

Modern Fizika Laboratórium
Fizika BSc

18. Granuláris anyagok

Mérést végezték:

Márkus Bence Gábor

Kálmán Dávid

Kedd délelőtti csoport

Mérés ideje: 05/08/2012

Beadás ideje: 05/11/2012

Érdemjegy:

1. A mérés rövid leírása

Mérésünk során granuláris, azaz szemcsés anyagokkal foglalkoztunk. Az ilyen rendszer legfőbb jellemzője, hogy nagy, $10^4 - 10^{15}$ számú, makroszkopikus $10 \mu\text{m} - 10 \text{cm}$ méretű részecskéket tartalmaz. Ebben a mérettartományban a részecskékre ható három fő erő a gravitációs erő, a részecskék összenyomódásakor keletkező feszültségi erő és az érintkezés-kor fellépő súrlódási erő. Mérésünk során az egyéb hatásoktól, például elektrosztatikai erőktől eltekintettünk. A granuláris rendszerek azért érdemelnek kiemelt figyelmet, mivel a részecskék átlagos helyzeti energiájához képest az egy szabadsági fokra jutó $k_B T$ termikus energia elhanyagolható. Ily módon a rendszer nem kezelhető a statisztikus fizika leírásával, nem az ott leírt következtetések lesznek igazak. Nem alakul ki termikus egyensúly és homogén eloszlás sem áll elő. A rendszer bármilyen kvázistabil állapotában képes megmaradni (külső behatás nélkül), ezzel inhomogén eloszlásokat, komplex struktúrákat létrehozva. Mérésünk során a granuláris anyagok nyomásának mélységfüggését vizsgáltuk a Janssen-modell segítségével, illetve az egyes részecskékre ható erők eloszlását az úgynevezett q-modell segítségével.

2. Méréshez használt eszközök

- Janssen-modell esetén használt granuláris anyagok: műanyag golyócskák és madár-eleség
- q-modellhez használt granuláris anyag: üveggolyócskák
- Műanyag mérőkanál adagoláshoz
- Üveghenger dugattyúval
- Digitális mérleg
- Indigó
- 600 dpi felbontású szkennel

3. Rövid elméleti összefoglaló

3.1. Janssen-modell

Janssen-modell segítségével a granuláris anyagok nyomásának mélységfüggését tudjuk vizsgálni. A mérés során egy R sugarú hengerbe, ρ átlagos sűrűségű granuláris anyagot öntöttünk. A modell feltételezései a következők az általunk használt elrendezés során:

1. A függőleges nyomás nagysága csak a mélységtől függ:

$$P(\mathbf{x}) = P(z), \quad (1)$$

ahol \mathbf{x} a helyvektor.

2. Vízszintes irányban mérhető nyomás és a függőleges között egy konstans szorzóbeli eltérés van (ellentétben a folyadékokkal, ahol Pascal-törvénye alapján ez egyenlő):

$$P_{\text{hor}} = KP(z), \quad (2)$$

ahol K a Janssen-együttható.

3. A falaknál fellépő súrlódási erő felhajtó jellegű, azaz felfelé hat:

$$dF_s = 2R\pi dz \cdot \mu KP(z), \quad (3)$$

ahol kihasználtuk, hogy henger alakú csőben mérünk, μ a fal és a részecskék között fellépő súrlódási együttható.

Minden dz vastagságú $\mathcal{F} = R^2\pi$ területű vízszintes szelet esetén teljesül, hogy az anyag egyensúlyban van. Ezekre a már fentebb említett, illetve feltevésekből származó erők hatnak: a gravitációs erő, a részecske alatt és felett mérhető nyomás különbségéből származó erő és a falaknál fellépő súrlódás erő. Ezzel felírható a rendszert leíró differenciálegyenlet:

$$\rho g \mathcal{F} - \frac{dP(z)}{dz} \mathcal{F} dz - dF_s = 0. \quad (4)$$

A harmadik feltételezés segítségével az alábbi alakra hozhatjuk az egyenletet:

$$\frac{dP(z)}{dz} + \frac{1}{\lambda} P(z) = \rho g, \quad (5)$$

ahol $\lambda = \frac{R}{2\mu K}$ egy unifikált konstans. A cső tetején mérhető rendszerből eredő nyomásnak zérusnak kell lennie (mérésünk során feltételeztük, hogy a külső légnyomás állandó a cső teljes magasságában), így az alábbi kezdeti feltétellel kapjuk: $P(z=0) = 0$. Ezzel a differenciálegyenlet illesztett megoldása:

$$P(z) = \lambda \rho g (1 - e^{-\frac{z}{\lambda}}). \quad (6)$$

A mi mérési elrendezésünkben a tömeget tudjuk mérni. Jelölje m_l a látszólagos, m a valós tömeget, ezeket a mennyiségeket mérjük. Legyen továbbá m_∞ a $z \rightarrow \infty$ -hez tartozó látszólagos tömeg. Ez a fenti egyenletek segítségével: $m_\infty = \lambda \rho \mathcal{F}$. Így az egyenlet megoldását eltranszformálva kapjuk:

$$m_l = m_\infty \left(1 - e^{-\frac{m}{m_\infty}}\right). \quad (7)$$

A mért pontjainkra ilyen alakú görbét illesztve m_∞ értékéből a Janssen-együttható meghatározható:

$$K = \frac{R}{2\mu\lambda} = \frac{R\rho\mathcal{F}}{2\mu m_\infty} = \frac{R^3\pi\rho}{2\mu m_\infty}. \quad (8)$$

3.2. q-modell

A q-modell segítségével lehetőségünk nyílik a rendszer mikroszkopikus viselkedését leírni, azon belül az egyes részecskékre ható erők eloszlását. A modell lényege, hogy szabályos rácsot feltételez, ahol minden rácspontban egységnyi tömegű részecske helyezkedik el. Minden részecske az alatta megtalálható N részecskén nyugszik, így a részecske által kifejtett erő ezen N részecskére hat véletlenszerű eloszlásban. Legyen az i -edik részecske j -edikre kifejtett ereje q_{ij} valószínűségi változó. Ahogyan egy részecske N darabot nyom, ugyanúgy rá is N darab nehezedik. Jelölje az i -edik részecske által megtartott súlyt $w(M, i)$. Ezzel a következő egyenlethez juthatunk:

$$w(M, i) = 1 + \sum_{j=1}^N q_{ij}(M-1)w(M-1, i). \quad (9)$$

Amennyiben feltesszük, hogy q_{ij} valószínűségi változók függetlenek és azonos eloszlásúak, az alábbi teljesül:

$$\sum_{j=1}^N q_{ij} = 1. \quad (10)$$

Ekkor az egy részecske által megtartott redukált súly $v = \frac{w}{N}$ eloszlásfüggvényét az $M \rightarrow \infty$ sztochasztikus határesetben véve az alábbi eloszláshoz tart:

$$P(v) = \frac{N^N}{(N-1)!} v^{N-1} e^{-Nv}. \quad (11)$$

Nagy v -k esetére az alábbi közelítést szükséges igazolnunk:

$$P(v) \approx Av^{N-1} e^{-\alpha v}, \quad (12)$$

ahol A és α konstans paraméterek. Látható tehát, hogy nem Gauss-eloszlást mutat, mérésünk során ezt kell igazolnunk.

4. Mérési eredmények

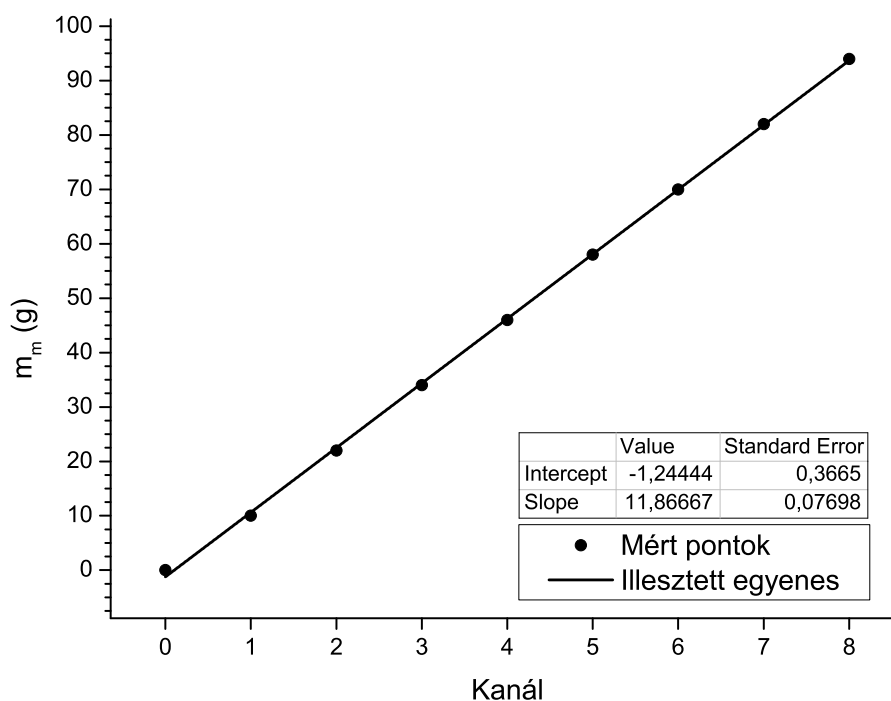
4.1. Janssen-modell

4.1.1. Mérleg kalibrációja

A tényleges mérés elkezdése előtt szükséges a mérleget kalibrálni. Ehhez meg kellett mérni, hogy mekkora tömegnek felel meg egy kanálnyi granuláris anyag. Innen meghatározható, hogy egy pohár, ami 3 kanálnak megfelelő anyagot tartalmaz mennyi valószínűleg felel meg. Az üveghengerbe az anyagot poharanként tudtuk adagolni. A mért adatok:

Kanál	$m_{\text{műanyag}} \text{ (g)}$	$m_{\text{madareleség}} \text{ (g)}$
0	0	0
1	10	12
2	22	28
3	34	42
4	46	56
5	58	68
6	70	84
7	82	98
8	94	110

A mérleg mérési hibája: $\Delta m = \pm 2 \text{ g}$ volt. A mért pontokra egyenest illesztve annak meredekségéből megkapjuk, hogy egy kanálban mekkora tömegű anyag volt átlagosan. A műanyag golyók kalibrációja:

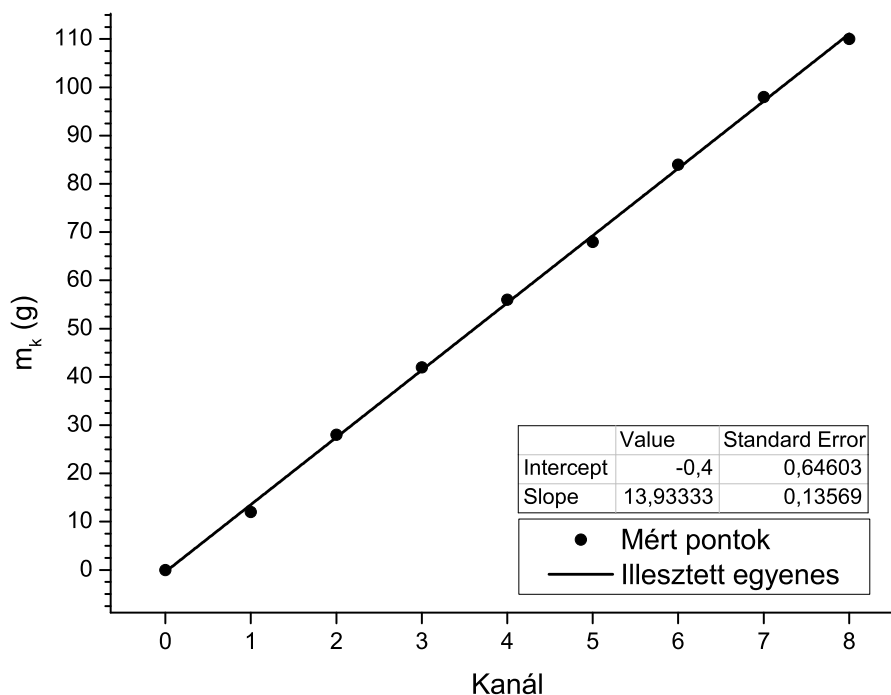


1. ábra. Műanyag golyók

Az illesztett egyenes meredeksége:

$$M_m = 11.868 \pm 0.077 \text{ g.} \quad (13)$$

Hasonlóan eljárva a madáreleség esetében:



2. ábra. Madáreleség

Az illesztett görbe meredeksége:

$$M_k = 13.93 \pm 0.14 \text{ g.} \quad (14)$$

4.1.2. Tapadási súrlódási együttható meghatározása

Ahhoz, hogy a Janssen-együtthatót meg tudjuk határozni ismernünk kell az üveg tapadási súrlódási együtthatóját. Ezt olyan módon mértük meg, hogy az a hengerrel azonos anyagból készült síklapra a granuláris anyagból készült papírra ragasztott síkot helyeztünk, majd megkerestük azt a legkisebb szöveget, ahol már nem csúszik meg a test. Levezethető, hogy a tapadási súrlódás csak ettől a szögtől függ:

$$\mu = \tan \alpha. \quad (15)$$

Mérésünk során mi a két befogó hosszát mértük, ezzel

$$\mu = \frac{b}{a}. \quad (16)$$

A mért eredmények:

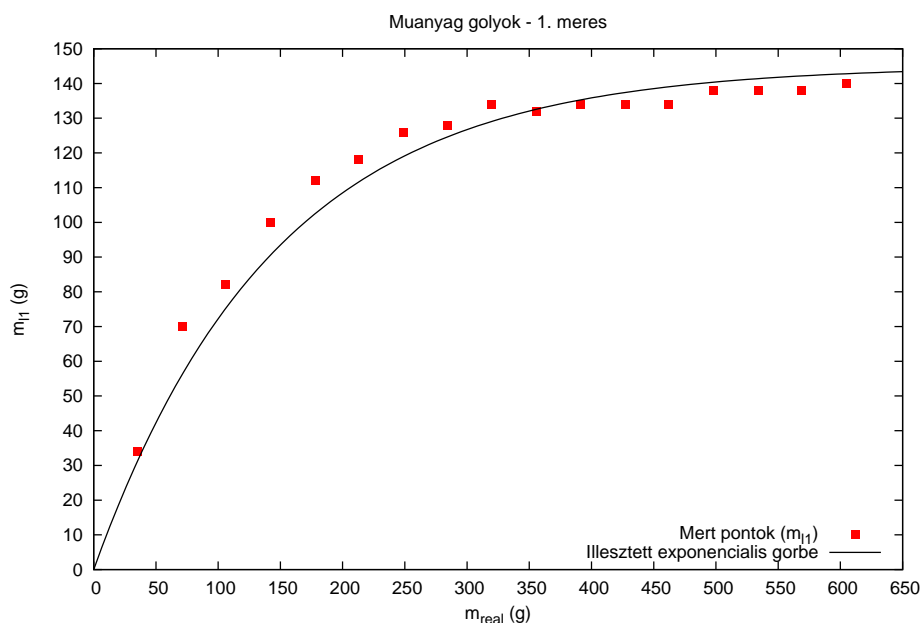
	a (cm)	b (cm)	μ
műanyag golyó	20.2	4.4	0.218 ± 0.006
madáreleség	18.9	4.6	0.243 ± 0.007

Ahol a hosszmérés hibája: $\Delta a = \Delta b = 0.1 \text{ cm}$.

4.1.3. Janssen-együttható meghatározása

Az üveghengerbe elkezdjük poharanként adagolni a granuláris anyagot. Minden pohár után leolvastuk a látszólagos tömeget, minden mérést háromszor végeztünk el. A mért adatok a műanyag golyókra:

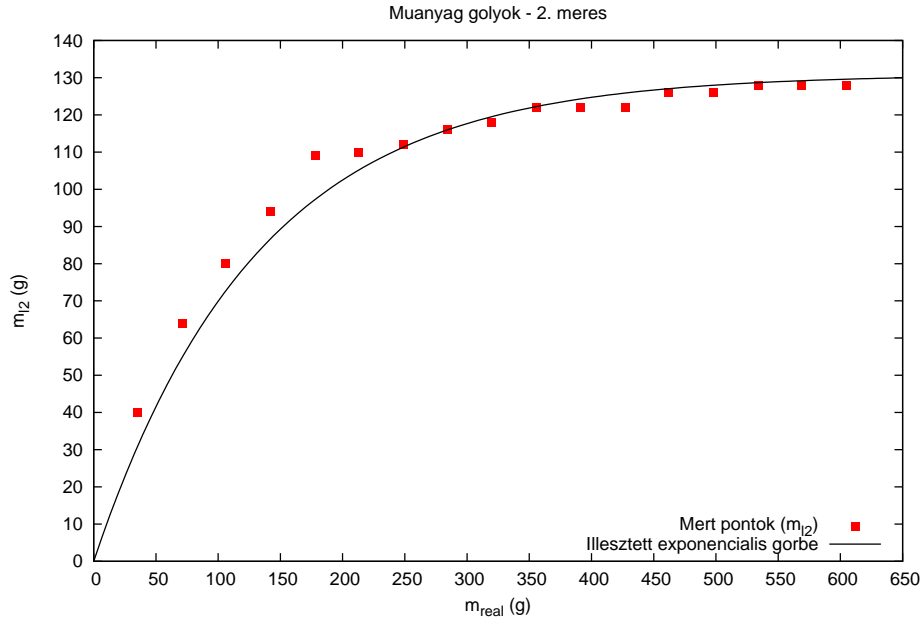
Pohár	m_{real} (g)	$m_{1,1}$ (g)	$m_{1,2}$ (g)	$m_{1,3}$ (g)
1	35.604	34	40	32
2	71.208	70	64	62
3	106.812	82	80	80
4	142.416	100	94	88
5	178.02	112	109	102
6	213.624	118	110	110
7	249.228	126	112	116
8	284.832	128	116	124
9	320.436	134	118	128
10	356.04	132	122	128
11	391.644	134	122	128
12	427.248	134	122	130
13	462.852	134	126	134
14	498.456	138	126	134
15	534.06	138	128	136
16	569.664	138	128	136
17	605.268	140	128	136



3. ábra. Műanyag golyók - 1. mérés

Az illesztett görbe paramétere:

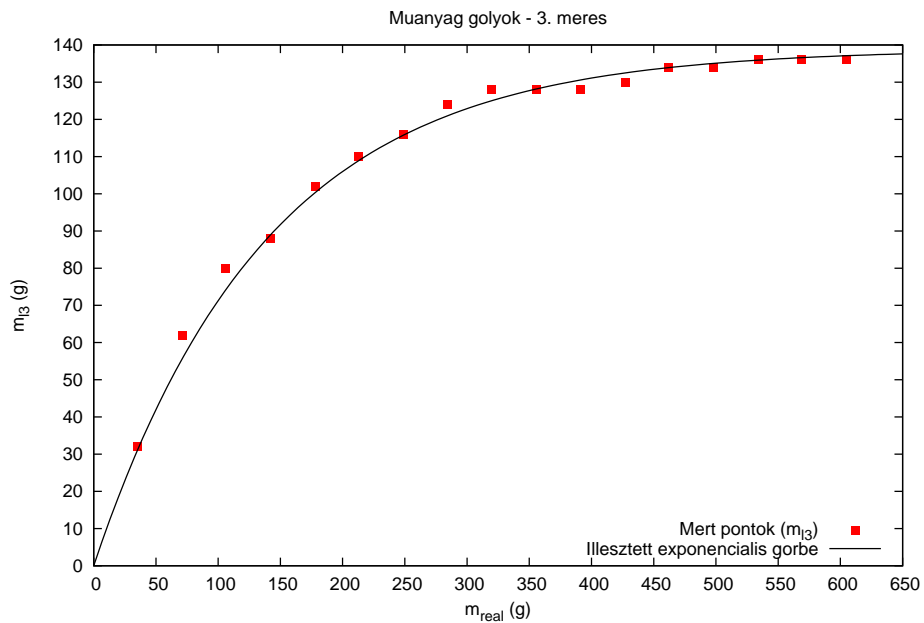
$$m_{\infty,1} = 145.05 \pm 2.38 \text{ g.} \quad (17)$$



4. ábra. Műanyag golyók - 2. mérés

Az illesztett görbe paramétere:

$$m_{\infty,2} = 130.88 \pm 1.95 \text{ g.} \quad (18)$$



5. ábra. Műanyag golyók - 3. mérés

Az illesztett görbe paramétere:

$$m_{\infty,3} = 138.90 \pm 0.99 \text{ g.} \quad (19)$$

Ezek átlagát vehetjük tényleges m_∞ -nek, ezzel:

$$m_\infty = 138.3 \pm 1.8 \text{ g.} \quad (20)$$

A hengerben lévő anyag magassága a mérés végén $h = 54.9 \pm 0.13$ cm, ahol a hiba a leolvasás hibájából és a részecskék becsült átmérőjének összegéből áll. A henger átmérője $d = 4.7$ cm, ezzel $R = 2.35$ cm, ahonnan alapkörének területe: $\mathcal{F} = 17.35$ cm². A hengerben lévő anyag térfogata innen: $V = 952.49$ cm³. A mérés végén a hengerben $m_{\text{real}} = 605.268 \pm 11.781$ g anyag volt, innen a műanyag golyó átlagos sűrűsége:

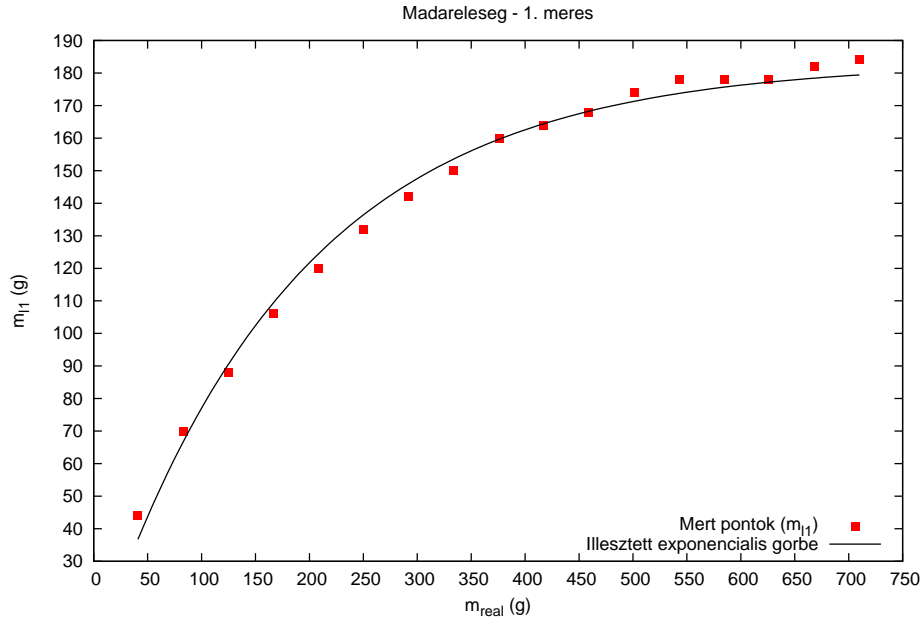
$$\varrho = \frac{m_{\text{real}}}{V} = 0.635 \pm 0.012 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}. \quad (21)$$

Innen meghatározható a műanyag golyókra vonatkozó Janssen-együttható:

$$K_m = \frac{R^3 \pi \varrho}{2\mu m_\infty} = 0.429 \pm 0.014. \quad (22)$$

A madáreleség esetében hasonló módon jártunk el. A mért adatok:

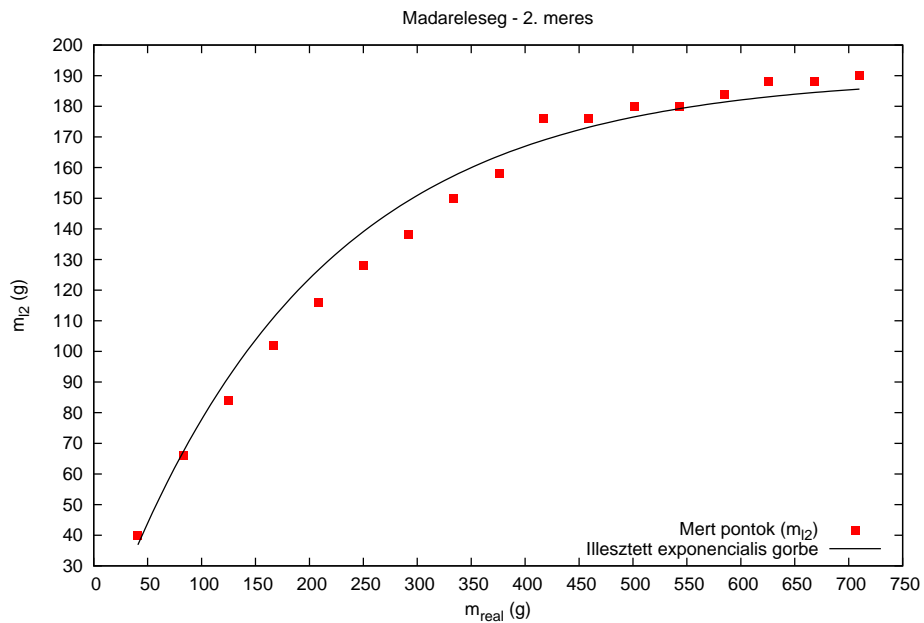
Pohár	m_{real} (g)	$m_{1,1}$ (g)	$m_{1,2}$ (g)	$m_{1,3}$ (g)
1	41.79	44	40	42
2	83.58	70	66	72
3	125.37	88	84	88
4	167.16	106	102	104
5	208.95	120	116	118
6	250.74	132	128	130
7	292.53	142	138	144
8	334.32	150	150	152
9	376.11	160	158	160
10	417.9	164	176	166
11	459.69	168	176	168
12	501.48	174	180	166
13	543.27	178	180	166
14	585.06	178	184	170
15	626.85	178	188	170
16	668.64	182	188	170
17	710.43	184	190	172



6. ábra. Madáreleség - 1. mérés

Az illesztett görbe paramétere:

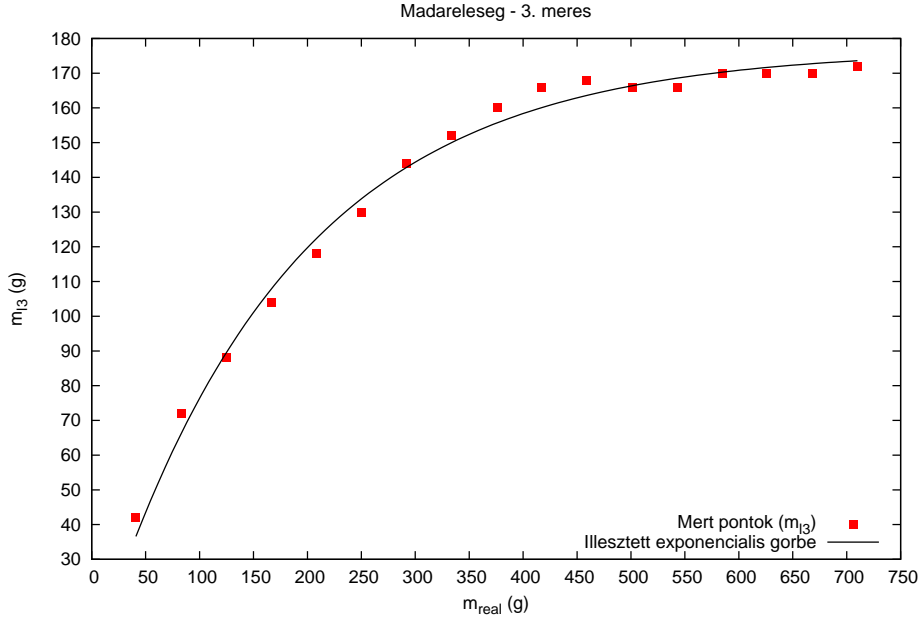
$$m_{\infty,1} = 183.21 \pm 1.65 \text{ g.} \quad (23)$$



7. ábra. Madáreleség - 2. mérés

Az illesztett görbe paramétere:

$$m_{\infty,2} = 190.18 \pm 2.74 \text{ g.} \quad (24)$$



8. ábra. Madáreleség - 3. mérés

Az illesztett görbe paramétere:

$$m_{\infty,3} = 176.78 \pm 1.41 \text{ g.} \quad (25)$$

Átlagot véve kapjuk, hogy

$$m_{\infty} = 183.4 \pm 1.9 \text{ g.} \quad (26)$$

A hengerben lévő anyag magassága itt: $h = 57.2 \pm 0.11 \text{ cm}$ volt. Ebből $V = 992.42 \text{ cm}^3$. Innen a táp sűrűsége:

$$\varrho = \frac{m_{\text{real}}}{V} = 0.716 \pm 0.022 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}. \quad (27)$$

A Janssen-együttható:

$$K_k = \frac{R^3 \pi \varrho}{2 \mu m_{\infty}} = 0.328 \pm 0.013. \quad (28)$$

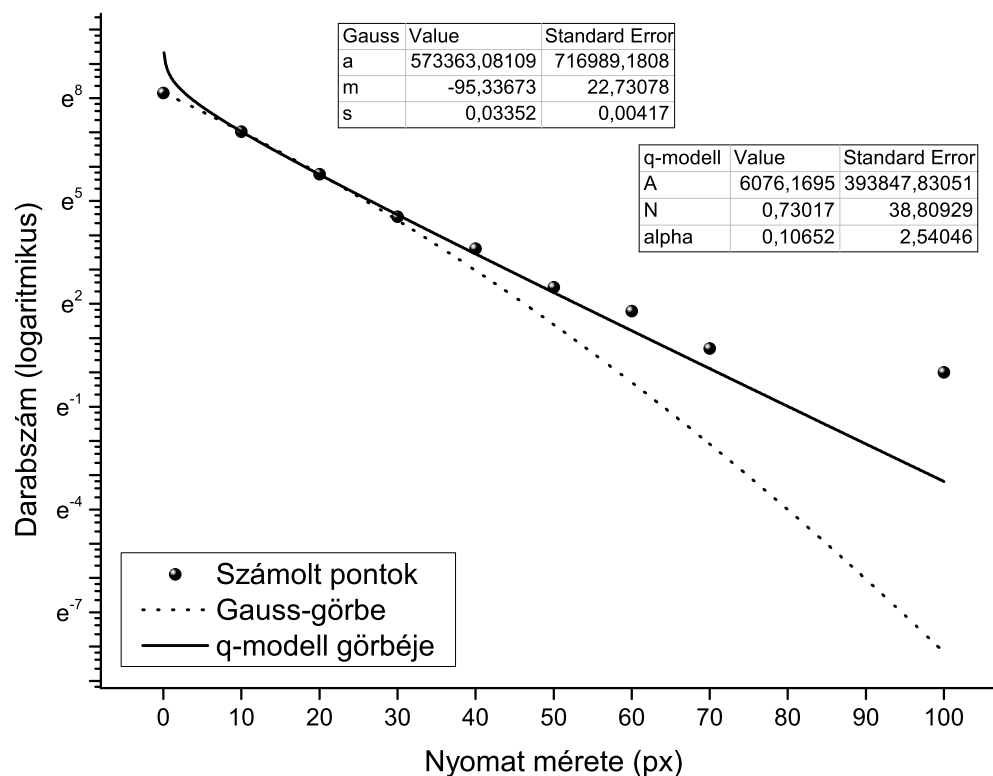
4.2. q-modell

Az eloszlás méréséhez kis, szabályos, üveggolyócskákat használtunk. Ezeket finoman a fém mérőhengerbe öntöttük, melynek aljára indigót és papírt helyeztünk. Feltöltés után a hengerbe dugattyút helyeztünk, majd ráálltunk. Feltételezésünk alapján a szemécsken ható nyomóerő a papírom hagyott felt méretével arányos. A mérést így módon ötször ismételtük meg, majd a készült lenyomatokat beszkeneltük. A mentett képekből kivágtuk a feldogozandó részt, majd ezeket a laborprogramok segítségével értékeltük ki. A képek kiértékelését egyesével tettük meg, majd az így kapott szöveges fájlokat összefűztük és ebből egy hisztogrammot készítettünk. Küszöbszintnek 193-at adtunk meg. A hisztogrammok közül a 10-es dobozméretűt értékeltük a legjobbnak, így az illesztéseket erre végeztük el.

A hisztogramra illesztett görbék:

- Gauss-görbe: $ae^{-\frac{(x-m)^2}{s^2}}$,
- q-modell görbéje: $Ax^{N-1}e^{-\alpha x}$.

Az illesztett görbéket tartalmazó grafikon:



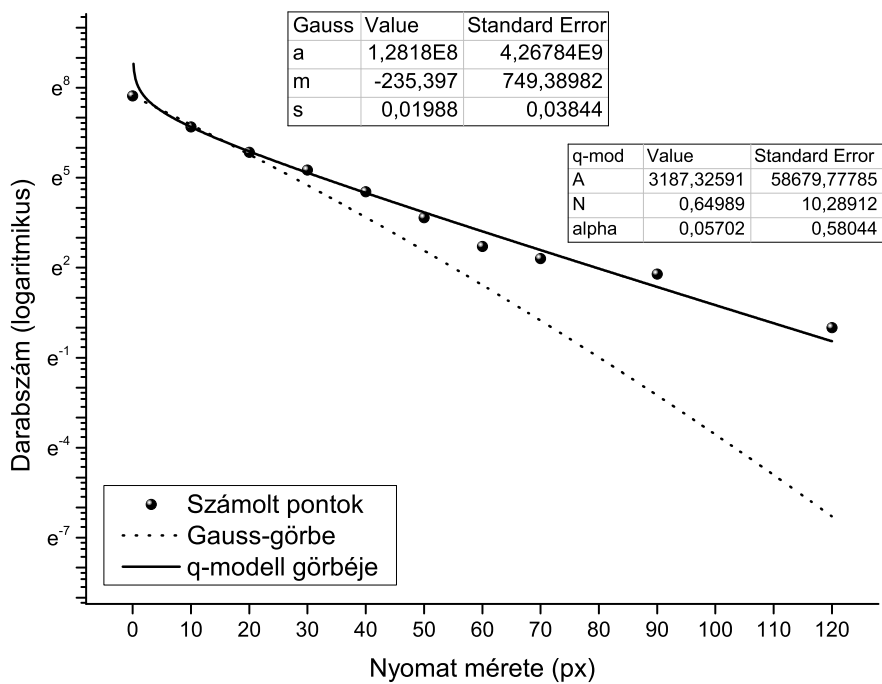
9. ábra. q-modell ellenőrzése

Látható, hogy q-modell által jósolt görbe sokkal jobban illeszkedik a mérési adatokra, az erőeloszlás tehát nem Gauss-eloszlást követ. A q-modell ebben a formájában viszont csak vizuális közelítésre jó, látható, hogy kis pixelméretre durván divergál, illetve nagy esetén sem követi már jól a mérési adatokat. Az illesztési adatok a grafikonon láthatóak, hibájuk óriási, de ez nem is baj, mivel csak nagyvonalakban akarjuk ellenőrizni a q-modell helyességét.

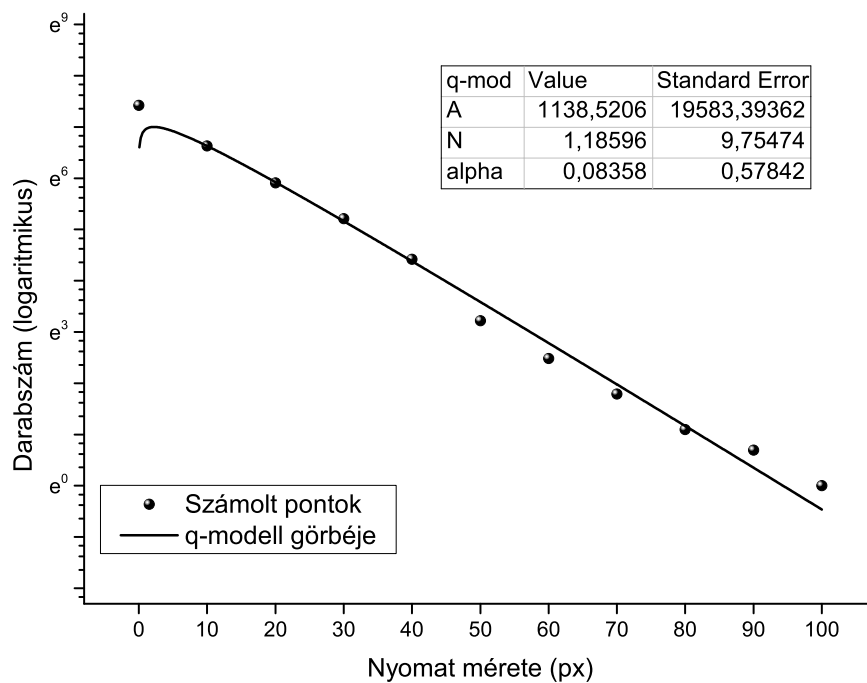
4.2.1. Homogenitás vizsgálata

Érdekes megvizsgálunk, hogy a mért erőeloszlás vajon homogén-e vagy mutat valahol a képen koncentrációt. Ennek vizsgálatához a képeket először bal és jobb félképekre vágtuk és úgy értékeltük ki őket, majd egy kisebb körre és egy körgyűrűre vágtuk fel, ügyelve, hogy a két terület közel azonos legyen.

A bal és jobb oldali képekre illesztett görbék:



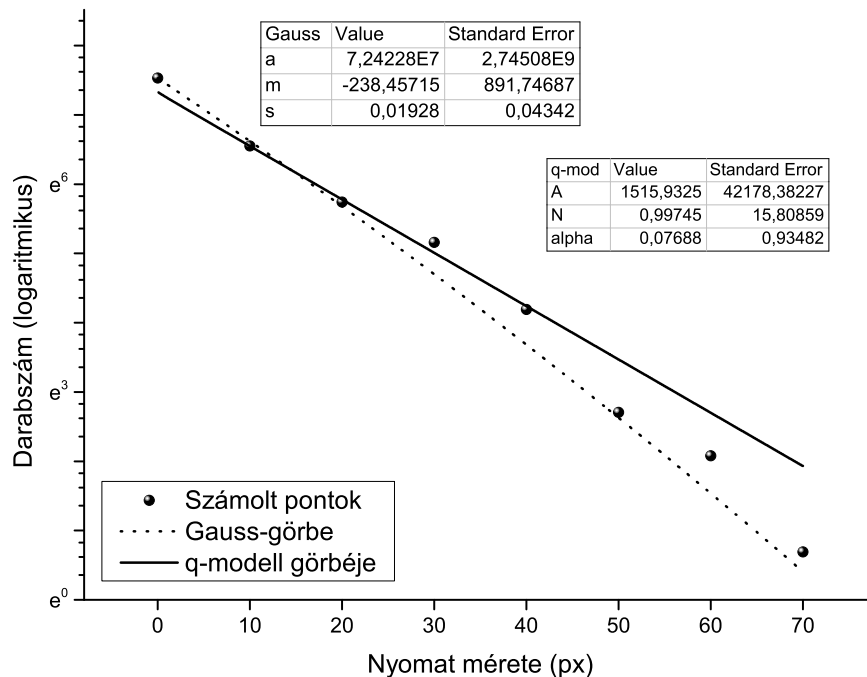
10. ábra. Bal oldala a képeknek



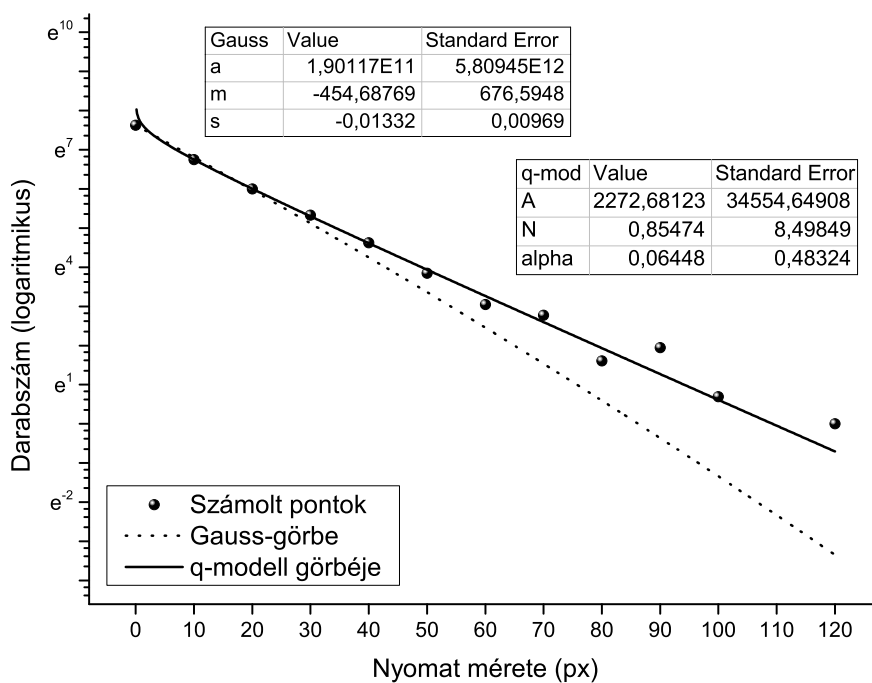
11. ábra. Jobb oldala a képeknek

Sajnos a jobb oldali félképekre nem volt már konvergencia a Gauss-illesztés, ez is mutatja,

hogy nem ilyen eloszlást követ. Látható továbbá, hogy a kép bal és jobb fele között nincs számottevő különbség. A kis körökre és gyűrűkre bontott képekre illesztett görbék:



12. ábra. Kis körök



13. ábra. Körgyűrűk

A grafikonokról tisztán kivehető, hogy a kisebb körön jóval kisebbek a nyomatok, mint a külső gyűrűn, ennek az az oka, hogy az erőeloszlás olyan, hogy nem középen, hanem egy külsőbb gyűrű mentén van a maximuma.

Hivatkozások

[1] Kiadott jegyzet: <http://wigner.elte.hu/koltai/labor/parts/18granularis.pdf>