

Mag- és Szilárdtestfizikai Laboratórium

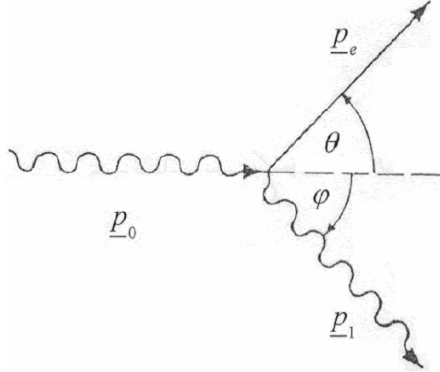
Compton-effektus vizsgálata

Barta Dániel

A mérés dátuma: 2009.03.12. csütörtök	Laborvezető neve: Csanád Máté	Értékelés:
A beadás dátuma: 2009.03.26. csütörtök	A mérést végezte: Barta Dániel - Lovász Béla - Rátkai László	

1. Bevezetés

A Compton-szórás során az elektromágneses sugárzás kvantuma részecskének tekinthető, amely rugalmasan szóródik szabad (illetve a sugárzás energiájához képest gyengén kötött) elektronokon vagy protonokon. A szóródás során a foton energiája az átadott energiával csökken, így a foton hullámhossza megnövekszik. Ez klasszikusan nem magyarázható, így a Compton-effektus felismerése a kvantumelmélet egy fontos bizonyítéka lett.



1. ábra. A Compton-szórásban résztvevő részecskék impulzusai.

A Compton-szórásra felírhatók a relativisztikus impulzus- (amit az 1. ábrán szemléltetünk) és energia-megmaradás egyenletei:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_e + \mathbf{p}_1 \quad E_0 + m_e c^2 = E_e + E_1, \quad (1)$$

ahol az impulzusokból kifejezve az energiákat:

$$p_0 c + m_e c^2 = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} + p_1 c, \quad (2)$$

ahol c a fénysebesség, m_e az elektron nyugalmi tömege, \mathbf{p}_0 és \mathbf{p}_1 a foton impulzusa az ütközés előtt, illetve után, \mathbf{p}_e az elektron impulzusa az ütközés után. Az egyenleteket \mathbf{p}_e -re kifejezve a szinusz-tételből és az impulzus-megmaradásból:

$$\begin{aligned} p_e^2 &= p_0^2 + p_1^2 - 2p_0 p_1 \cos \varphi \\ p_e^2 &= p_0^2 + p_1^2 + 2p_0 m_e - 2p_0 p_1 - 2p_1 m_e c, \end{aligned} \quad (3)$$

ezekből kifejezhető a szórt foton impulzusának nagysága:

$$p_1 = \frac{p_0}{1 + \frac{p_0}{m_e c}(1 - \cos \varphi)}. \quad (4)$$

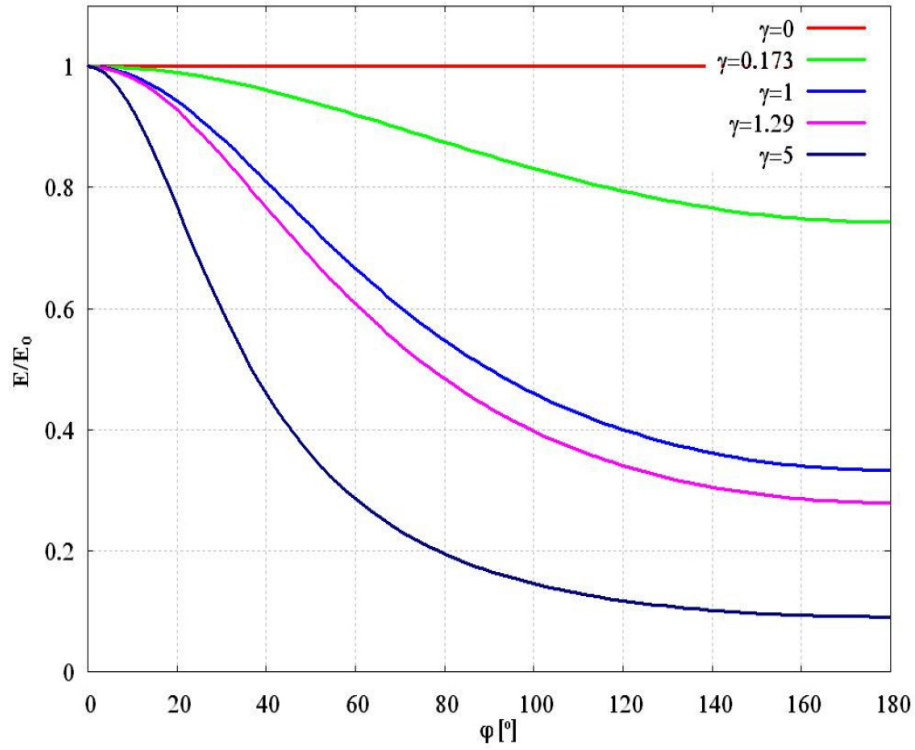
Ezt átírhatjuk energiára és impulzusra, ha felhasználjuk a foton $pc = h\nu$ energiáját:

$$h\nu_1 = \frac{h\nu_0}{1 + \gamma(1 - \cos \varphi)} \equiv h\nu_0 P, \quad (5)$$

ahol $\gamma \equiv \frac{h\nu_0}{m_e c^2}$ és P a szóródott és az eredeti foton energiájának hányadosa. A 2. ábra a szórt és a bejövő fotonok energiáját mutatja a szórás szög függvényében, különböző primer foton-energiákra. Kis foton-energiákra a primer és a szórt foton energiája közel megegyezik, míg extrém relativisztikus esetben nagy szögekre a szórt foton energiája közelítőleg:

$$E_1 = \frac{m_e c^2}{1 - \cos \varphi}, \quad (6)$$

ami független a primer foton energiájától.



2. ábra. A szórt és a bejövő fotonok energiájának hányadosa a szög függvényében, néhány primer foton energiára.

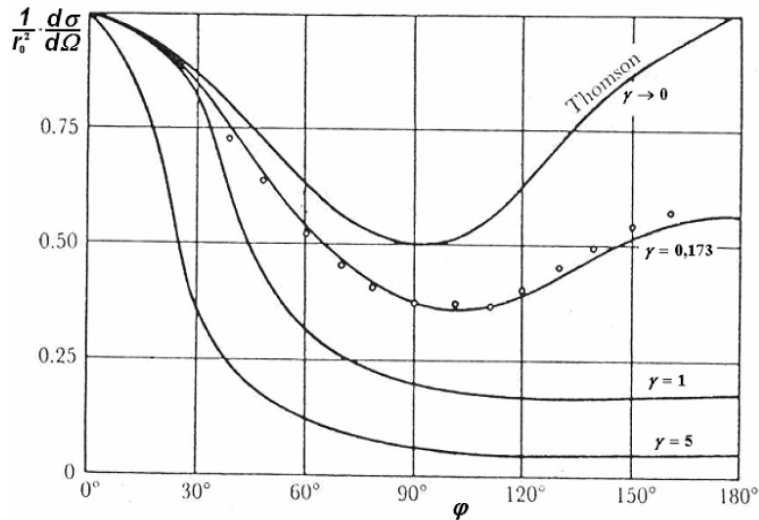
Az eddigiekből könnyen meghatározható a meglökött elektronok energiája és a bejövő fotonhoz képest mért θ szórási szöge a szóródott foton φ szögének függvényében.

A szórt fotonok szögeloszlását O. Klein és Y. Nishina határozták meg elmélet úton. A korábban bevezetett P jelölés használatával ez a következő:

$$d\sigma(\varphi) = r_0^2 \pi \sin \varphi d\varphi (P - P^2 \sin^2 \varphi + P^3), \quad (7)$$

ahol $r_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e c^2} = 2,85 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ a klasszikus elektronsugár.

A 3. ábrán az $\frac{1}{r_0^2} \frac{d\sigma(\varphi)}{2\pi \sin \varphi d\varphi} = \frac{1}{r_0^2} \frac{d\sigma(\varphi)}{d\Omega}$ mennyiség van ábrázolva néhány γ értékre. A $\gamma \rightarrow 0$ határesetben visszkapjuk a klasszikus Thompson-képletet: $\frac{1}{r_0^2} \frac{d\sigma(\varphi)}{d\Omega} = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \varphi)$.



3. ábra. A hatáskeresztmetszet a szórási szög függvényében.

A hatáskeresztmetszet definíciója:

$$\frac{\Delta N_{\text{szórt}}}{\Delta t} = N_{\text{céltárgy}} j \sigma, \quad (8)$$

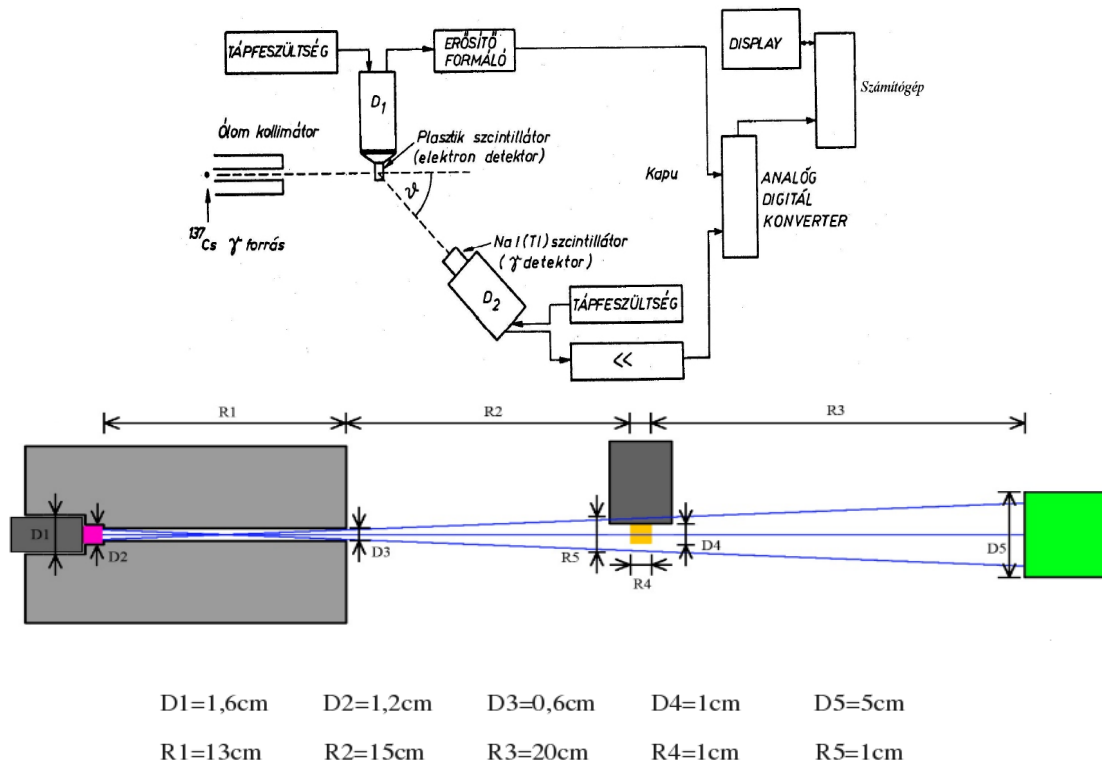
ahol $N_{\text{szórt}}$ az idő alatt szóródott részecskék száma, $N_{\text{céltárgy}}$ a céltárgyban lévő szórócentrumok (elektronok) száma, j a bejövő fotonfluxus, σ pedig a teljes hatáskeresztmetszet.

2. A mérés leírása

A gyakorlat során ^{137}Cs izotópot használunk forrásként, melynek aktivitása 1963. július 1-én 486,55 MBq volt. A ^{137}Cs izotóp 30,17 év felezési idővel, negatív béta-bomlással gerjesztett állapotú ^{137}Ba atommagba bomlik, melynek felezési ideje 2,55 perc, és 90% valószínűséggel 662 keV energiájú gamma fotonokat bocsájt ki.

Becsüljük meg a forrás aktivitását, számoljuk ki a fotonnyaláb hasznos fluxusát. Adjunk felső becslést a mérés során általunk elnyelhető dózistról.

A Compton-effektus vizsgálatok csak olyan eseményeket veszünk figyelembe, ahol elektront és fotont is detektálunk, ezt nevezzük koincidencia módszernek. A detektálások egyidejűségének 10^{-6} s pontossággal meg kell egyezniük. A sugárzást egy ólom-kollimátorral irányítjuk, a szórócentrum egy plastik szcintillátor, amely egyben detektorként is üzemel. Az elektronok detektálásakor kapott jelet erősítés és jelformálás után az analóg-digitális konverter kapujeleként használjuk. Így csak akkor lesz a D_2 detektor jele analízálva, ha detektáltunk elektront. A D_2 detektor jelei erősítés után egy sokcsatornás analízátorba kerülnek.

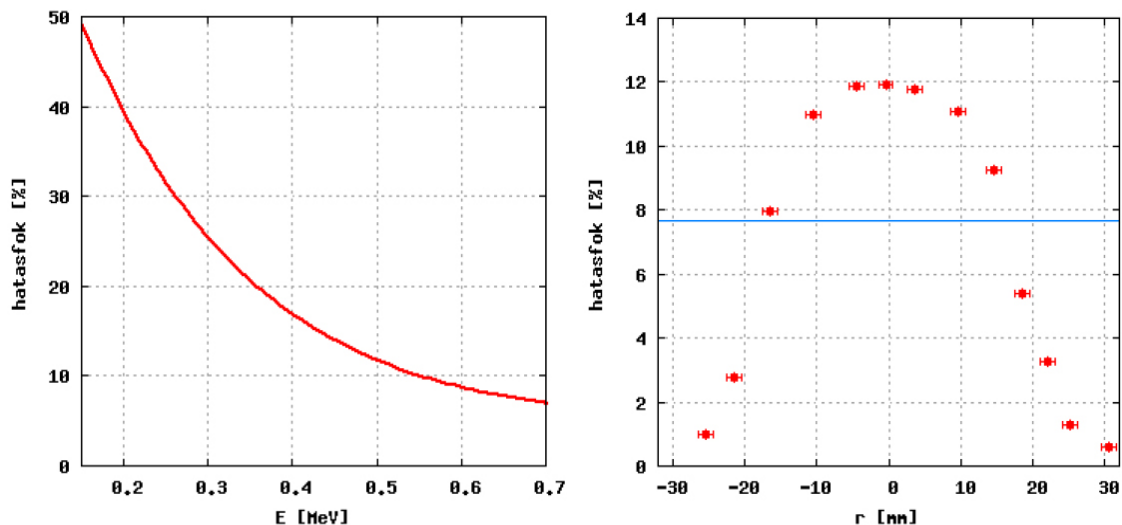


4. ábra. A mérési összeállítás vázlata és annak méretei.

A mérés során 256 csatornába mértük a beütéseket. A csúcsok helyéből az energia, a területükből az intenzitás állapítható meg. Ehhez fel kell használnunk a NaI(Tl) fotocsúcs hatásfokának energiafüggését, amelyet a következő képlet ír le (E a mért foton energiája MeV-ben):

$$\eta = 0,98 \cdot e^{-4,7E} + 0,05 \cdot E \quad (9)$$

Ugyanakkor a mérés során a detektor felületére átlagolt hatásfokra lesz szükségünk, kivéve, mikor a direkt nyalábot vizsgáljuk, ugyanis akkor nem biztos, hogy a teljes detektorfelületet éri a fotonnyaláb.



4. ábra. A hatásfok az energia (balra), és a detektor közepétől mért távolság függvényében (jobbra), (utóbbi 662 keV-es energiákra).

A mérési feladatok:

A mérési feladataink a következők voltak:

1. Számítsuk ki, hogy elméletileg hány foton éri a céltárgyat és a detektort.
2. Kalibráljuk a sokcsatornás analizátort egy koincidencia mentes mérés alapján.
3. Mérjük meg a szórt fotonok intenzitásának szögeloszlását.
4. Vizsgáljuk meg az energia-szórás szög kapcsolatát, valamint elemezzük a különböző hibaforrásokat.
5. A fotonok energiáját határozzuk meg az intenzitás szögeloszlásának segítségével.
6. Hasonlítsuk össze a mért szögeloszlás energiáját a Klein-Nishina formulával.
7. A mérési eredmények alapján határozzuk meg a klasszikus elektronsugarat.
8. Becsüljük meg, hogy mekkora dózist kaphattunk volna a laborgyakorlat ideje alatt az ólom-kollimátor használata nélkül.

3. Mérési feladatok

3.1. Számítsuk ki, hogy elméletileg hány foton éri a céltárgyat és a detektort

A sugárforrás aktivitását meghatározhatjuk, úgy hogy tudjuk, hogy 1963. július 1-én $A_0 = 486,55 \text{ MBq}$ volt az aktivitása és azóta 45 év és 270 nap telt el. A minta felezési ideje $T = 30,17 \text{ év}$, így

$$A = A_0 e^{-\frac{T}{T_{1/2}} \ln 2} = 170,12 \text{ MBq} \quad (10)$$

a minta jelenlegi aktivitása.

Ismerve a mérőberendezés geometriáját, más módon is meghatározhatjuk a sugárforrás aktivitását. Megmérve a direkt nyaláb intenzitását (kiszűrve a koincidenkiákat) a sugárforrás aktivitása meghatározható.

3.2. Kalibráljuk a sokcsatornás analizátort egy koincidencia mentes mérés alapján

A kalibrációhoz a ^{137}Ba 662 keV energiájú csúcsának és az ólom 75 keV-es $K\alpha$ vonalának segítségével végeztük. Az előbbi 197-es, míg az utóbbi a 26-os csatornán jelent meg.

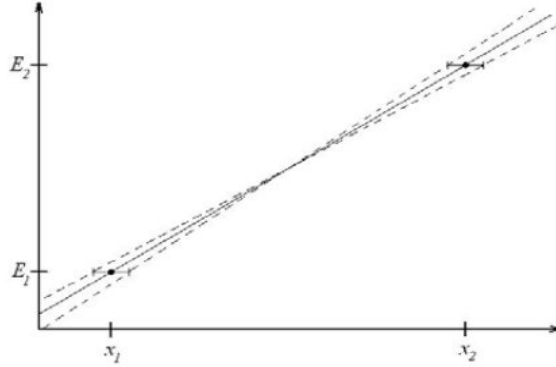
	ch (csatornaszám)	E [keV]
Ólom $K\alpha$ csúcs	26	75
Compton-csúcs	197	662

1. táblázat. A kalibrációs egyenes pontjai.

Ezekre a pontokra normáeloszlás görbéket illeszttem, amik középpontja a $ch = 196,443 \pm 0,2839$ és $ch = 25,9744 \pm 0,223$ csatornaszámokra esett. Így a kalibrációs pontokra egyenest illesztve a következőt kapjuk (keV-ben):

$$E = a \cdot ch + b, \quad (11)$$

ahol $a = 3,4428 \pm 0,0101$ és $b = -12,7976 \pm 1,9789$. Az a és b paraméterek hibája az illesztett normáeloszlásgörbék középpontjának bizonytalanságából származik. (Megnéztem az átlagtól leginkább eltérő egyeneseket, amik még beleférnek a hibahatárba.)



5. ábra. A kalibrációs egyenes és hibahatárai.

3.3. Mérjük meg a szórt fotonok intenzitásának szögeloszlását

30° és 100° között, 8 helyzetben 900-1000 másodperc hosszúságú méréseket végeztünk.

$$f(x) = A \cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad (12)$$

ahol $A = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, ha 1-re normáljuk az $f(x)$ -et. (Így az $N_{\text{mért}} = A \cdot \sigma\sqrt{2\pi}$, amit már csak a 3. táblázatban fogunk feltüntetni.)

φ	t [s]	E [keV]	E [ch]	ΔE [ch]	terület (A)	σ
30°	877	$565,5928 \pm 3,6757$	168	1	$7,92 \pm 1,16$	$8,47 \pm 1,45$
40°	916	$507,0652 \pm 3,5040$	151	1	$9,14 \pm 1,24$	$6,74 \pm 1,07$
50°	908	$455,4232 \pm 3,3525$	136	1	$8,18 \pm 1,04$	$6,88 \pm 1,03$
60°	920	$407,2240 \pm 3,2111$	122	1	$8,23 \pm 1,00$	$7,67 \pm 1,09$
70°	914	$369,3532 \pm 3,1000$	111	1	$9,97 \pm 0,98$	$7,06 \pm 0,81$
80°	1052	$328,0396 \pm 2,9788$	99	1	$10,38 \pm 1,00$	$6,52 \pm 0,73$
90°	1305	$297,0544 \pm 2,8879$	90	0	$12,66 \pm 1,10$	$7,04 \pm 0,71$
100°	949	$272,9548 \pm 2,8172$	83	0	$14,74 \pm 0,98$	$5,68 \pm 0,44$

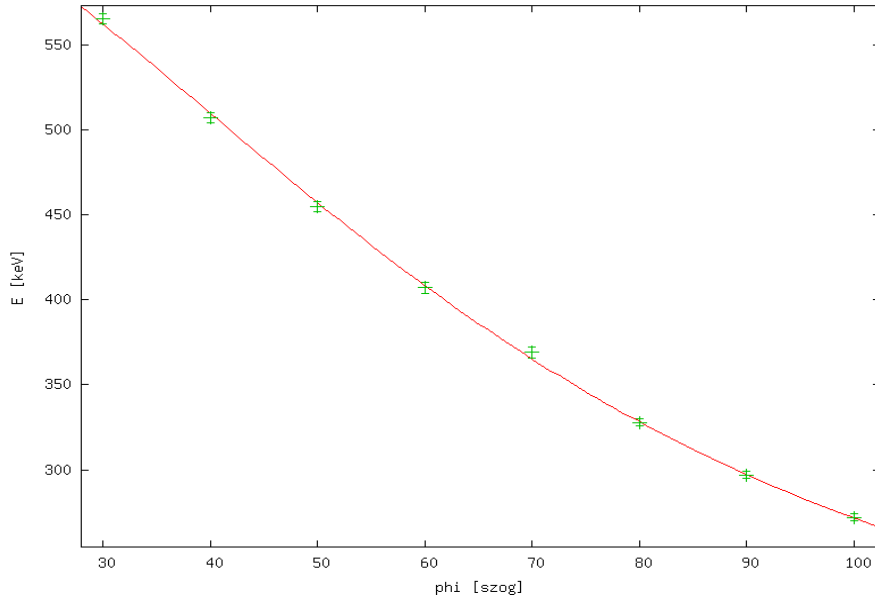
2. táblázat. A szórt fotonok intenzitásának szögeloszlása.

3.4. Vizsgáljuk meg az energia-szórás szög kapcsolatot, valamint elemezzük a különböző hibaforrásokat

A 2. táblázatban feltüntetett mértési energia adatokat és azok hibáját (zöld) a 6. ábrán ábrázolom az illesztett elméleti görbével együtt (piros). A görbe amelyre illeszttem az (5) egyenlet alapján az

$$E = \frac{E_0}{1 + \gamma(1 - \cos(\phi))} + b, \quad (13)$$

ahol $E_0 = 652,036 \pm 3,309 \text{ keV}$ és $\gamma = 1,19348 \pm 0,01742$ illesztett paraméterek jól egyeznek az irodalmi értékkel.



6. ábra. Az energia-szórási szög függése.

A mérési adatokat legjobban befolyásoló hibaforrás a statisztikus hiba. A Poisson-eloszlás tulajdonságai miatt egy csatornába érkezett beütések számának hibája: $\Delta N = \sqrt{N}$. Ez a hiba csatornáról-csatornára független. Az elméleti görbe valószínűségének meghatározásához az adatok és az elméleti görbe távolságát kell meghatározzuk. Ez a jegyzet szerint:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{|f(x_i) - y_i|^2}{\Delta y_i^2}. \quad (14)$$

A mérésünk másik a fő hibaforrása sokcsatornás analízátor a rossz kalibrációja lehet. A szisztematikus hibákat (δy_i) úgy vehetjük figyelembe, hogy a χ^2 értékét δy_i -vel módosítjuk:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{|f(x_i) - y_i + \alpha \delta y_i|^2}{\Delta y_i^2}, \quad (15)$$

hol α egy -1 és 1 között választható szám. A χ^2 valószínűsége k szabadsági fokok figyelembevételével a következő:

$$P(\chi^2) = \frac{1}{2^{k/2}(k/2 - 1)!} (\chi^2)^{k/2-1} e^{-\chi^2/2}. \quad (16)$$

Mivel illesztettem és nem az irodalmi értékét vettem E_0 -nak és γ -nak, ezért ezen módosítást nem alkalmazom. A χ^2 -re így

$$\chi^2 = 3,8487 \quad (17)$$

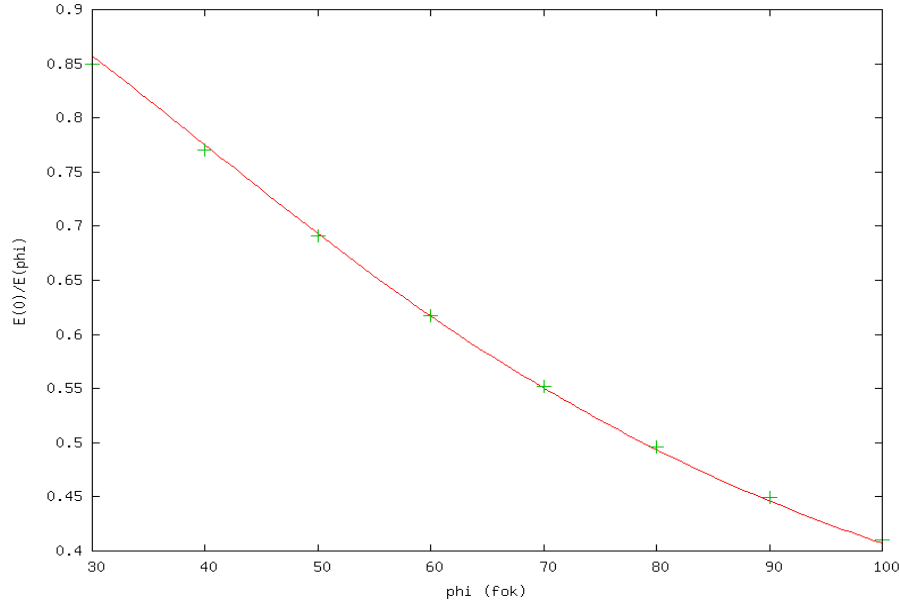
értéket kaptam.

3.5. A fotonok energiáját határozzuk meg az intenzitás szögeloszlásának segítségével

A mérési feladatnak megfelelően ábrázoltam az $E(\phi = 0)/E(\phi)$ -t az $1 - \cos \phi$ változó függvényében, majd illesztettem a

$$P(1 - \cos \phi) = \frac{1}{1 + \gamma \cdot (1 - \cos \phi)} \quad (18)$$

elmélet által jósolt görbét, úgy, hogy a γ paramétert szabadon hagytam. P a primer és szóródott fotonok energiájának aránya. Az γ paraméter illesztett értéke $\gamma = 1,2417 \pm 0,0083$, azaz az illesztés igen jó.



7. ábra. Az $E(\phi = 0)/E(\phi)$ függvény és az illesztett görbe.

Ez alapján kiszámítható a fotonok energiája, amire a következő:

$$E_\gamma = \gamma m_e c^2 = 634,48 \pm 4,24 \text{ keV}, \quad (19)$$

ami alig tér el a beérkező foton energiájától.

3.6. Hasonlítsuk össze a mért szögeloszlás alakját a Klein-Nishina függvényekkel

Az összehasonlítás során figyelembe kell vennünk a detektor hatásfokának energiafüggését. Ezt a (9) egyenlet írja le. A Klein-Nishina formula a szórt fotonok szögeloszlását adja meg, lásd (7) egyenlet:

$$d\sigma(\phi) = \pi r_0^2 \sin \phi d\phi (P - P^2 \sin^2 \phi + P^3). \quad (20)$$

A hatáskeresztmetszet (8) definícióját átírva a differenciális hatáskeresztmetszetre, és beírva a nyaláb és a minta keresztmetszetének közös A részét, a minta dx vastagságát, és a céltárgyon a szórócentrumok n számsűrűségét, a következőt kapjuk:

$$\frac{\Delta N_{\text{szórt}}}{\Delta t} = j \cdot A \cdot dx \cdot n \cdot \Delta \Omega \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}, \quad (21)$$

ahol $\Delta \Omega$ a detektor által lefedett térszög. A $j \cdot A$ szorzat a forrásból a céltárgyra irányuló fotonok száma másodpercenként.¹ A képletben szereplő kifejezések értékei (a már korábban leírtakkal összhangban):

$$j = A \cdot \frac{(D3)^3}{(D2)^2} \cdot \frac{(D3/2)^2}{4 \cdot (R1)^2} = 6413,8 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad \Delta \Omega = 4\pi \frac{(D5/2)^2}{4(R3)^2} = 0,049, \quad (22)$$

ahol $dx = 1 \text{ cm}$, $A = 1 \text{ cm}^2$, és $n = 3,09 \cdot 10^{23}$. Az (5) formula szerint annak a valószínűsége, hogy egy adott energiájú foton a ϕ szög körüli $d\phi$ tartományba szóródik:

$$d\sigma = 2\pi r_0^2 \cdot \sin \phi \frac{1 + \cos^2 \phi}{2} \frac{1}{(1 + \gamma(1 - \cos \phi))^2} \left[1 + \frac{\gamma^2(1 - \cos^2 \phi)}{(1 + \cos^2 \phi)(1 + \gamma(1 - \cos \phi))} \right] d\phi, \quad (23)$$

ebből a differenciális hatáskeresztmetszet:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1 + \cos^2 \phi}{2} \frac{1}{(1 + \gamma(1 - \cos \phi))^2} \left[1 + \frac{\gamma^2(1 - \cos^2 \phi)}{(1 + \cos^2 \phi)(1 + \gamma(1 - \cos \phi))} \right] \quad (24)$$

A differenciális hatáskeresztmetszet ismeretében $\Delta N_{\text{szórt}}$ kifejezhető. A 3. táblázatban tüntetem fel a kiszámított hatásfokokat, illetve szórt fotonok $\Delta N_{\text{szórt}}$ számát:

¹A szórócentrumok éppen a céltárgy szabad elektronjai, de ami azt illeti, ekkora energiánál a céltárgy minden elektronja szabadnak tekinthető. Így az elektronok számsűrűsége: $n = \frac{\rho N_A Z}{M}$, ahol $\rho = 1,03 \text{ g/cm}^3$ a céltárgy tömegsűrűsége, Z a rendszám, M a móltömege, és N_A az Avogadro-szám. A céltárgy anyaga szénnek tekinthető.

φ	E [keV]	terület ($N_{\text{mért}}$)	Δt	$\eta(E)$	$y = \frac{N_{\text{mért}}}{\eta \Delta t}$
30°	565,59 ± 3,67	421,49 ± 72,16	877	28,28 ± 0,18	0,0170 ± 0,0029
40°	507,06 ± 3,50	387,07 ± 61,45	916	25,35 ± 0,18	0,0167 ± 0,0026
50°	455,42 ± 3,35	353,61 ± 52,94	908	22,77 ± 0,17	0,0171 ± 0,0026
60°	407,22 ± 3,21	396,62 ± 56,36	920	20,36 ± 0,16	0,0212 ± 0,0030
70°	369,35 ± 3,10	442,26 ± 50,74	914	18,47 ± 0,16	0,0262 ± 0,0030
80°	328,04 ± 2,98	425,29 ± 47,61	1052	16,40 ± 0,15	0,0246 ± 0,0028
90°	297,05 ± 2,89	559,99 ± 56,47	1305	14,85 ± 0,14	0,0289 ± 0,0029
100°	272,95 ± 2,82	526,05 ± 40,75	949	13,65 ± 0,14	0,0406 ± 0,0031

3. táblázat. A hatásfokok és y a szórási szög függvényében.

A feladat leírása szerint a korábban kiszámított $\Delta N_{\text{szórt}}(\phi)$ értékekre kell illeszszük a Klein-Nishina egyenlet K -szorosát, azaz a

$$y = K \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (25)$$

függvényt, amiben az illesztés segítségével K -t szeretnénk meghatározni. Az így kapott eredmény: $K = 0,0821 \pm 0,0032$. Az illesztett görbe χ^2 eltérését is meg kellett határozni: $\chi^2 = \sum_i \frac{|f(x_i) - y_i|^2}{\Delta y_i^2} = 20,9$.

3.7. A mérési eredmények alapján határozzuk meg a Klasszikus elektronsugarat

A Klein-Nishina formula és a $d\sigma$ -át meghatározó egyenletet felhasználva:

$$\frac{1}{2}(P - P^2 \sin^2 \phi + P^3) = \frac{1}{r_0^2} \frac{d\sigma(\phi)}{d\Omega}, \quad (26)$$

ezt átrendezve:

$$\frac{d\sigma(\phi)}{d\Omega} = \frac{1}{j \cdot A \cdot dx \cdot n \cdot \Delta\Omega} \frac{\Delta N_{\text{szórt}}}{\Delta t}. \quad (27)$$

Ha ezt a két egyenletet a direkt nyaláb esetén vizsgáljuk, akkor ott $P = 1$ és $\sin \phi = 1$, vagyis ha a direkt nyaláb adatait beírjuk a másik képletbe is, akkor megkapjuk a klasszikus elektronsugár négyzetének felét:

$$\frac{d\sigma(\phi)}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \text{ azaz, } r_0 = 2,5 \cdot 10^{-15} \text{ m}. \quad (28)$$

3.8. Becsüljük meg, hogy mekkora dózist kaphattunk volna a laborgyakorlat ideje alatt az ólom-kollimátor használata nélkül

Az elnyelő felület felső becslésének megfelel az 1 m². A forrástól mért átlagos távolságot 1,5 m-nek tekintem. A laborgyakorlat időtartama maximálisan 5 óra. A sugárzást szenvedett testtömeget 10 kg-nak tekintem.

$$D = \frac{E_\gamma A \Delta t}{m} = \frac{662 \text{ keV} \cdot 170,12 \text{ MBq} \cdot 18000 \text{ s}}{10 \text{ kg}} \cdot \frac{1 \text{ m}^2}{4\pi \cdot (1,5 \text{ m})^2} = \frac{4,0326 \cdot 10^{15} \text{ J}}{10 \text{ kg}} = 0,117 \text{ mGy} \quad (29)$$

További feladat volt kiszámolni, hogy mekkora dózist kapnánk, ha lenyelnénk a sugárforrást és az csak 10 nap múlva távozna testünkől. Az elnyelő szövet tömegét továbbra is 10 kg-nak feltételezzük.

$$D = \frac{E_\gamma A \Delta t}{m} = \frac{662 \text{ keV} \cdot 170,12 \text{ MBq} \cdot 864000 \text{ s}}{10 \text{ kg}} \cdot \frac{1 \text{ m}^2}{4\pi \cdot (1,5 \text{ m})^2} = \frac{4,0326 \cdot 10^{15} \text{ J}}{10 \text{ kg}} = 1,16 \text{ Sv} \quad (30)$$

Ami veszélyes érték, de bőven a 5 Sv-es félhalálos dózis alatt van.

4. Irodalomjegyzék

[1.] Compton-effektus vizsgálata - mérés leírás, <http://ion.elte.hu/magfiz/korszeruvizsgmodlab/com.pdf>

[2.] Mérések a klasszikus fizika laboratóriumban - hibaszámítás, *Havancsák Károly szerk.*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2003.

