarrow

$$K_{koles} = 0,3417 \pm 12,6\%.$$

3. A mikroszkopikus erőeloszlás vizsgálata

3.1. Elméleti háttér - a q-modell

A q-modell a granuláris anyagokban lévő erőláncok lefutásának statisztikus leírására szolgál: jóslatot ad az egyes szemcsékre ható erők eloszlására. A modell feltevései megtalálhatók a mérési leírásban.

Ezek alapján a feltevések alapján a q-modell az alábbi erőeloszlás-alakot jósolja nagy v redukált súlyok esetén:

$$P(v) = Av^{N-1}e^{-\alpha v} \quad (11)$$

Látható, hogy ez az eloszlás sokkal lassabban cseng le, mint a Gauss-eloszlás: mérésünkben éppen ezt kívánjuk megmutatni.

3.2. A mérés leírása

Az erőeloszlás méréséhez kis üveggolyókból álló granuláris anyagot használtunk. Először egy üreges fémhenger alaplapjának helyére tettünk fehér papírlapot, arra indigót. Ezután a hengert feltöltöttük az üveggolyókkal. A hengerbe jól illeszkedő másik, dugattyúszerű hengert beletettük, majd egyikünk ráállt az elrendezésre (így lett nagyon nagy a redukált súly az alsó szemcséken).

Ekkor az alsó szemcsék belenyomódtak az indigóba, amely gondosan kivitelezett mérés esetén a nyomóerő nagyságával arányos foltot hagyott a fehér papíron. A henger szétszedése és a papír kivétele után még ötször megismételtük a mérést, lehetőleg minden alkalommal ugyanakkora súllyal terhelve a golyókat. A kapott öt papírlapot 600 dpi-ben, szürkeárnyalatos színmélységben beszkeneltük, majd a szkennelt képekből digitálisan kivágtuk a munkánkhoz szükséges öt körlapot, amelyek a belenyomódási mintázatokat tartalmazták. A képek végig veszteségmentes BMP-formátumban voltak.

A labor honlapján található kiértékelőprogramokkal nyertük ki adatainkat a képfájlokból. Először a *dispot* nevű programmal 245-ös küszöbszintnél meghatároztuk a foltok méretét mind az öt képen, majd a kapott adatokat egyetlen szövegfájlba összefésülve a *histog* programmal eloszlást készítettünk belőlük. 15-ös dobozméretet használtunk, mert többet is kipróbálva (ld. 7. ábra) ez látszott legalkalmasabbnak.

3.3. A mért adatok

A 8. és a 9. ábrán látható az öt mérés összesített adataiból készített erőeloszlás decimális, ill. logaritmikus skálán, a rájuk illeszteni próbált eloszlásokkal együtt.

A logaritmikus skálán jól látszik, hogy az eloszlás korántsem cseng le annyira, mint a Gauss-görbe, bár nem illeszkedik tökéletesen a q-modell által kínáltra sem. Az viszont mindenképpen egyértelmű, hogy a nagyobb erők súlya ezen elrendezésben sokkal jelentősebb volt, mint egy normáeloszlástól várnánk.

Az illesztett görbék alakja:

- Gauss- (normális) eloszlás: $f(x) = ae^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$
- q-modell: $f(x) = Ax^{N-1}e^{-\alpha x}$

Az illesztések eredményei az 8. és a 9. ábrákon láthatók.

	a	m	σ	A	N	α
1. mérés	$62550 \pm 336\%$	$-342 \pm 64\%$	$112 \pm 28\%$	$535 \pm 18\%$	$1,06 \pm 7\%$	$0,032 \pm 7\%$
2. mérés	$2119 \pm 141\%$	$-162 \pm 67\%$	$89 \pm 26\%$	$317 \pm 28\%$	$1,1 \pm 10\%$	$0,030 \pm 12\%$
3. mérés	$62453 \pm 746\%$	$-483 \pm 132\%$	$151 \pm 58\%$	$748 \pm 18\%$	$0,74 \pm 9\%$	$0,017 \pm 11\%$
4. mérés	$1382 \pm 149\%$	$-266 \pm 59\%$	$130 \pm 24\%$	$135 \pm 19\%$	$1,12 \pm 7\%$	$0,022 \pm 9\%$
5. mérés	$3648 \pm 132\%$	$-273 \pm 46\%$	$124 \pm 19\%$	$250 \pm 14\%$	$1,12 \pm 5\%$	$0,024 \pm 6\%$
Összes mérés	$70312 \pm 206\%$	$-330 \pm 50\%$	$122 \pm 26\%$	$1773 \pm 14\%$	$1,04 \pm 6\%$	$0,026 \pm 6\%$

Így látható, hogy az erőeloszlás valóban nem normális eloszlást követ, hanem a q-modellnek megfelelőt, azaz sikerült igazolni a (11) összefüggést.

3.4. Konzisztenciavizsgálat

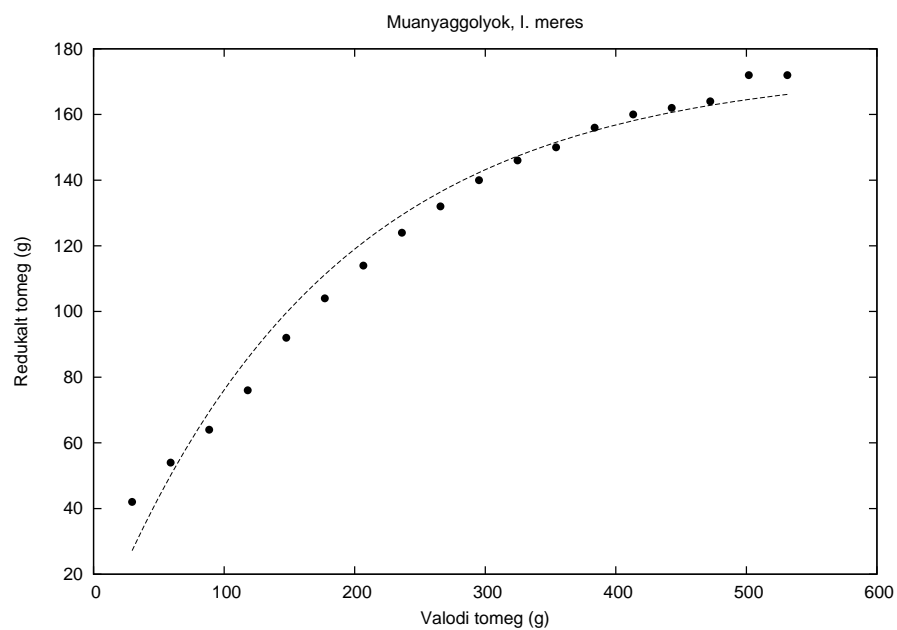
A mérés során azt is meg akartuk vizsgálni, hogy vajon az erőeloszlás, amelyet nézünk, homogén-e, vagy pl. a nagyobb erők valahova koncentrálódnak. Ezért felosztottuk a képeket: először a köröket két félkörre ("jobb" és "bal") szimmetrikusan, majd egy belső kis körre, és egy külső körgyűrűre, kb. a sugár felénél.

Az ezután következő ábrák mutatják be, hogy a körlapok két fele, ill. a közepe és a külső része közötti eloszlás között van-e különbség.

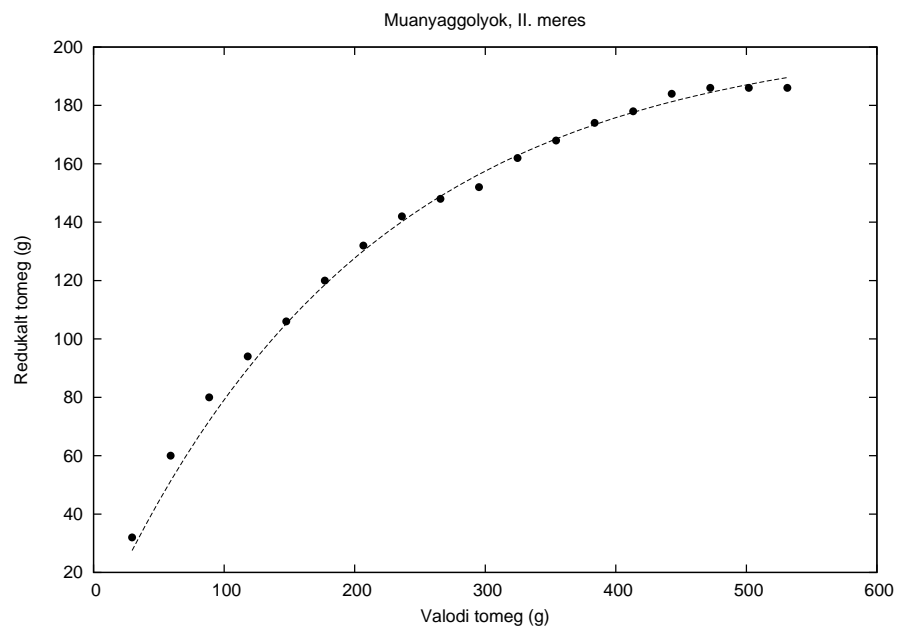
Az illetékt eloszlások paramétereit tartalmazza a következő táblázat:

	a	m	σ	A	N	α
Bal oldali félkörök	$26881 \pm 277\%$	$-301 \pm 73\%$	$0.009 \pm 32\%$	$1121 \pm 20\%$	$0.98 \pm 8\%$	$0.025 \pm 9\%$
Jobb oldali félkörök	$26881 \pm 371\%$	$-301 \pm 97\%$	$0.009 \pm 42\%$	$739 \pm 28\%$	$1.1 \pm 11\%$	$0.029 \pm 12\%$
Körlapok	$26881 \pm 260\%$	$-301 \pm 67\%$	$0.009 \pm 29\%$	$634 \pm 20\%$	$1.18 \pm 7\%$	$0.031 \pm 8\%$
Körgyűrűk	$26881 \pm 365\%$	$-301 \pm 96\%$	$0.009 \pm 42\%$	$1443 \pm 23\%$	$0.9 \pm 11\%$	$0.023 \pm 12\%$

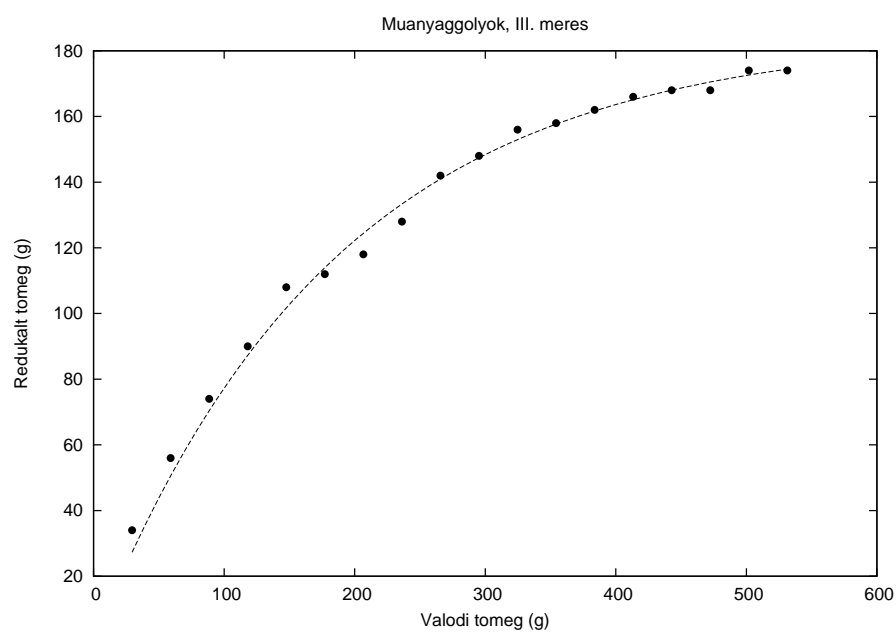
Jól látszik az ábrákból, és a táblázat adataiból, hogy míg az eloszlás tengelyesen nagyjából szimmetrikus, a nagyobb erők a külső körgyűrűbe koncentrálódnak.



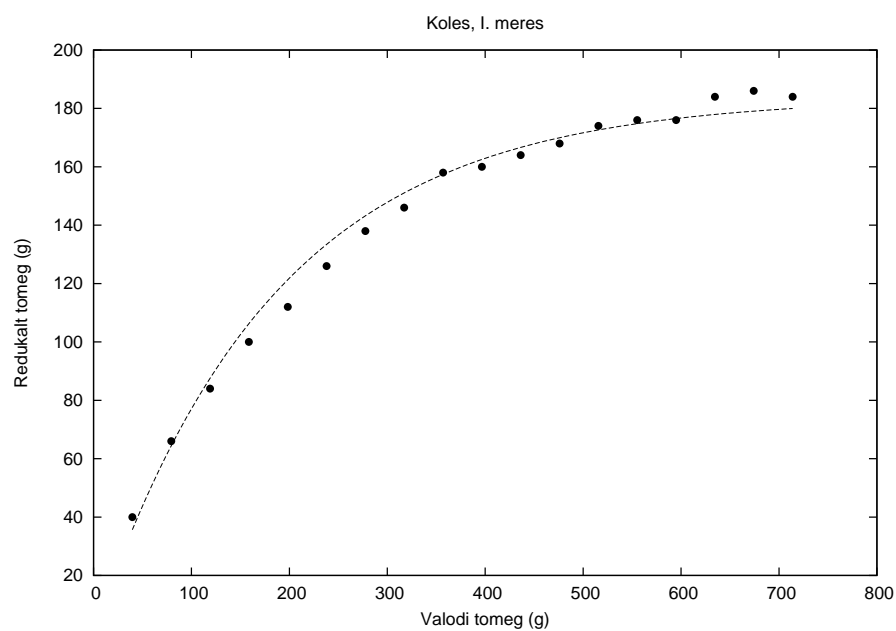
1. ábra. A műanyaggyölyök redukált tömege a valódi tömeg függvényében, I. mérés



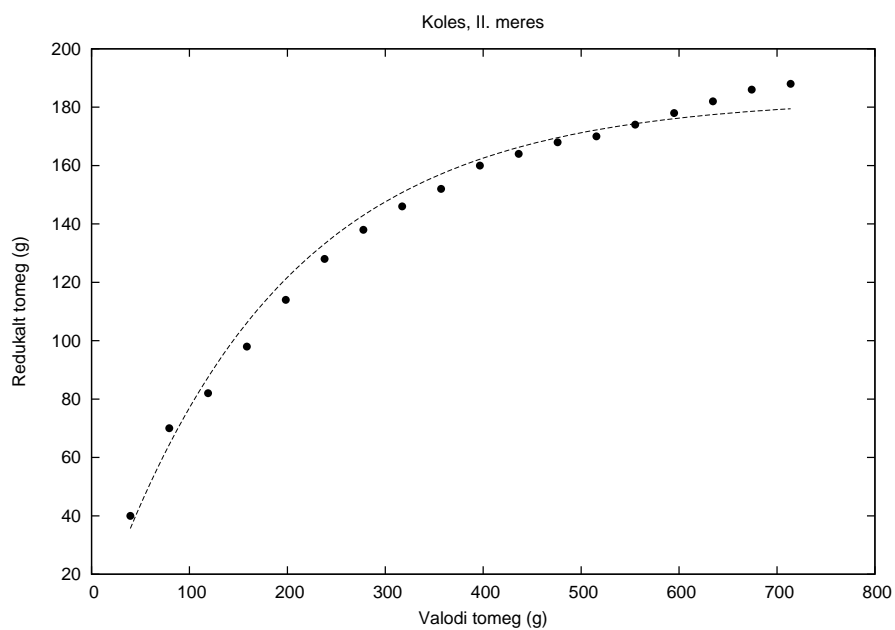
2. ábra. A műanyaggyölyök redukált tömege a valódi tömeg függvényében, II. mérés



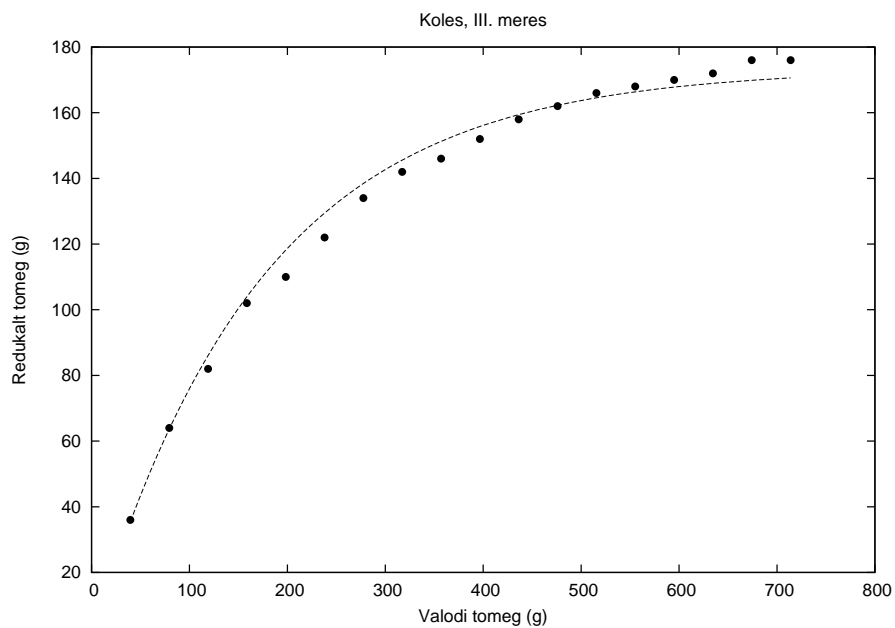
3. ábra. A műanyaggyölyök redukált tömege a valódi tömeg függvényében, III. mérés



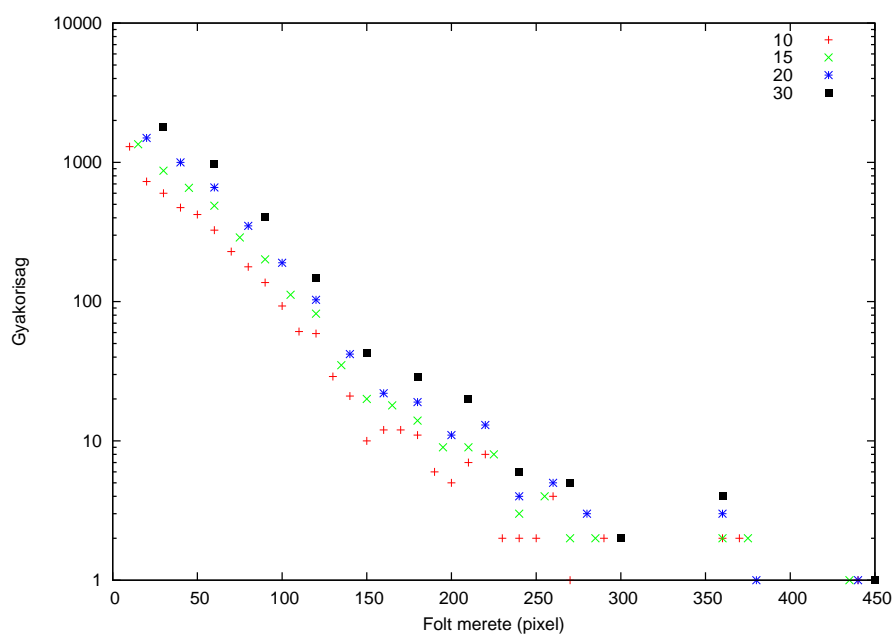
4. ábra. A köles redukált tömege a valódi tömeg függvényében, I. mérés



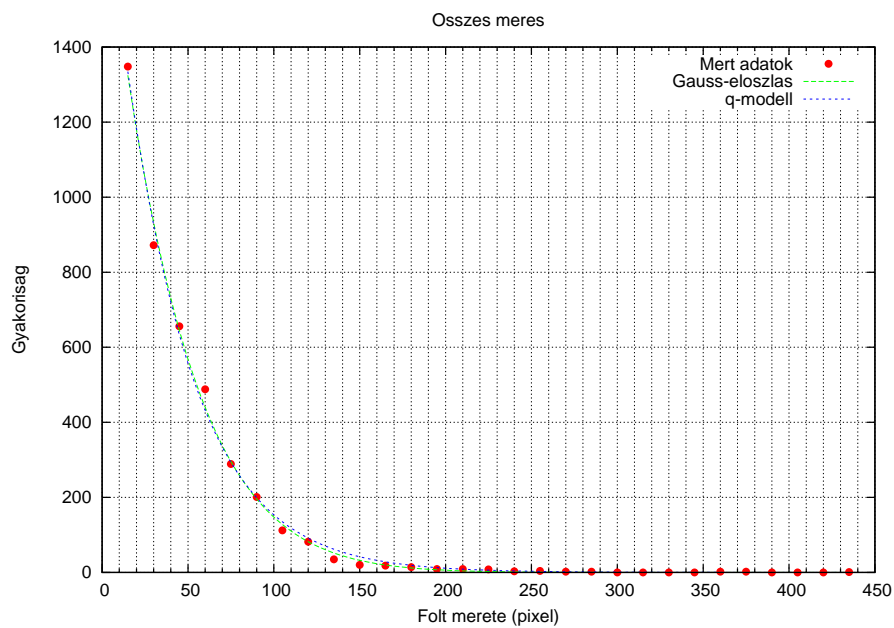
5. ábra. A köles redukált tömege a valódi tömeg függvényében, II. mérés



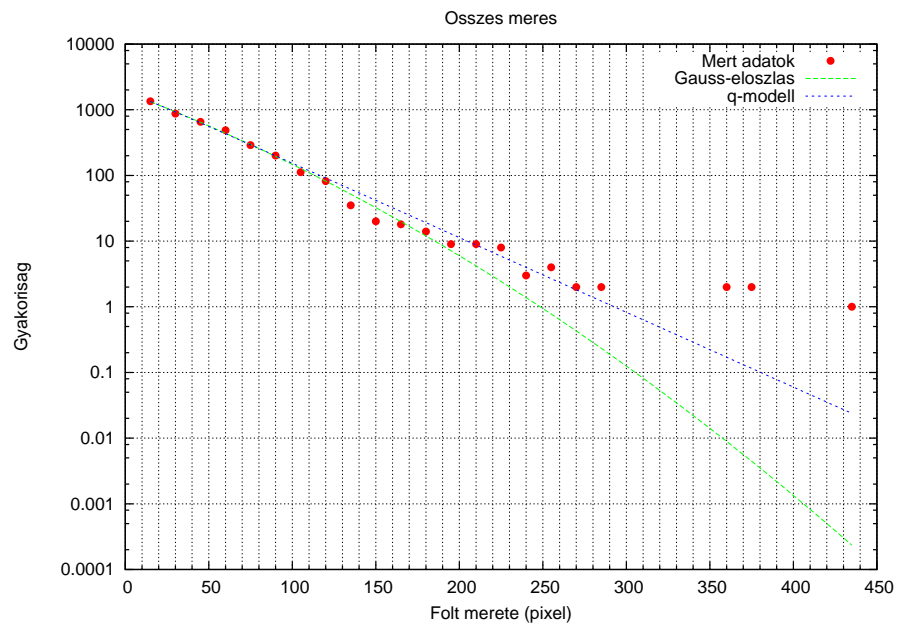
6. ábra. A köles redukált tömege a valódi tömeg függvényében, III. mérés



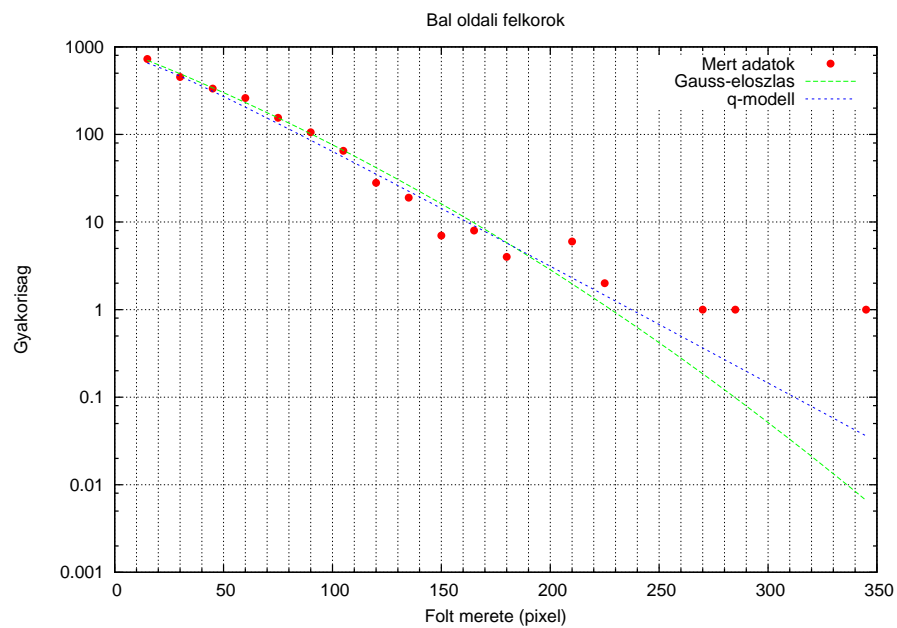
7. ábra. Hisztogram-dobozok méretének próbája



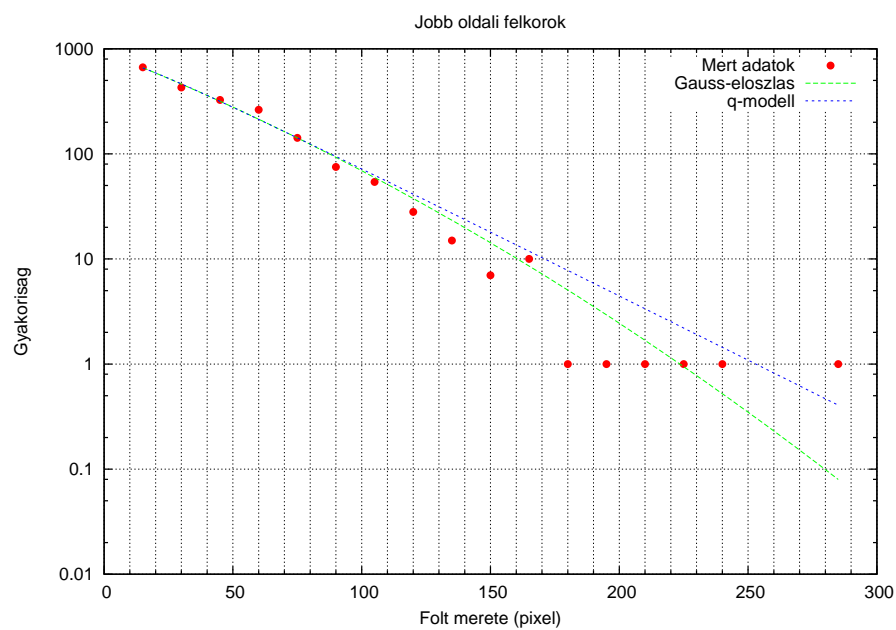
8. ábra. Az egyes foltméretek gyakorisága decimális skálán



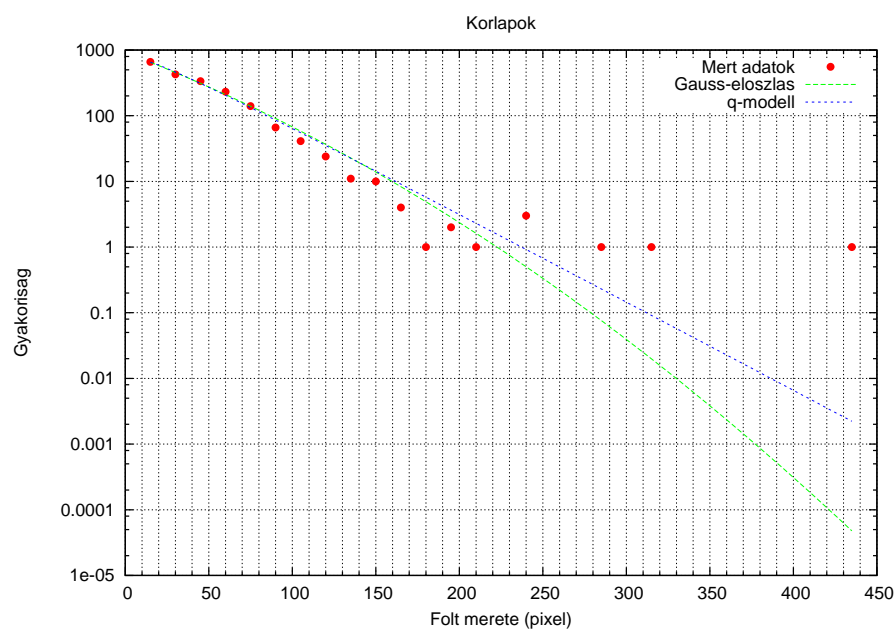
9. ábra. Az egyes foltméretek gyakorisága féllogaritmikus skálán



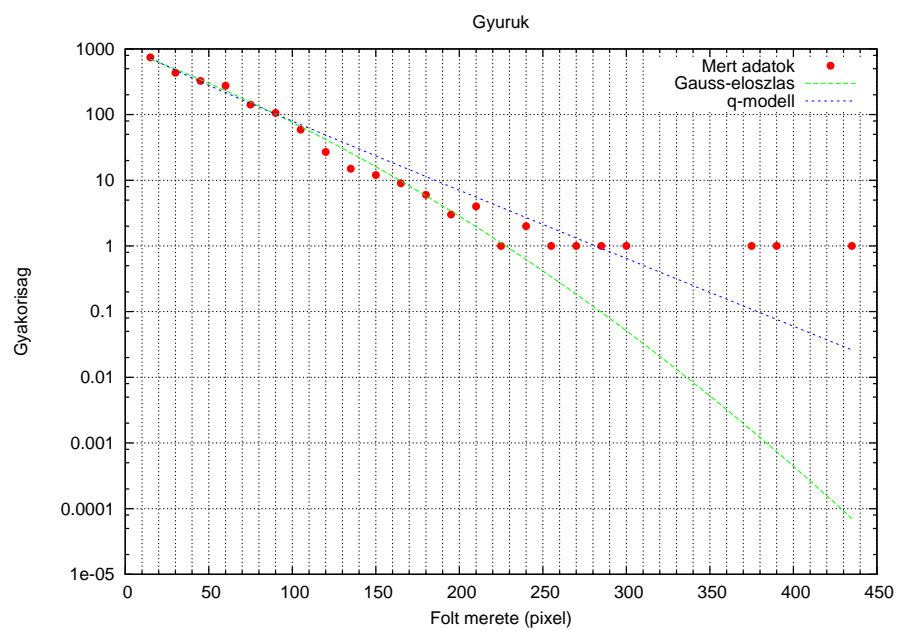
10. ábra. A foltméretek bal oldali félkörökön mérhető eloszlása



11. ábra. A foltméretek jobb oldali félkörökön mérhető eloszlása



12. ábra. A foltméretek középső körlapokon mérhető eloszlása



13. ábra. A foltméretek külső környűükön mérhető eloszlása