

# 1. Hőmérsékleti sugárzás

Modern fizika laboratórium, Fizika BSc

A mérést végezte:  
Bokányi Eszter (BOERAAT.ELTE), Radics Máté (RAMRAAT.ELTE)

Mérés időpontja: 2011. március 24.  
Beadás időponja: 2011. április 8.

Értékelés:

## 1. Bevezetés

Bármilyen, az abszolút 0 foktól különböző hőmérsékletű test elektromágneses sugárzást bocsát ki atomjainak hőmozgása miatt. Az olyan anyagot, amely elnyeli az összes ráeső sugárzást, fekete testnek nevezzük. Az ilyen test spektrális sugárzási teljesítményét ismerve, és azt kiintegrálva kapjuk a Stefan–Boltzmann-törvényt, amely szerint egy fekete test egységnyi felülete által egységnyi idő alatt kisugárzott energia ( $P$ ) a hőmérséklet ( $T$ ) negyedik hatványával arányos:

$$P = \sigma T^4, \quad (1)$$

ahol az arányossági tényező

$$\sigma = \frac{4\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \quad (2)$$

az ún. Stefan-Boltzmann-állandó.

A mérés célja ennek az összefüggésnek a bizonyítása, és a Stefan–Boltzmann-állandó kimérése.

## 2. Az izzólámpa vizsgálata

A mérés ezen részében egy wolframszálas izzólámpa összetartozó feszültség-áramerősség értékeit úgy, hogy az izzót egy feszültséggenerátorról működtettük, majd ún. 4 pontos elrendezésben egy árammérő és egy feszültségmérő műszerről olvastuk le az értékeket. A feszültséget 1 V-onként növelve vettük fel a mérési pontokat.

Közben a lámpa üvegburkolatát levegővel hűtöttük, hogy annak a felmelegedés miatti hőmérsékleti sugárzása ne befolyásolja számottevően a mérést. Feltételeztük, hogy az izzószál energiájának fő részét sugározva adja le, a többi tagot (hővezetés stb.) elhanyagoljuk.

Tudjuk, hogy az izzólámpa teljesítménye a

$$P = UI, \quad (3)$$

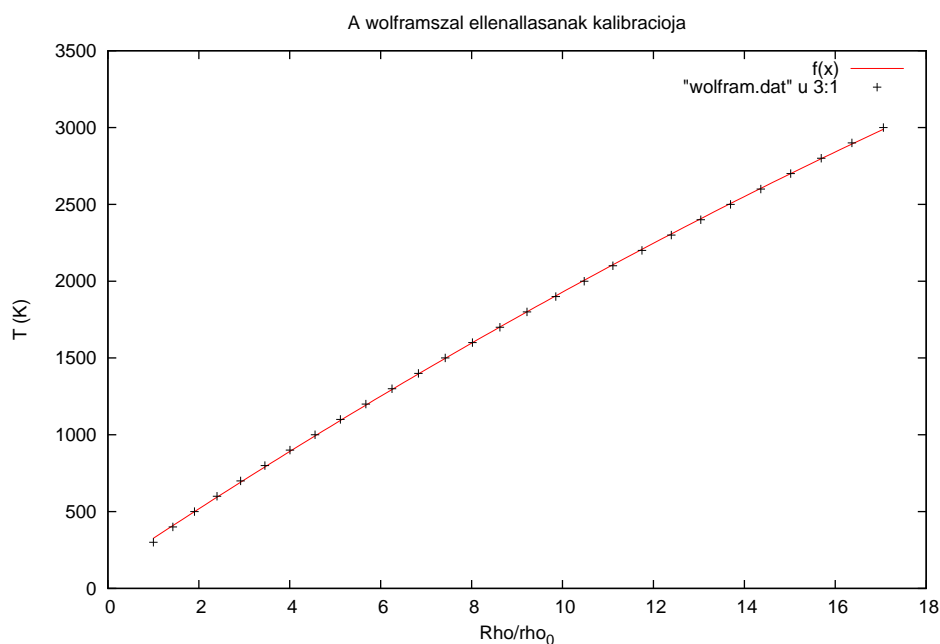
az ellenállása pedig az

$$R = \frac{U}{I} \quad (4)$$

összefüggéssel adható meg.

Az ellenállás erősen hőmérsékletfüggő, így a szál melegedésével változik: szobahőmérsékleten  $R_0 = 4,33\Omega$ . Egy fémes vezetősál – esetünkben a wolframszál – ellenállása megadható  $R(T) = \rho(T)l/A$  alakban is, ahol  $l$  a szál hossza,  $A$  a keresztmetszete,  $\rho$  pedig az anyagra jellemző fajlagos ellenállás, amely szintén hőmérsékletfüggő. Viszont ha a szobahőmérsékleten mért fajlagos ellenállást  $\rho_0$ -al jelöljük, akkor igaz, hogy  $\rho(T)/\rho_0 = R(T)/R_0$ , mert  $l$  és  $A$  nem változnak a hőmérséklettel.

A laborban található *wolfram.dat* adatfájl összetartozó hőmérséklet -  $\rho/\rho_0$  párokat tartalmaz, ezekre az adatokra Gnuplottal másodfokú polinomot illesztve megkaphatjuk, hogy milyen relatív ellenálláshoz milyen hőmérsékletérték tartozik. A pontokat, az illesztést, és a másodfokú görbe egyenletét az 1. ábrán és alatta lehet megtalálni.



1. ábra. A hőmérséklet a szál relatív ellenállásának függvényében

Az illesztett görbe egyenlete:

$$f(x) = -1,73(\pm 4,3\%) \cdot x^2 + 197,11(\pm 0,7\%) \cdot x + 130,7(\pm 4,0\%), \quad (5)$$

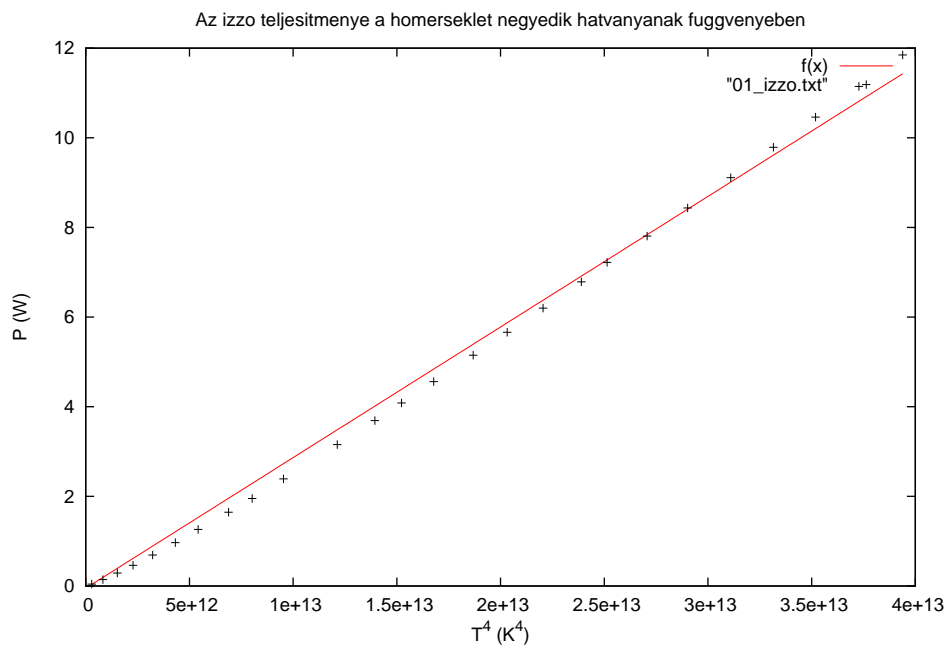
ahol  $x$  a  $\rho/\rho_0 = R/R_0$ ,  $f(x)$  pedig a  $T$  K-ben mért hőmérsékletet adja.

Ezután a mért és számolt adatokat a következő táblázat foglalja össze (a számolt oszlopok a (3), (4) és a (5) egyenletek alapján):

$U$ (V)	$I$ (A)	$R$ ( $\Omega$ )	$P$ (W)	$R/R_0$	$T$ (K)	$T^4$ (K <sup>4</sup> )
0,764	0,056	13,590	0,043	3,139	732,3	2,876E+11
1,644	0,087	18,819	0,144	4,346	954,7	8,306E+11
2,555	0,113	22,569	0,289	5,212	1111,0	1,524E+12
3,424	0,135	25,448	0,461	5,877	1229,3	2,284E+12
4,407	0,156	28,185	0,689	6,509	1340,4	3,228E+12
5,454	0,178	30,711	0,969	7,093	1441,6	4,319E+12
6,435	0,196	32,833	1,261	7,583	1525,8	5,419E+12
7,618	0,216	35,236	1,647	8,138	1620,0	6,888E+12
8,486	0,230	36,864	1,953	8,514	1683,3	8,028E+12
9,630	0,248	38,784	2,391	8,957	1757,3	9,536E+12
11,460	0,275	41,642	3,154	9,617	1866,2	1,213E+13
12,655	0,292	43,398	3,690	10,023	1932,3	1,394E+13
13,486	0,303	44,552	4,082	10,289	1975,4	1,523E+13
14,458	0,315	45,855	4,559	10,590	2023,9	1,678E+13
15,616	0,330	47,350	5,150	10,935	2079,0	1,868E+13
16,577	0,341	48,556	5,659	11,214	2123,3	2,032E+13
17,563	0,353	49,754	6,200	11,490	2166,9	2,205E+13

18,600	0,365	50,973	6,787	11,772	2211,1	2,390E+13
19,329	0,374	51,751	7,219	11,952	2239,1	2,514E+13
20,326	0,384	52,919	7,807	12,221	2281,0	2,707E+13
21,351	0,395	54,039	8,436	12,480	2320,9	2,902E+13
22,421	0,406	55,183	9,110	12,744	2361,4	3,110E+13
23,469	0,417	56,267	9,789	12,995	2399,6	3,316E+13
24,482	0,427	57,295	10,461	13,232	2435,6	3,519E+13
25,493	0,437	58,310	11,146	13,466	2471,0	3,728E+13
26,507	0,447	59,300	11,849	13,695	2505,3	3,939E+13

Ezután Gnuplottal ábrázolva a teljesítményt a hőmérséklet negyedik hatványának függvényében egyenest kaptunk.



2. ábra. Az izzó teljesítménye a hőmérséklet negyedik hatványának függvényében

Látszik tehát, hogy a wolframszátra teljesül a Stefan–Boltzmann-törvény.

### 3. A Stefan–Boltzmann-állandó mérése

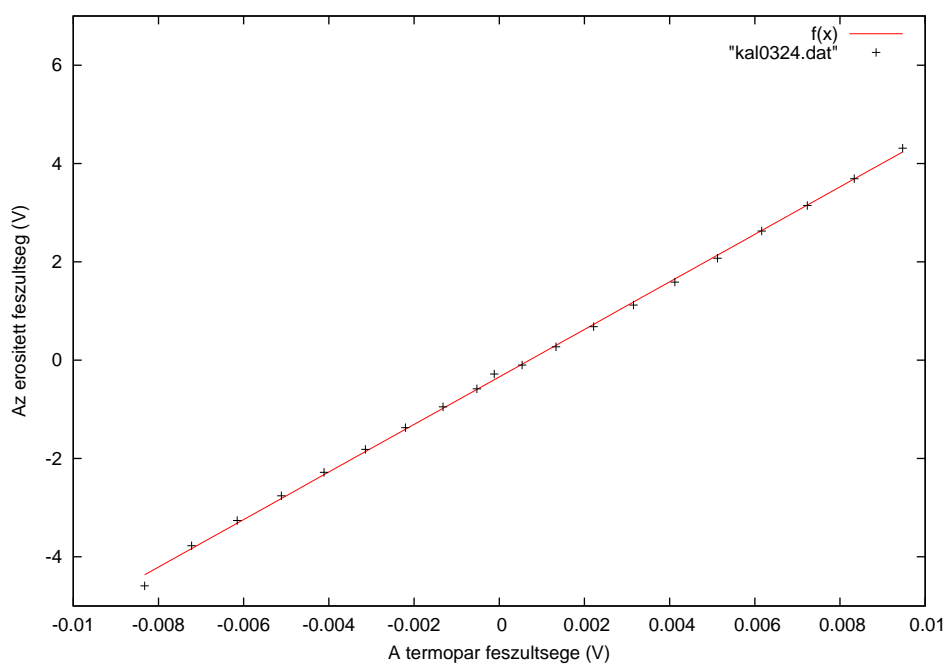
#### 3.1. A mérési összeállítás

A mérési összeállítás megtalálható a laborhoz tartozó jegyzetben.

#### 3.2. Kalibráció

A műszerekről leolvasott feszültségértékeket a laborban található számítógépes program segítségével vittük be, és a program lejegyezte ehhez az A/D konverter digitszámát is.

Elsőként a vas-konstantán-termopár feszültségerősítésének kalibrációját végeztük el: az erősített feszültséget a termopár feszültségének függvényében ábrázolva egyenest kaptunk, melynek meredeksége adja meg az erősítés nagyságát.



3. ábra. A termopár feszültségének erősítése

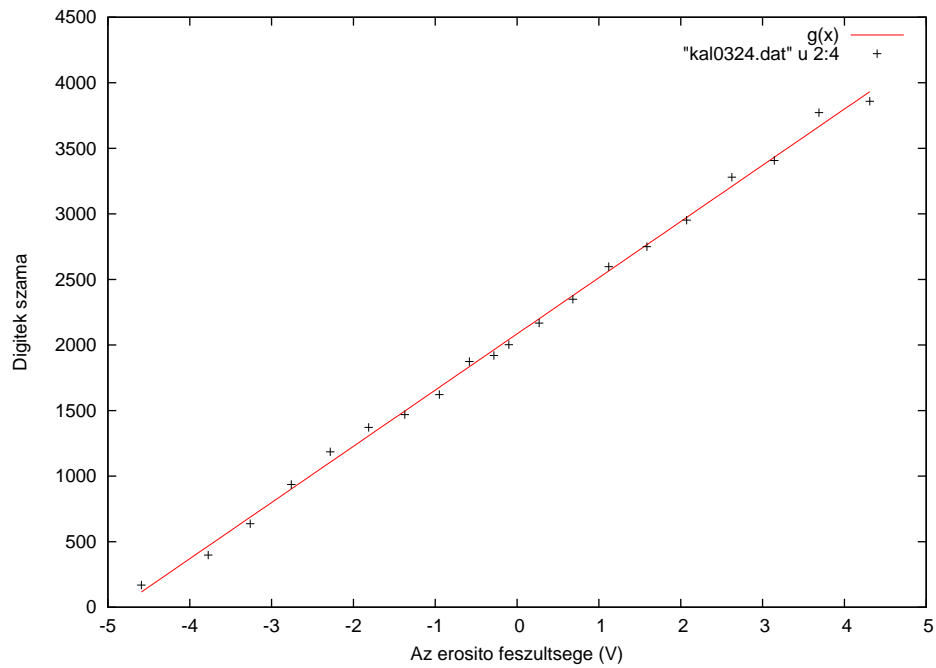
Jelölje  $U_T$  a termopár feszültségét,  $D$  a digitek számát,  $U_E$  az erősített feszültséget!

Az 3. ábra illesztésének paraméterei ( $f(x)=a \cdot x+b$ ):

$$\begin{array}{lll} a & = 483,369 & +/\!- 3,283 \quad (0,6792\%) \\ b & = -0,34153 & +/\!- 0,01688 \quad (4,943\%) \end{array}$$

$$U_E[V] = 483,4 \cdot U_T[V] - 0,34[V] \quad (6)$$

Ezután az A/D konverterre bemenő erősített feszültség digitális szintekké alakítását vizsgáltuk meg:



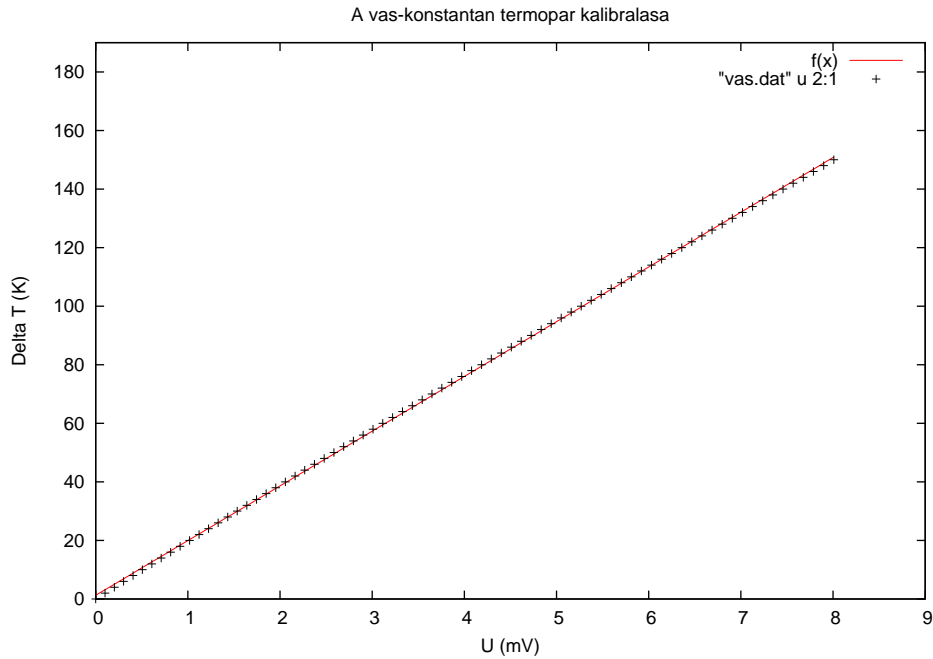
4. ábra. Az erősített feszültség digitekké alakítása

Az 4. ábra illesztésének paramétereit  $(f(x)=a \cdot x+b)$ :

$$\begin{aligned} a &= 428,703 \quad +/\!- \quad 5,042 \quad (1,176\%) \\ b &= 2084,49 \quad +/\!- \quad 12,5 \quad (0,5995\%) \end{aligned}$$

$$D = 428,7[1/V] \cdot U_E[V] + 2084,49 \quad (7)$$

Majd a vas-konstantán termopár feszültség-hőmérsékletkülönbség összefüggését számoltuk ki a laborban kapott adatsor segítségével.



5. ábra. A vas-konstantán termopár kalibrálása

Az 5. ábra illesztésének paraméterei ( $f(x)=a \cdot x+b$ ):

$$\begin{aligned} a &= 18.6876 \quad +/\!- \quad 0.02485 \quad (0.133\%) \\ b &= 1.25423 \quad +/\!- \quad 0.1141 \quad (9.096\%) \end{aligned}$$

Tehát az egyenlet:

$$\Delta T(K) = 18687[K/V] \cdot U_T[V] + 1,25[K] \quad (8)$$

A fenti egyenletekből kiszámolva az egy digitre eső hőmérsékletkülönbség:

$$\Delta T = 0,09024K \quad (9)$$

### 3.3. Mért és illesztett görbék

Mivel a kályhába való berakás előtt a lapka és a termopár hidegpontjának a hőmérséklete megegyezett, ezért a mért görbék kezdeti, vízszintes szakaszáról leolvashattuk a szobahőmérséklethez (300K) tartozó digitértéket:  $D_{szoba} = 1275$  több grafikon adatai alapján. Tehát

$$T[K] = (D - 1275) \cdot 0,09024[K] + 300[K] = 0,09024[K] \cdot D + 185[K] \quad (10)$$

A kályhába berakott detektorlap hőmérsékleti görbéit az idő függvényében a számítógép eltárolta. Az adatsorok megfelelő szakaszaira (a lapka felfűtési időszakára) Gnuplot-tal

$$T(t) = a \cdot (b - e^{-\frac{t}{c}}) \quad (11)$$

alakú görbét illesztettünk.

Három kályhahőmérsékletnél mértünk, mindegyiknél két termopárral (vas-konstantán): az egyik termopár referenciapontja egy termoszba volt téve, a másik termopáré "csak" a levegőben volt. Ez összesen hat mérést jelent, ám a legalacsonyabb kályhahőmérsékleten olyan grafikonokat kaptunk, amelyekre a

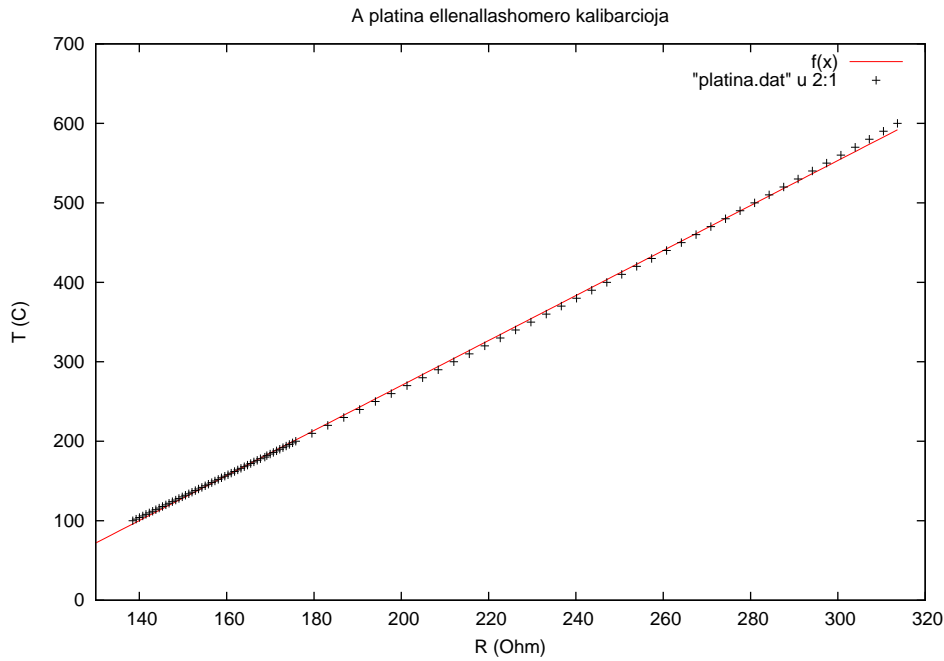
fenti függvény nem igazán illeszkedett, így nagyon nagy volt az illesztés és a paraméterek hibája. Ezért csak a négy magasabb hőmérsékletű adatsorral dolgoztuk tovább.

A kályha hőmérsékletét egy D/A konverteren keresztül szabályozzuk, platina ellenálláshőmérővel mérünk. A platina hőmérőhöz megadott kalibrációs táblázatot ábrázolva l. a 6 ábrán, az ellenállásokat a hőmérséklettel összekapcsoló, a pontokra illesztett egyenes egyenlete:

$$T(C) = 2,83(\pm 2\%)[C/\Omega] \cdot R[\Omega] - 296,04(\pm 4\%)[C]. \quad (12)$$

Kelvinben:

$$T(K) = 2,83(\pm 2\%)[K/\Omega] \cdot R[\Omega] - 23(\pm 4\%)[K]. \quad (13)$$



6. ábra. A platina ellenálláshőmérő kalibrálása

Az ellenálláson áramgenerátorral 3mA-s áramot folytatunk át, a D/A konverternél tudjuk, hogy 5-szörös az erősítés, tehát

$$\frac{U}{D} = \frac{5}{4095}. \quad (14)$$

Ezek alapján:

$$D = 0,003 \cdot 4095 \cdot R. \quad (15)$$

A (13) egyenletet felhasználva:

$$T_{kályha}[K] = 0,230[K] \cdot D - 23[K]. \quad (16)$$

A felfűtés során megmérhettük, mennyire ingadozik a kályha hőmérséklete, az ingadozás maximumának és minimumának számtani közepét fogadjuk el a kályha hőmérsékletének, a különbség felét pedig az érték hibájának:

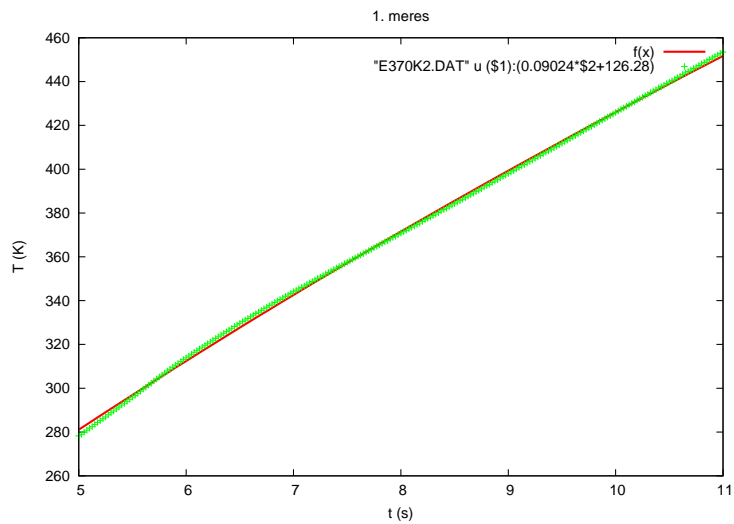
$D_{beallitott}$	$D_{min}$	$D_{max}$	$T_s[K]$	$\Delta T[K]$
2950	3484,6	3525,5	783	4,7
3120	3571,0	3604,8	802	3,8



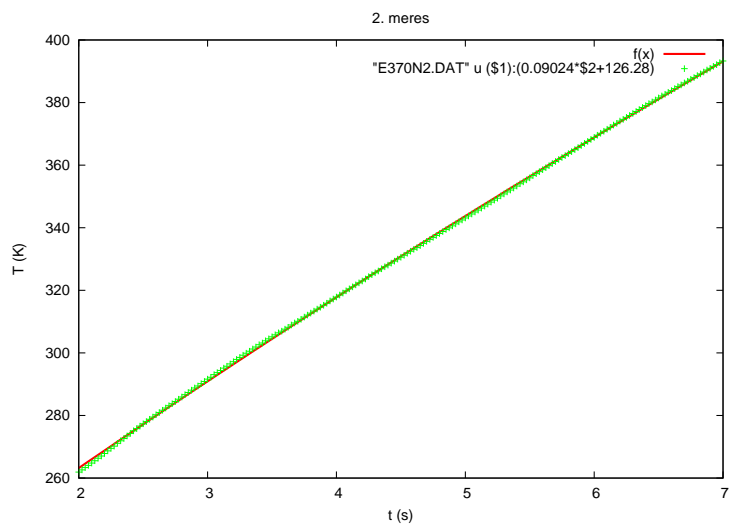
### 3.3.1. A szonda hőmérsékleti görbéjére illesztett görbék

A négy adatsor (783K - 1., 2., ill. 802 K - 3. 4. mérés) kivágott részei, az arra illesztett görbék, és az illesztés paramétereit összefoglaló táblázat alább következik:

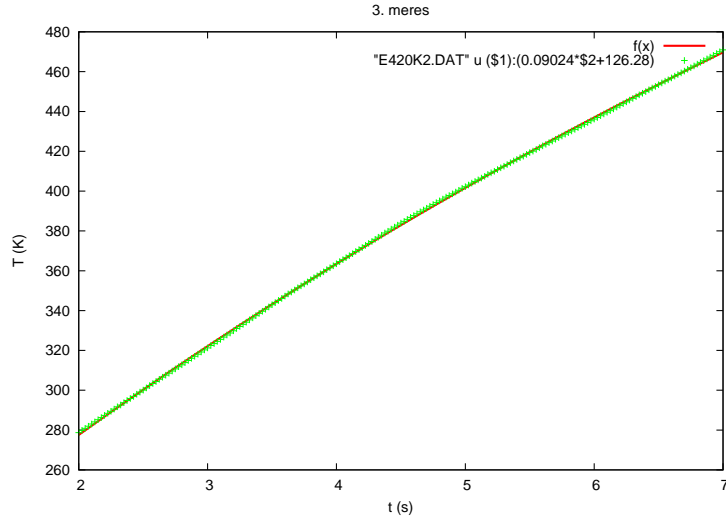
Mérés	a	$\delta a$	b	$\delta b$	c	$\delta c$
1.	973,95	3,6%	1,16	0,3%	24,89	5,3%
2.	903,72	3,6%	1,29	0,8%	29,95	4,3%
3.	696,71	1%	1,33	0,2%	12,85	1,5%
4.	388,60	0,4%	1,55	0,001%	6,39	1,0%



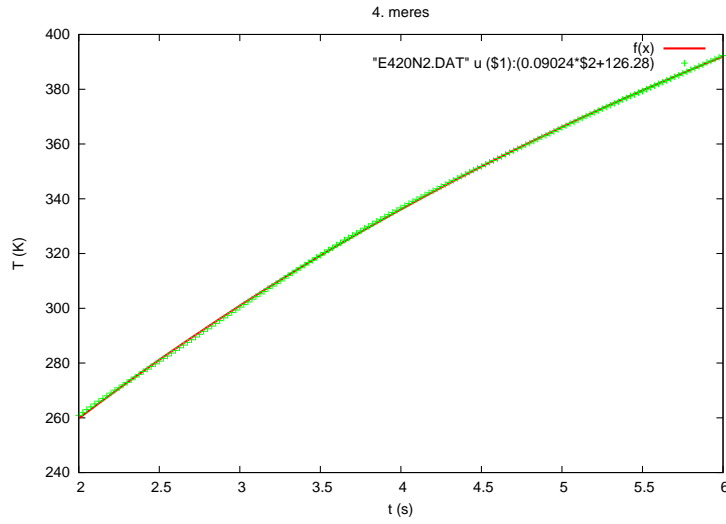
7. ábra. 1. mérés



8. ábra. 2. mérés



9. ábra. 3. mérés



10. ábra. 4. mérés

### 3.3.2. A Stefan–Boltzmann-állandó meghatározása

A Stefan–Boltzmann-törvénybe a hővezetési tagokat is beírva a következőt kapjuk:

$$\sigma = \frac{1}{F(T_s^4 - T^4)} \left( mc_f \frac{dT}{dt} + \alpha_0(T - T_0) + \alpha_l(T - T_l) \right), \quad (17)$$

ahol  $F$  a szonda felülete,  $F = 1 \text{ cm}^2$ ,  $m = 0,97 \text{ g}$  a lap tömege,  $c_f = 234,5 \text{ J/kg}$  az ezüst fajhője,  $T_0 = 300 \text{ K}$  a szobahőmérséklet,  $T_s$  a kályha hőmérséklete,  $T_l \approx T_s$  a kályhában levő levegő hőmérséklete,  $\alpha_0$  a dugó,  $\alpha_l$  a lapka hővezetési együtthatója.

Ebbe az egyenletbe visszahelyettesítve az exponenciális illesztés eredményeit, és átrendezve a következő egyenletet kapjuk:

$$F(T_s^4 - T^4) = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{-mc_f}{c} + \alpha_0 + \alpha_l \right) \cdot T + \frac{1}{\sigma} \left( -\alpha_0 \cdot T_0 - \alpha_l \cdot T_s + \frac{ab}{c} mc_f \right) \quad (18)$$

Tehát ha ábrázoljuk  $F(T_s^4 - T^4)$ -t  $T$  függvényében, egyenest kapunk, melynek paraméterei  $\sigma$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_l$ . Ezekből a pontpárokból így illesztéssel meghatározható  $\sigma$ .

Az illesztett paraméterek értékeit és hibáit tartalmazza a következő táblázat. Előzetes becsléssel az illesztés előtt a paraméterek nagyságrendjeit megadtuk, mert a kezdeti értékekre nagyon érzékeny volt, hogy mi lesz a végeredmény.

$\sigma \left( \frac{W}{m^2 K^4} \right)$	$\delta\sigma$	$\alpha_0 \left( \frac{W}{K} \right)$	$\delta\alpha_0$	$\alpha_l \left( \frac{W}{K} \right)$	$\delta\alpha_l$
1,76e-7	5,9e10%	0,00221	2,3e11%	0,00188	4,3e11%
1,74e-7	5,0e10%	0,00276	1,7e11%	0,00223	3,0e11%
1,60e-7	1,0e11%	0,00197	4,5e11%	0,00171	8,5e11%
1,56e-7	6,1e10%	0,00300	1,9e11%	0,00237	3,4e11%

Látszik, hogy körülbelül 2-3-szor akkora értékeket kaptunk, mint az irodalmi érték, viszont a relatív hiba is óriási lett az illesztés során.