

Modern Fizika Laboratórium
Fizika BSc

1. Hőmérsékleti sugárzás

Mérést végezték:

Márkus Bence Gábor

Kálmán Dávid

Kedd délelőtti csoport

Mérés ideje: 04/24/2012

Beadás ideje: 04/29/2012

Érdemjegy:

1. A mérés rövid leírása

Mérésünk során feladatunk volt a Stefan–Boltzmann törvényt igazolnunk egy wolfram-szálas izzó segítségével, illetve meghatározni a Stefan–Boltzmann állandót hőmérsékleti sugárzás vizsgálatával.

2. Méréshez használt eszközök

- W szálas izzó
- Feszültséggenerátor
- Árammérő
- Voltmérő
- Mérést vezérlő számítógép
- Pt termopár

3. Rövid elméleti összefoglaló

Bizonyítható, hogy bármilyen, 0 K-nél nagyobb hőmérsékletű test elektromágneses sugárzást bocsált ki. Ennek oka, hogy a testben lévő töltések hőmozgást végeznek, mely során gyorsulásuk nem zérus. A gyorsuló töltések a Maxwell-egyenletek értelmében sugároznak. Ideális fekete-testnek nevezzük azt az anyagot, ami az összes ráeső sugárzást elnyeli, ezt mérésünk során egy egyenletes hőmérsékletű falakkal rendelkező üreggel közelítettük. Az ilyen üregben termikus egyensúly alakul ki, amit jól leírhatunk a Planck-formula segítségével:

$$I_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}, \quad (1)$$

ahol h a Planck-állandó, k_B a Boltzmann-állandó. A törvény megadja az egységnyi térszögre jutó frekvenciaintervallumban kisugárzott teljesítményt. Térszögre vett integrálás segítségével, ebből megkapjuk a Stefan–Boltzmann törvényt:

$$P = \sigma T^4, \quad (2)$$

ahol

$$\sigma = \frac{4\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \quad (3)$$

a Stefan–Boltzmann állandó.

4. Mérési eredmények

4.1. Wolfram izzó

Mérésünk során egy **W** szál izzó feszültség-áramerősség karakterisztikáját vettük fel. Az izzót egy feszültséggenerátorról működtettük, a feszültség és áramerősség értékeket pedig egy 4 pontos elrendezésben elhelyezett voltméter és árammérőről olvastuk le. A mérés során 25 ponton vettük fel az értékeket, nagyjából egyenletesen, 1 V-os lépésként. A pontok felvétele közben a lámpa üvegbúráját levegőfúvással hűtöttük. Mérésünk során azzal a feltételezéssel éltünk, hogy az izzó az energia legnagyobb részét sugározva adja le, így a többi tagot nem vettük figyelembe a közelítés során. A lámpa teljesítménye a

$$P = UI, \quad (4)$$

ellenállása pedig az

$$R = \frac{U}{I} \quad (5)$$

összefüggésekkel határozhatóak meg. Mivel az izzó ellenállása hőmérsékletfüggő, így fel kellett használnunk, hogy szobahőmérsékleten ($T = 24^\circ\text{C}$) $R_0 = 4.38 \Omega$. Vékony, szál alakú, fémes vezetők esetén az ellenállás az alábbi módon írható le:

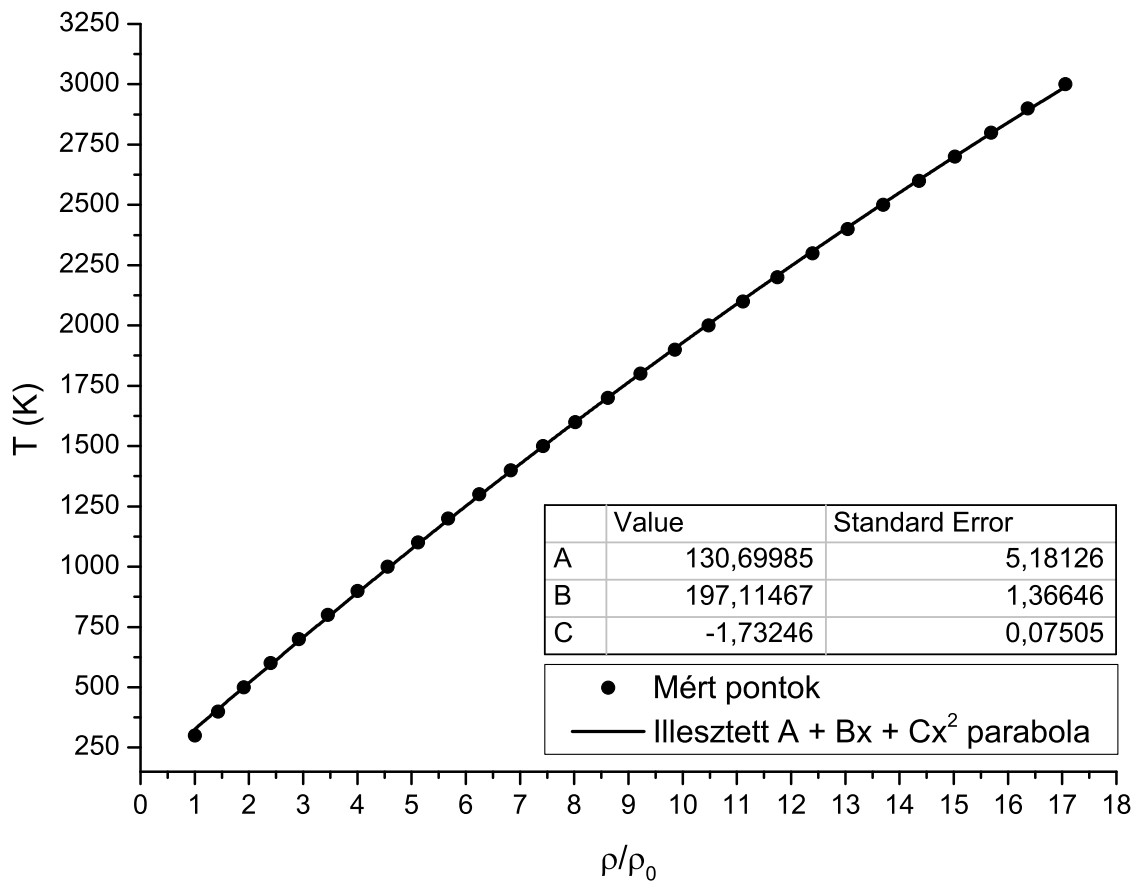
$$R(T) = \frac{\varrho(T)l}{A}, \quad (6)$$

ahol ϱ a szál fajlagos ellenállása, l a hossza és A a keresztmetszete. Amennyiben elhanyagoljuk a hőmérsékletváltozás során bekövetkezett hossz és keresztmetszetváltozást, igaz lesz, hogy:

$$\frac{R}{R_0} = \frac{\varrho}{\varrho_0}. \quad (7)$$

A laborban kapott **WOLFRAM.DAT** az izzószál fajlagos ellenállásának hőmérsékletfüggését tartalmazta. Erre egy parabolát illesztve megkaphatjuk, hogy milyen relatív ellenálláshoz milyen hőmérsékletérték tartozik.

Az adatsorra illesztett parabola:



1. ábra. $\frac{\rho(T)}{\rho_0}$ grafikon

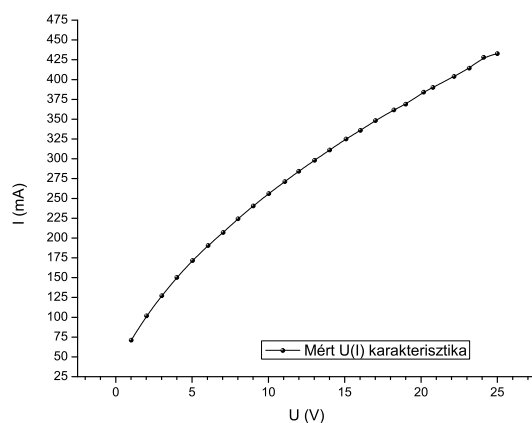
Az illesztett görbe egyenlete:

$$T = (130.7 \pm 5.2) + (197.1 \pm 1.4) \frac{R}{R_0} - (1.73 \pm 0.08) \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \quad (8)$$

A mért és számolt adatok:

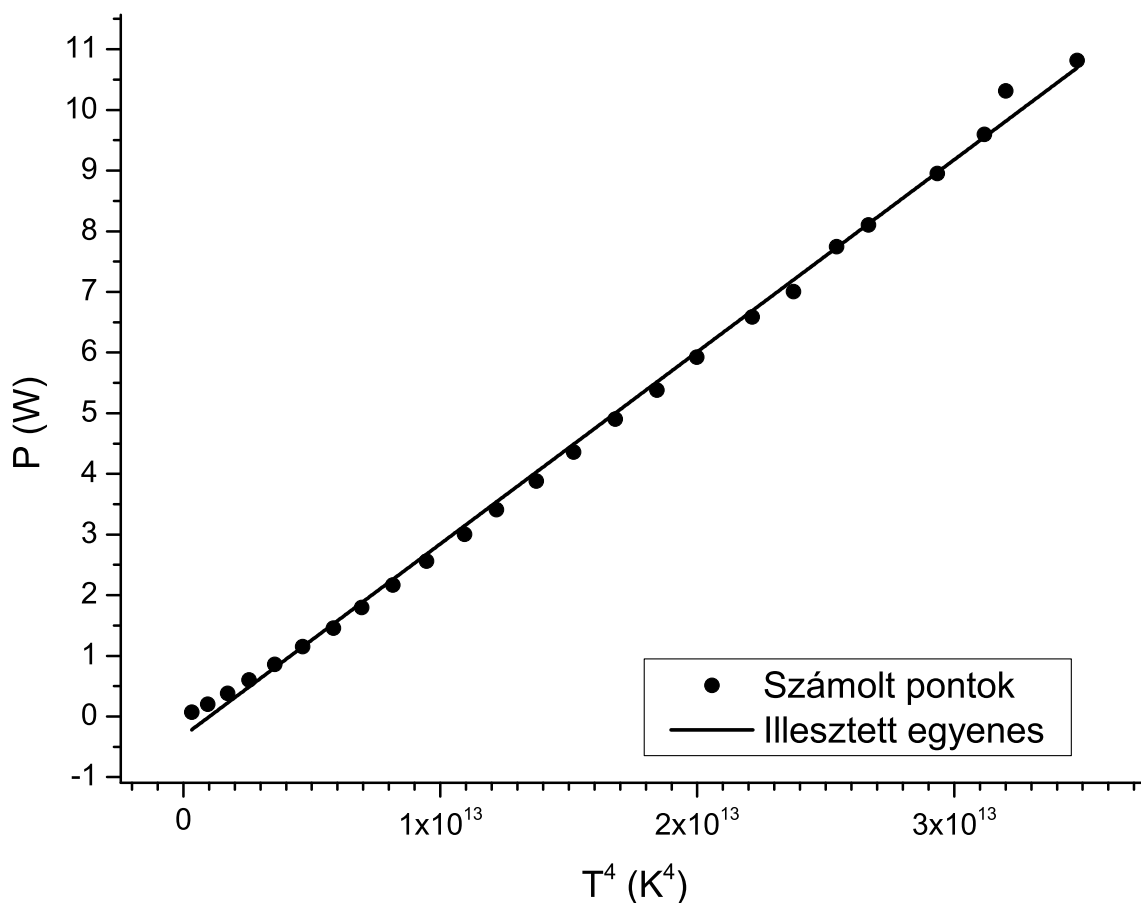
U (V)	I (mA)	I (A)	R (Ω)	P (W)	$\frac{R}{R_0}$	T (K)	T^4 (K ⁴)
1.01	71	0.071	14.22535	0.07171	3.2478	752.61403	$3.20841 \cdot 10^{11}$
2.02	101.92	0.10192	19.81947	0.20588	4.52499	987.16913	$9.49656 \cdot 10^{11}$
3.01	127.1	0.1271	23.68214	0.38257	5.40688	1145.8281	$1.72376 \cdot 10^{12}$
4	150.3	0.1503	26.61344	0.6012	6.07613	1264.43252	$2.55613 \cdot 10^{12}$
5.03	171.5	0.1715	29.32945	0.86265	6.69622	1372.94074	$3.5531 \cdot 10^{12}$
6.05	190.6	0.1906	31.74187	1.15313	7.247	1468.20309	$4.6467 \cdot 10^{12}$
7.03	207.1	0.2071	33.94495	1.45591	7.74999	1554.28088	$5.83604 \cdot 10^{12}$
8.01	224.2	0.2242	35.72703	1.79584	8.15686	1623.26782	$6.94322 \cdot 10^{12}$
9.01	240.5	0.2405	37.46362	2.1669	8.55334	1689.94207	$8.15619 \cdot 10^{12}$
10.02	256	0.256	39.14063	2.56512	8.93622	1753.81183	$9.46089 \cdot 10^{12}$
11.08	271.2	0.2712	40.85546	3.0049	9.32773	1818.5969	$1.09382 \cdot 10^{13}$
11.99	284.3	0.2843	42.17376	3.40876	9.62871	1868.0403	$1.21771 \cdot 10^{13}$
13.03	298.1	0.2981	43.71016	3.88424	9.97949	1925.26759	$1.37393 \cdot 10^{13}$
14.01	311.1	0.3111	45.03375	4.35851	10.28168	1974.2261	$1.5191 \cdot 10^{13}$
15.083	325	0.325	46.40923	4.90198	10.59571	2024.76882	$1.68074 \cdot 10^{13}$
16.023	335.9	0.3359	47.7017	5.38213	10.8908	2071.94978	$1.84296 \cdot 10^{13}$
17.016	348.2	0.3482	48.86847	5.92497	11.15718	2114.28312	$1.99826 \cdot 10^{13}$
18.22	361.6	0.3616	50.38717	6.58835	11.50392	2169.01713	$2.21336 \cdot 10^{13}$
18.99	369	0.369	51.46341	7.00731	11.74964	2207.55285	$2.3749 \cdot 10^{13}$
20.17	384	0.384	52.52604	7.74528	11.99225	2245.39567	$2.54198 \cdot 10^{13}$
20.78	390	0.39	53.28205	8.1042	12.16485	2272.19491	$2.66552 \cdot 10^{13}$
22.159	404	0.404	54.84901	8.95224	12.52261	2327.41219	$2.93422 \cdot 10^{13}$
23.154	414.5	0.4145	55.86007	9.59733	12.75344	2362.80513	$3.11682 \cdot 10^{13}$
24.102	428	0.428	56.31308	10.31566	12.85687	2378.60322	$3.20102 \cdot 10^{13}$
24.996	432.8	0.4328	57.75416	10.81827	13.18588	2428.61202	$3.47882 \cdot 10^{13}$

Az izzó $U(I)$ karakterisztikája:



2. ábra. $U(I)$ karakterisztika

A számolt pontok közül $P(T^4)$ pontokra egyenest illesztettünk:

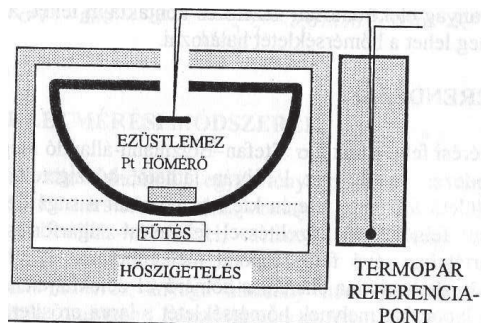


3. ábra. Stefan–Boltzman-törvény igazolása

Látható, hogy az egyenes jól illeszkedik, ezzel igazoltuk a Stefan–Boltzmann-törvény helyességét.

4.2. Stefan–Boltzmann-állandó meghatározása

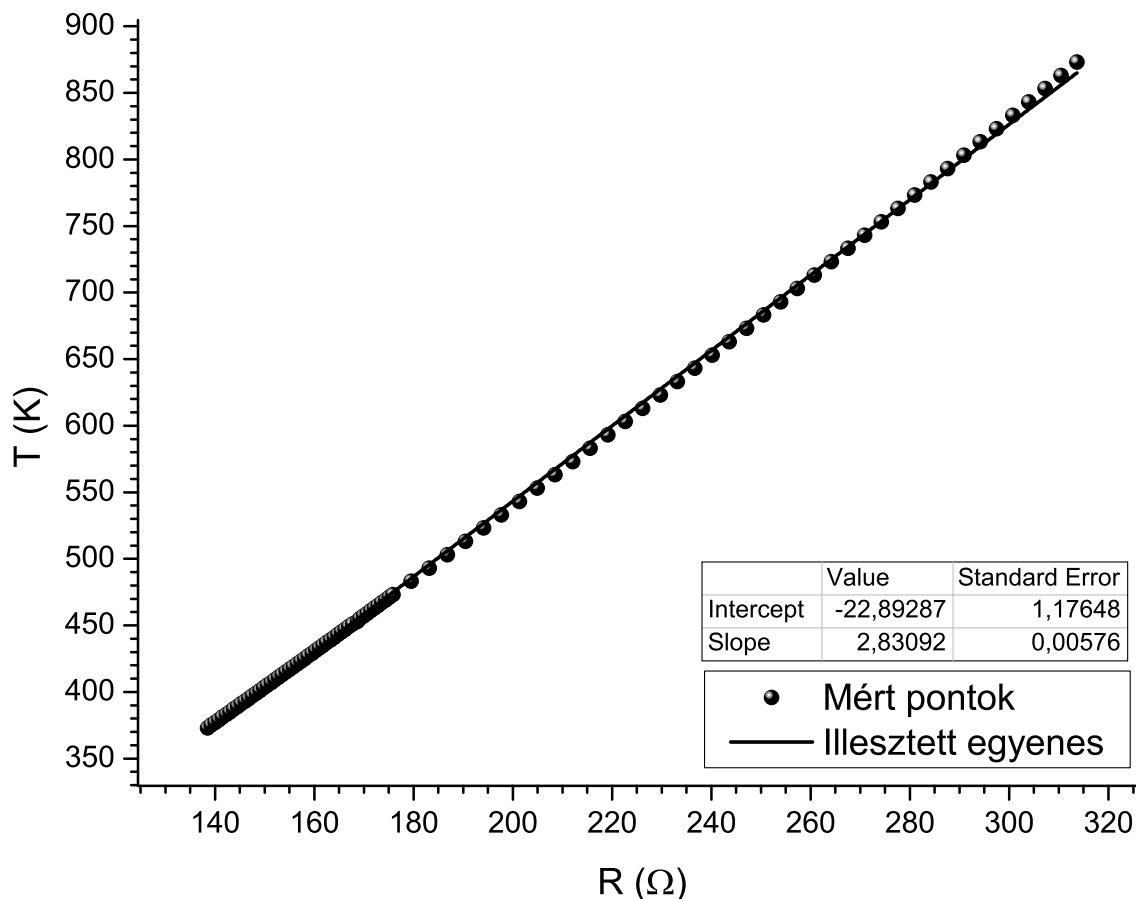
A mérési összeállítás az alábbi ábrán található ([1]):



4. ábra. Mérési elrendezés

4.2.1. Kalibráció

Mielőtt a tényleges mérést meg tudtuk volna kezdeni a műszert be kellett kalibrálnunk. A feszültségértékeket három, különböző voltméterről adtuk be a számítógépes programnak, ami ezeken az értékeken kívül az A/D konverter digitszámát is rögzítette. Az egyszerűség kedvéért jelölje a termopár feszültségét \mathcal{T} , az erősítő feszültségét \mathcal{E} , a digitértékeket pedig \mathcal{D} . Először a Pt ellenállás hőmérő kalibrációját végeztük el. A laborban kapott PLATINA.DAT adatfájltra egyenest illesztve megkapjuk a hőmérséklet-ellenállás függvényt:



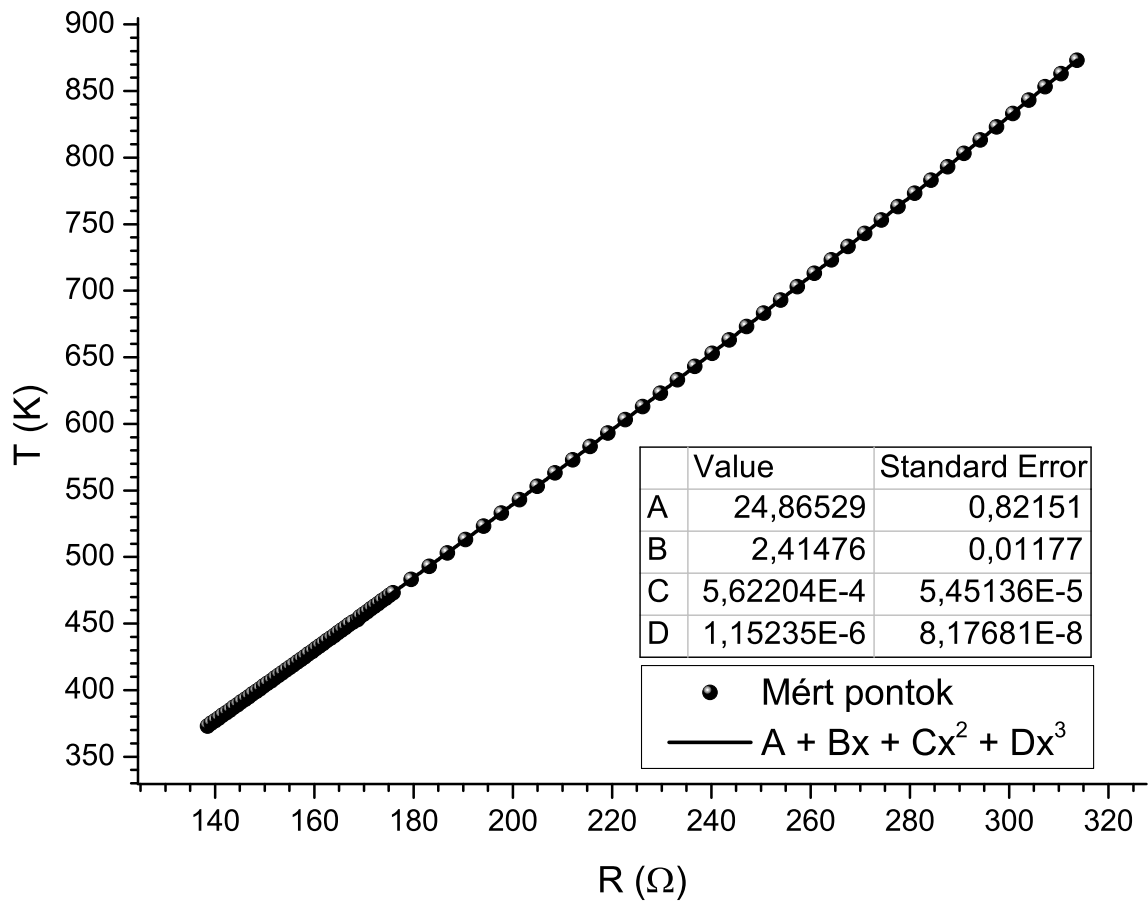
5. ábra. Platina ellenállás hőmérő kalibrációja

A kapott egyenes egyenlete:

$$T = (-22.9 \pm 1.2) + (2.8309 \pm 0.0058)R. \quad (9)$$

Látható, hogy az egyenes nem illeszkedik tökéletesen, hogy a hibát minimalizáljuk egy olyan, még egyszerűnek tekinthető görbét illesztettünk a pontokra, ahol a χ^2 eltérésfüggvény minimalizálódik.

Ez köbös függvény esetén már kellően jól teljesül:

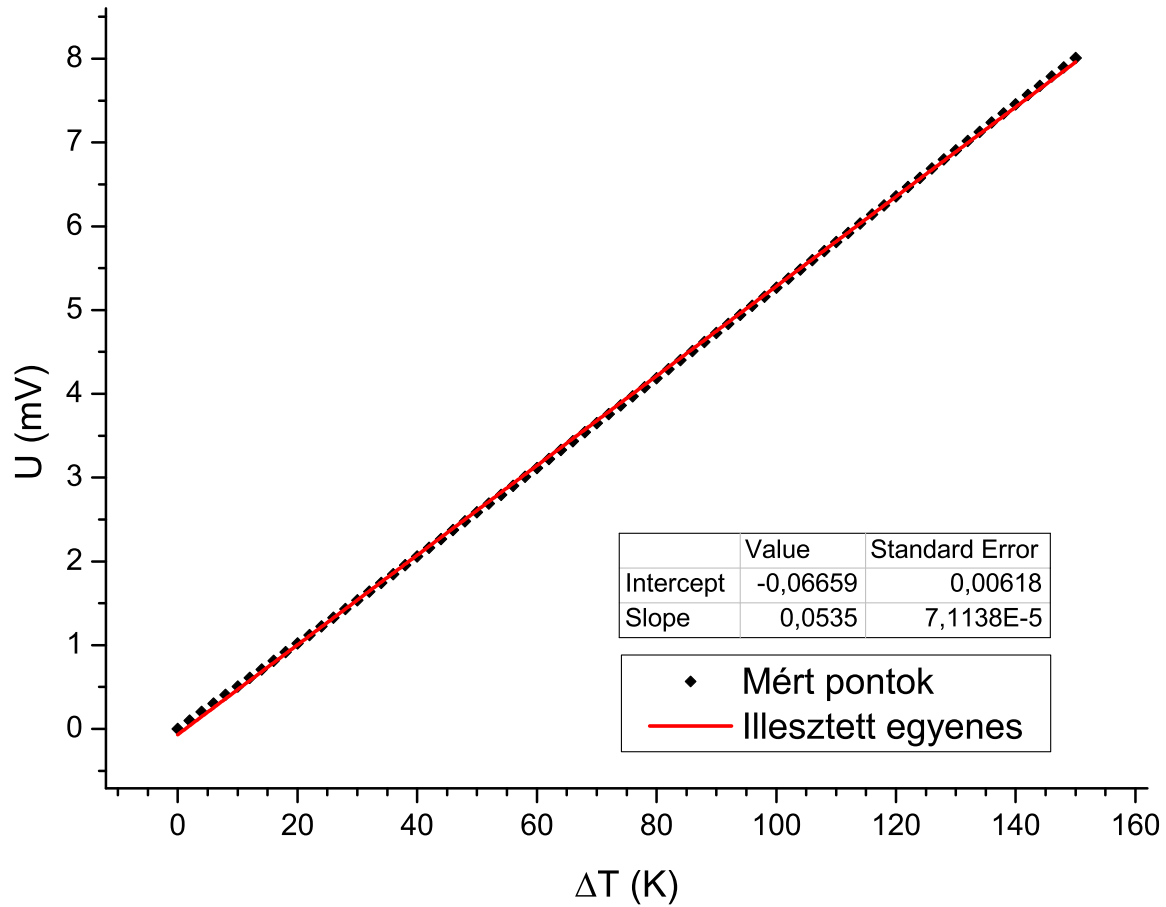


6. ábra. Platina ellenállás hőmérő kalibrációja köbös görbével

Így a kalibrációs függvény:

$$T = (24.84 \pm 0.82) + (2.415 \pm 0.012)R + (5.62 \pm 0.55) \cdot 10^{-4} R^2 + (1.152 \pm 0.082) \cdot 10^{-6} R^3. \quad (10)$$

Ezt követően a vas-konstantán termoelem kalibrációját végeztük el, szintén a laborban kapott VAS.DAT adatsor segítségével. Az adatsorra egyenest illesztettünk:



7. ábra. Vas-konstantán termopár kalibrációja

A kalibrációs egyenlet:

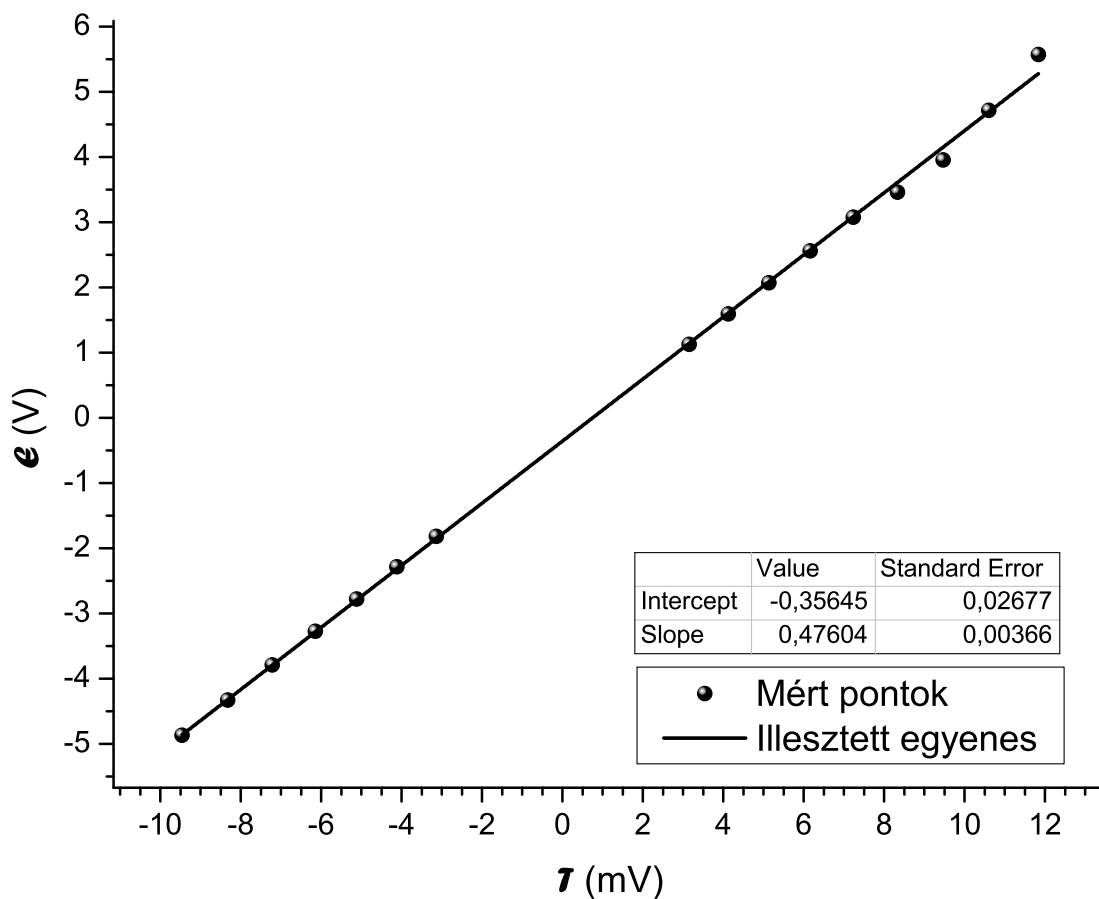
$$U = \mathcal{T} = (-0.0667 \pm 0.0062) + (0.0535 \pm 7.1 \cdot 10^{-5})\Delta T, \quad (11)$$

ahol \mathcal{T} értékét mV egységben kapjuk. A többi kalibrációt a laborban mért adatsorok segítségével végezhetjük el.

A mért adatok:

\mathcal{T} (mV)	\mathcal{E} (V)	U_{be} (V)	\mathcal{D} (digit)
11.834	5.574	1.119	4095
10.6	4.718	1.003	4091.8
9.47	3.9529	0.884	3851.1
8.33	3.4594	0.769	3616.2
7.23	3.075	0.657	3389.1
6.16	2.561	0.549	3167.8
5.13	2.071	0.445	2955.6
4.12	1.593	0.343	2748.7
3.15	1.127	0.244	2546.2
-3.14	-1.817	-0.395	1239.6
-4.116	-2.284	-0.494	1037
-5.12	-2.7752	-0.597	829.2
-6.15	-3.273	-0.702	614.2
-7.22	-3.786	-0.811	392.6
-8.33	-4.327	-0.923	164.4
-9.46	-4.867	-1.038	0

Az erősítő kalibrációjához a termopáron mért és az erősítőn mért feszültségpárookra kellett egyenest illesztenünk:

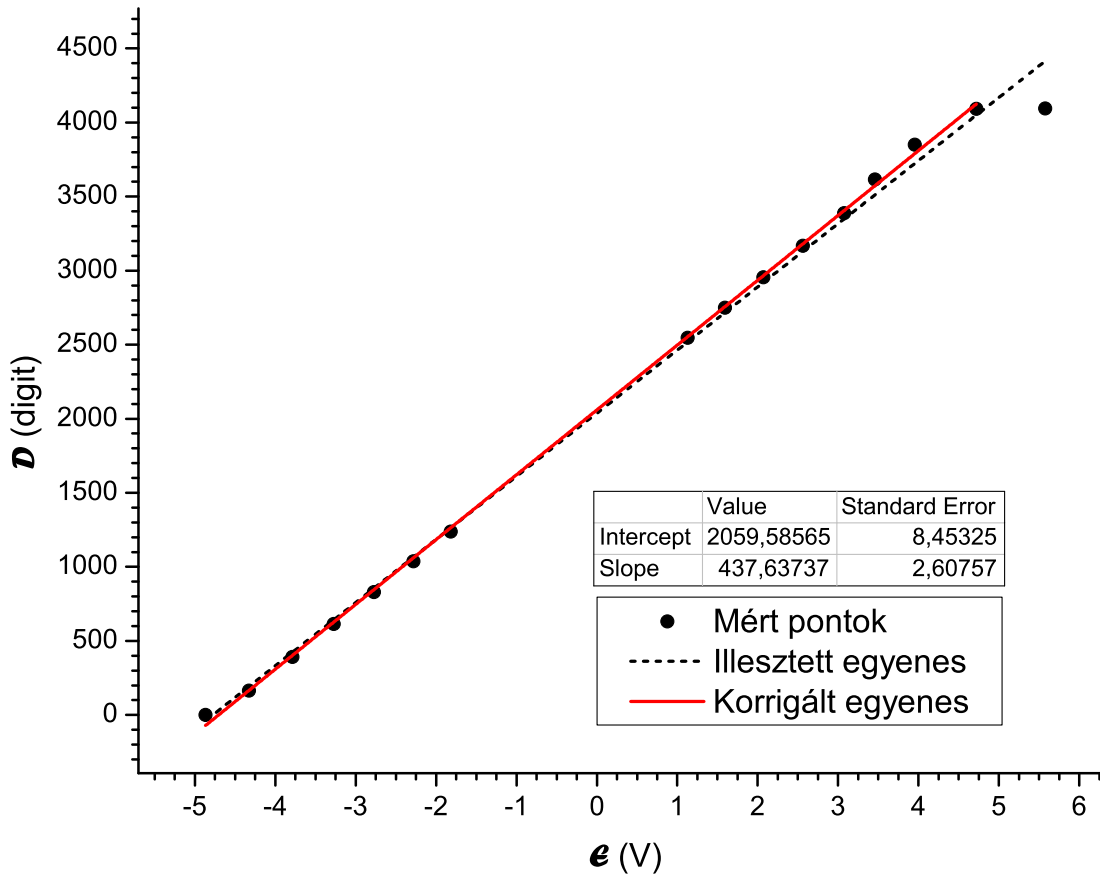


8. ábra. Erősítő kalibrációja

Az erősítő kalibrációs függvénye:

$$\mathcal{E} = (-0.356 \pm 0.027) + (0.4760 \pm 0.0037)\mathcal{T}, \quad (12)$$

ahol \mathcal{T} értékét mV egységekben kell behelyettesítenünk. Az A/D konverter kalibrációjánál a digitszámot határozzuk meg az erősítő feszültség függvényében:



9. ábra. A/D konverter kalibrációja

Látható, hogy az utolsó mért pont kifutott a mérési tartományból, ezért az illesztést elrontja. Ezt a pontot „outlier”-nek tekintve a korrigált egyenes egyenlete:

$$\mathcal{D} = (2059.6 \pm 8.5) + (437.6 \pm 2.6)\mathcal{E}. \quad (13)$$

Mivel a termopár csak relatív hőmérsékletet tud mérni, így szükségünk volt egy referencia (szoba) hőmérsékletértékre is, hogy abszolút skálán tudjunk vele mérni. Esetünkben $T_0 = 25.5^\circ\text{C} = 298.65\text{ K}$ -nek adódott. Az egyenleteket egymásba helyettesítve:

$$\mathcal{D} = 2059.6 + 437.6(-0.356 + 0.4760(-0.0667 + 0.0535\Delta T)) \quad (14)$$

$$\mathcal{D} = 1903.8144 + 208.2976(-0.0667 + 0.0535\Delta T) \quad (15)$$

$$\mathcal{D} = 1889.92095 + 11.1439216\Delta T \approx 1889.92 + 11.14\Delta T. \quad (16)$$

Innen:

$$\Delta T = \frac{\mathcal{D} - 1889.92}{11.14}, \quad (17)$$

$$T = \frac{\mathcal{D} - 1889.92}{11.14} + 298.65. \quad (18)$$

4.2.2. Mérési eredmények

A tényleges méréseket 350°C, 380°C és 410°C hőmérsékleteken végeztük. A programnak digitben kellett megadni, hogy mekkora hőmérsékletértékre fűtsön. Mivel a fűtés Schmitt-trigger elven működik, ezért minden mérés esetén lesz egy minimum és egy maximum fűtési értékünk, melyek számtani közepét tekintettük valós hőmérséklet-digitnek. Mérésünk során a hőmérsékletet úgy kapjuk, hogy a program által feljegyzett digit értéket a $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ egyenlet segítségével visszafejtjük, majd az erősítés miatt elosztjuk 5-tel. Ezzel megkaptuk a termopár \mathcal{T} feszültségét amelyet a **Pt** kalibrációs egyenletébe kell behelyettesítenünk, oly módon, hogy tudjuk, hogy a fűtést konstans $I = 3.006$ mA árammal végeztük. Azaz:

$$\mathcal{D} = 2059.6 + 437.6\mathcal{E} = 2059.6 + 437.6 \cdot 5\mathcal{T}, \quad (19)$$

$$\mathcal{T} = 1000 \cdot \frac{\mathcal{D} - 2059.6}{2188}, \quad (20)$$

$$T = 24.84 + 2.415 \left(\frac{\mathcal{T}}{3.006} \right) + 5.62 \cdot 10^{-4} \left(\frac{\mathcal{T}}{3.006} \right)^2 + 1.152 \cdot 10^{-6} \left(\frac{\mathcal{T}}{3.006} \right)^3, \quad (21)$$

ahol \mathcal{T} mV egységekben értendő. Jelölje T_s a kályha hőmérsékletét. A mért és számolt értékek:

T (°C)	\mathcal{D}_{be} (digit)	\mathcal{D}_{min} (digit)	\mathcal{D}_{max} (digit)	$\overline{\mathcal{D}}$ (digit)	\mathcal{T} (mV)	T_s (K)
350	2822	3424.1	3462.5	3443.3	632.40	568.51
380	2950	3486.8	3525.6	3506.2	661.15	595.45
410	3077	3550.1	3584.2	3567.15	689.01	621.79

Látható, hogy a kályha a kívánt hőmérsékletet csak nagyságrendileg képes közelíteni. Ezt követően felvettük a $T(t)$ görbéket olyan módon, hogy a programban elindítottuk a mérést, majd a mérőműszert behelyeztük az üregbe, majd pár másodperc elteltével kivettük onnan. A grafikonokon ennek értelmében látható egy vízszintes rész, majd egy exponenciális felfutás és egy ezt követő lecsengés (termikus egyensúly ismét beáll). Számunkra az exponenciális felfutás az érdekes, erre

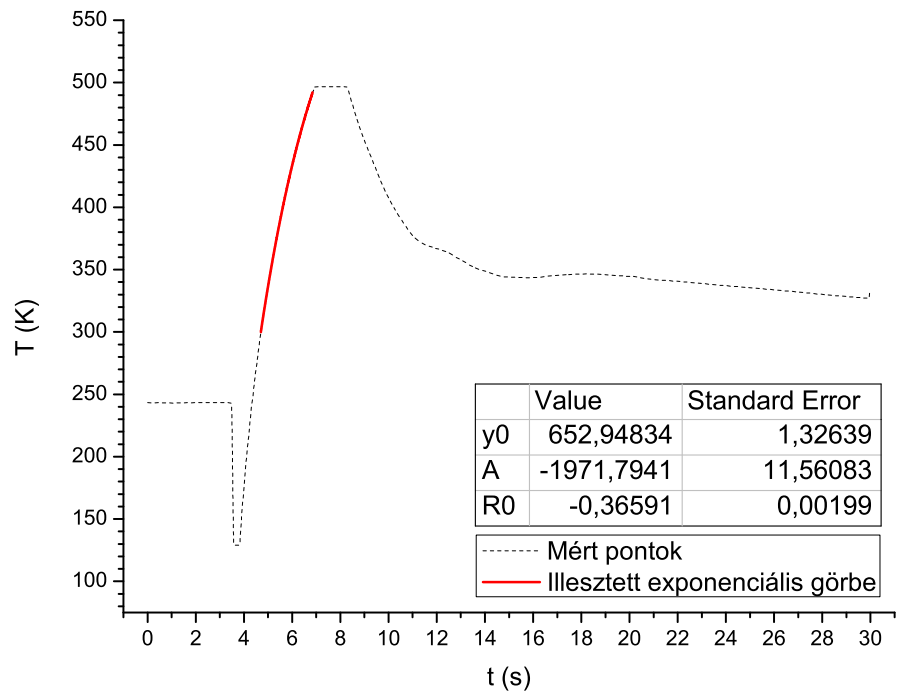
$$T = y_0 + Ae^{R_0 t} = b + Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (22)$$

$$b = y_0, \quad (23)$$

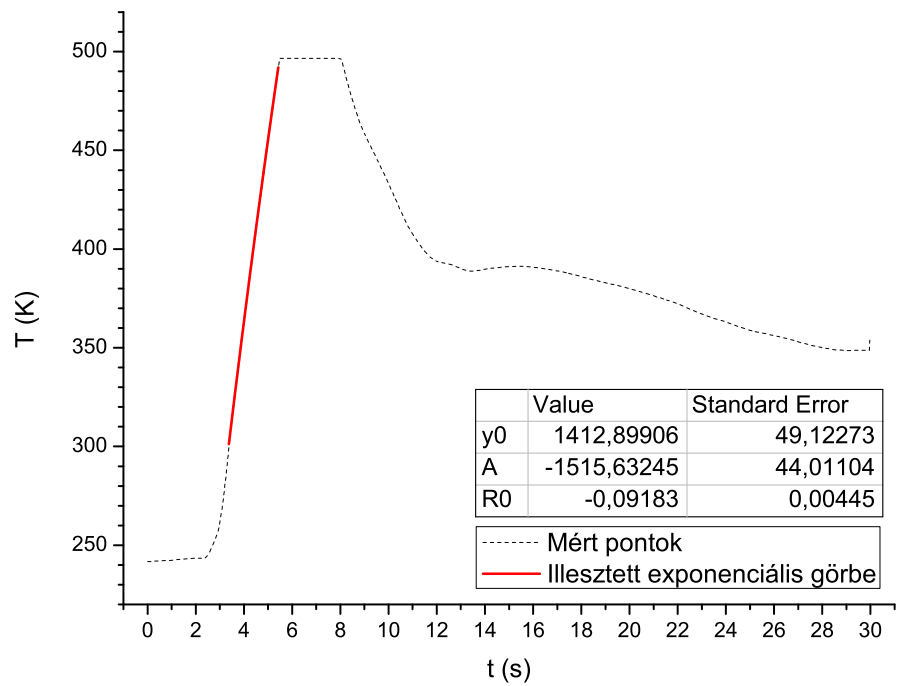
$$\tau = -\frac{1}{R_0}. \quad (24)$$

görbét illesztettünk. Mivel a grafikonokon a vízszintes szakasz után látható egy elég erős letörés is, ami szobahőmérséklet alatti értékeket vesz fel, a kiértékelésből ezeket a részeket kihagytuk, ezen adatokat zajnak értékelve. Szerencsére még így is kellően sok mérési pontunk volt.

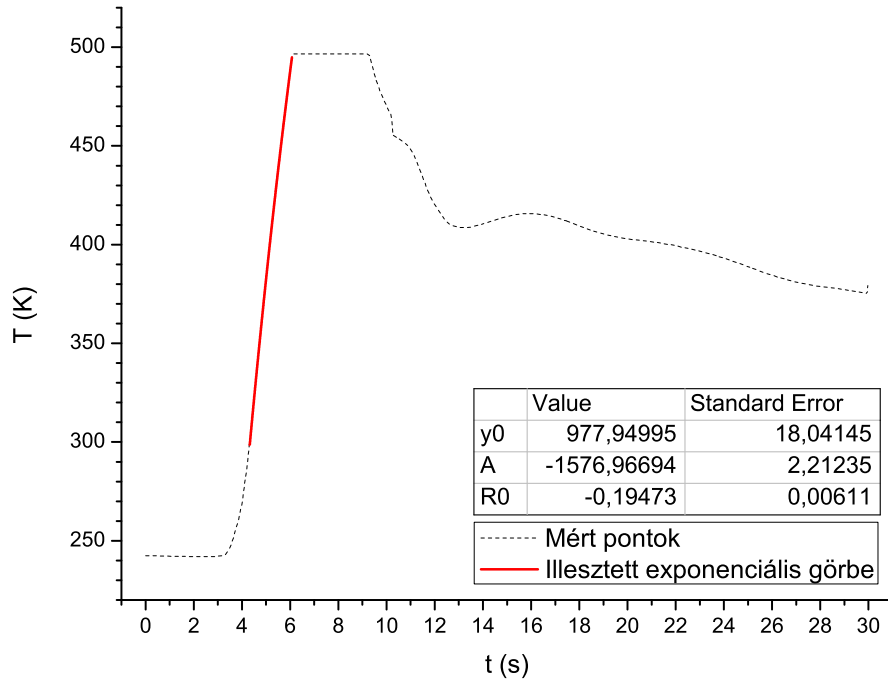
Az illesztett grafikonok:



10. ábra. Mérés 350°C-on



11. ábra. Mérés 380°C-on



12. ábra. Mérés 410°C-on

Az illesztett görbék paraméterei:

T (°C)	A (K)	τ (s)	b (K)
350	-1971.8 ± 11.6	2.733 ± 0.015	652.9 ± 1.32
380	-1515.6 ± 44.0	10.890 ± 0.528	1412.9 ± 49.1
410	-1577.0 ± 2.2	5.135 ± 0.161	978.0 ± 18.0

Mérésünkkel a Stefan–Boltzmann állandót szeretnénk meghatározni, ami a fenti elrendezésben a következő módon számolható:

$$\sigma = \frac{1}{F(T_s^4 - T^4)} \left(\frac{dT}{dt} mc + \alpha_0(T - T_0) + \alpha_1(T - T_l) \right), \quad (25)$$

ahol T_0 a dugó, T_l a levegő hőmérséklete, α_0 és α_1 ismeretlen hővezetési együtthatók, $c = 234.5 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$ az ezüst fajhője, $m = 0.53$ g az ezüstlapka tömege, $F = 1 \text{ cm}^2$ a felülete. Továbbá T_s a kályha hőmérséklete és T a szonda hőmérséklete. Ideális hővezetést feltételezve az egyenletet az alábbi alakra hozhatjuk:

$$T^4 = -\frac{mc}{\sigma F} \frac{dT}{dt} + T_s^4. \quad (26)$$

Erre egyenest illesztve σ értéke meghatározható. A mérésünk során kiértékelt görbékből $\frac{dT}{dt}$ az alábbi módon fejezhető ki:

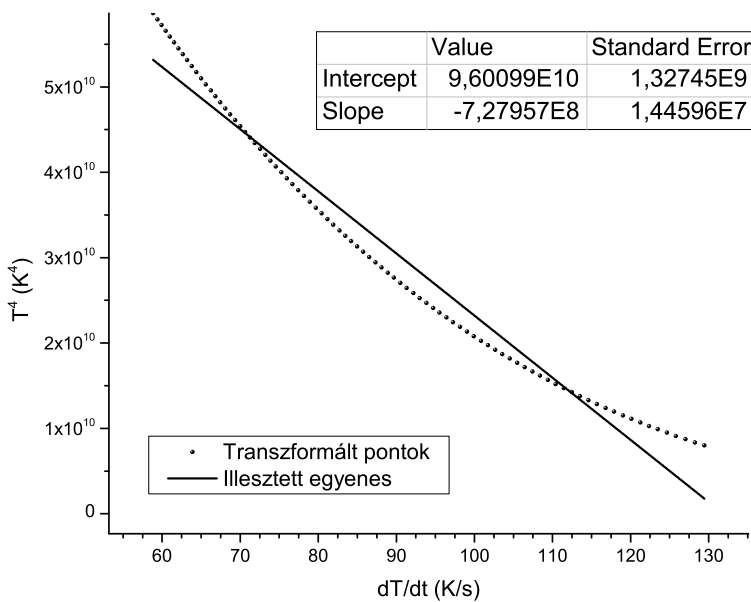
$$\frac{dT}{dt} = -\frac{A}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{T(t) - b}{\tau}. \quad (27)$$

Ilyen módon a deriválás egy algebrai művelet az adatsoron. A Stefan–Boltzmann törvény értelmében a $T^4 \left(-\frac{T(t) - b}{\tau} \right)$ pontpárookra egyenest illesztve annak meredekségéből

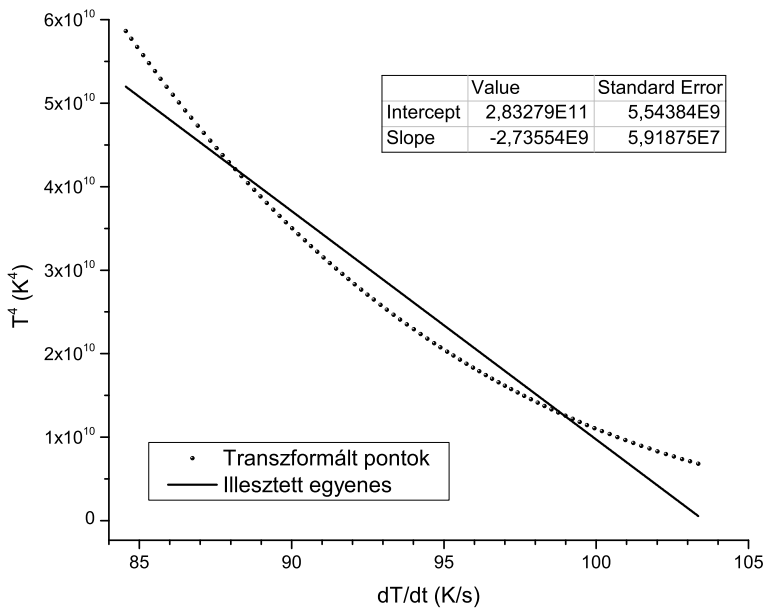
a Stefan–Boltzmann-állandó kiszámítható. Legyen az illesztett egyenes meredeksége M , ekkor:

$$\sigma = -\frac{mc}{FM} = -\frac{1242.85}{M}. \quad (28)$$

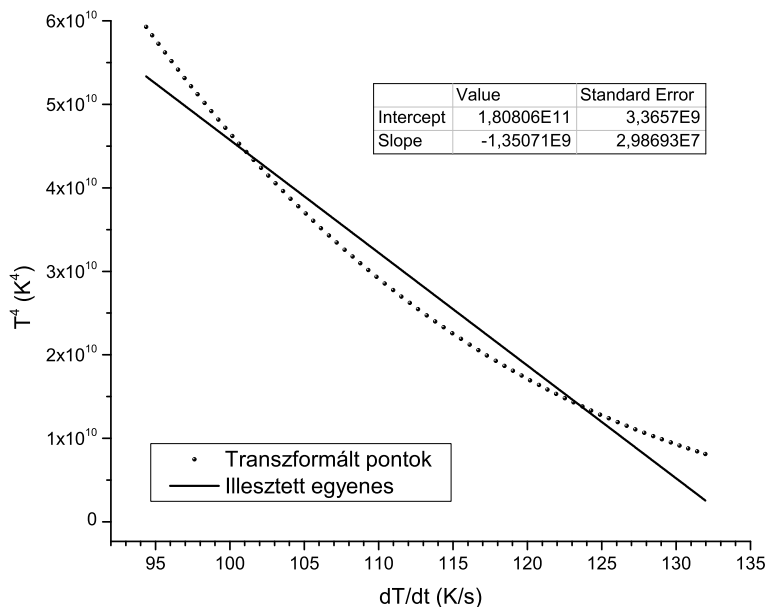
A fentebbi összefüggések alapján a transzformált pontokra illesztett egyenesek (nyilván itt is csak a helyes mérési tartományra illesztve):



13. ábra. 350°C



14. ábra. 380°C



15. ábra. 410°C

Látható, hogy a transzformált pontok nem illeszkednek egyenesre, ennek nagy valószínűséggel a mérés pontatlansága az oka, mivel a negyedik hatványon már a kis hibát is óriásivá erősítettük. Ennek fejében a mérésünk mindössze arra alkalmas, hogy a Stefan–Boltzmann-állandóra egy nagyságrendi becslést adjon. Az illesztett egyenesek meredeksége és a belőlük számolt Stefan–Boltzmann-állandók:

T (°C)	M ($\text{K}^3\text{s} \cdot 10^9$)	σ ($\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4} \cdot 10^{-6}$)
350	-0.728 ± 0.014	1.707 ± 0.033
380	-2.736 ± 0.059	0.454 ± 0.010
410	-1.351 ± 0.030	0.920 ± 0.020

A Stefan–Boltzmann-állandó irodalmi értéke: $\sigma_{\text{std}} = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4}$. Látható, hogy mi ennél legalább egy nagyságrenddel nagyobb értékeket kaptunk, ami a körülményekhez képest jó eredménynek számít. A mérést tovább pontosítaná, amennyiben a szonda be-
tevése és kivétele nem kötődne emberi hibához, illetve ha 12 bites A/D konverter helyett egy nagyobb pontosságút használnánk. További pontatlanságot okoznak a számításaink során alkalmazott közelítések, például, hogy a hővezetést ideálisnak tételeztük fel.

5. Bónusz feladat

Becsüld meg, hogy milyen teljesítménnyel sugároz egy emberi test! Ez mennyi energiát jelent naponta? Miért kell rétegesen öltözködni?

Az emberi test hőmérsékletét vehetjük $\bar{T} = 37^\circ\text{C} = 310$ K-nek. Közelítsük az emberi test felületét egy henger palástjával. Vegyük az átlagos „test-sugarat” $r = 20$ cm-nek, az átlagos magasságot $h = 1.6$ m-nek. Az emberi test felülete így:

$$F_e = 2r\pi h \approx 2 \text{ m}^2. \quad (29)$$

Ekkor a Stefan–Boltzmann-törvény értelmében a kisugárzott teljesítmény, figyelembe véve, hogy a környezet $T_k = 25^\circ\text{C} = 298\text{ K}$ hőmérsékletű:

$$P = \sigma \left(\tilde{T}^4 - T_k^4 \right) F_e = 153\text{ W}. \quad (30)$$

Ez naponta:

$$E = Pt = 13.22\text{ kJ} \quad (31)$$

energiát jelentene, amennyiben az ember fekete test lenne, azonban ez egy nagyon durva közelítés. Valóságban az emberi test jóval kevesebb energiát disszipál. Pont ennek további csökkentésére szolgál a réteges öltözködés is.

Hivatkozások

- [1] *Modern fizika laboratórium*, ELTE Eötvös kiadó, Budapest, 1995.