Jegyzőkönyv

2.
Rugalmas állandók mérése

Készítette:
Bozsoki Péter,
másodéves fizikushallgató

1999. március 26., péntek

1. A mérés célja

A mérés célja néhány különböző anyagú és alakú fémtárgy rugalmas állandóinak meghatározása volt és ezen keresztül a testek mechanikai rugalmas deformációival való ismerkedés a kísérleti fizika oldaláról.

2. A mérés elve

A mérést a rugalmas deformációk két speciális esetén keresztül vizsgáltam meg. Az egyik a (gyakorlatilag is nagy jelentőségű) rúd lehajlása, ha a végét ismert *F* erővel terhelem (a rúd saját súlyát elhanyagoltam), a másik pedig a csavarás, más néven a torzió jelensége.

2.1. Rúd lehajlása

Az első esetben egy egyik végén mereven (tehát abban a pontban elfordulásra képtelen) és vízszintesen befogott rudat vizsgáltam, melynek hossza *l*, a szabad végén a lehajlása *s* és $\underline{F}$ függőleges erő hat rá a szabad végén. Levezethető, hogy ebben az esetben $z(x) = -\frac{F}{EI}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$, ahol *z* az ú.n. *neutrális szál* függőleges tengely menti lehajlása, *E* anyagi állandó, neve Young-modulusz, *I* a keresztmetszet másodrendű nyomatéka, *x* pedig az éppen vizsgált pont vízszintes távolsága az origótól, amit a rúd befogott végénél vettem fel. Mivel én a rúd végénél mértem a lehajlást és *z(x=l)= - s*, ezért $s = \frac{Fl^3}{3EI}$. Innen a Young-modulusz az $E = \frac{Fl^3}{3sI}$ összefüggéssel már könnyen kiszámolható. Mivel *s*-t nem tudtam közvetlenül mérni, ezért *E*-t nem egy *F-s* párból határoztam meg, hanem több, különböző *F* értéknél megmértem a lehajlást és az így kapott *F(s)* pontsorra egyenest illesztve határoztam meg a Young-modulusz értékét. Ezen kívül a mérés gyakorlati kivitelezése miatt nem egy végén befogott rudat vizsgáltam, hanem mindkét végén alátámasztott, de elfordulni képes, és középen *F* erővel terhelt rudat. Ez az eset ekvivalens azzal, amikor *l/2* hosszúságú és *F/2*-vel (a végén) terhelt rudat vizsgálom. Ezért $E = \frac{l^3}{48I} \cdot \frac{F}{s}$. *I* az általam mért esetekben (kör ill. téglalap keresztmetszetű tárgyak) következőképpen számolható ki:

$$I_{kör} = \int_{körlap} z^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^R (r * \cos\varphi)^2 (r) dr * d\varphi = \int_0^{2\pi} (\cos\varphi)^2 d\varphi * \int_0^R (r)^3 dr = * \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^R * \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{kör} = \underline{\frac{\pi}{4} R^4}$$

$$I^{kisebb}_{téglalap} = \int_{téglalap} z^2 = \int_0^a \int_{-b/2}^{b/2} (z)^2 dz * dx = \underline{\frac{1}{12} * a * b^3}$$

$$I^{nagyobb}_{téglalap} = \int_{téglalap} z^2 = \int_0^b \int_{-a/2}^{a/2} (z)^2 dz * dx = \underline{\frac{1}{12} * a^3 * b}$$

2.2. Csavarás

Ha egy, az egyik végén befogott henger (melynek hosszúsága *l*, sugara pedig *R*) másik végére *M* forgatónyomatékkal hatunk, akkor a szabad vég φ szöggel elfordul. Bebizonyítható, hogy $\varphi = \frac{2IM}{\pi G R^4}$, ahol csak *G* a ismeretlen: ez a Young-moduluszhoz hasonlóan anyagi jellemző, neve *torziómodulusz*.

A torziómoduluszt két módon is megmértem. Az egyszerűbb módszer szerint a $G = \frac{2IM}{\pi \varphi R^4}$ összefüggés közvetlen kihasználásával tudtam mérni *G*-t. Ugyanis a mérésben vékony drótról volt szó, ezért torziós ingát használtam, melynek lengésideje: $T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta\varphi}{M}}$. Innen $G = \frac{8\pi\Theta l}{R^4 T^2} = K\frac{\Theta}{T^2}$, ahol $K := \frac{8\pi \cdot l}{R^4}$. Mivel Θ-t nem ismertem, ezért megmértem két különböző Θ mellett a lengésidőt. Ha ugyanis M/φ állandó marad, és Θ-t úgy változtatjuk meg, hogy az inga tömegét növelem, de középen terhelve, akkor a Steiner-tétel értelmében $\frac{\Theta_{üres}}{\Theta_{terhelt}} = \frac{T^2_{üres}}{T^2_{terhelt}} \Rightarrow$ $\Theta_{üres} = \Theta_{Súly} \cdot \frac{T^2_{üres}}{T^2_{terhelt} - T^2_{üres}}$, ahol a $\Theta_{Súly}$ az ingára helyezett súlyok tehetetlenségi nyomatéka.

Kicsivel bonyolultabb volt a másik módszer: ebben az ingát a forgástengelyétől *a* távolságra egy-egy tárcsával terheltem, melyeknek tömege és tehetetlenségi nyomatéka ismert volt (m_1, Θ_1 ill. m_2, Θ_2). Ekkor, szintén a Steiner-tétel miatt: $\Theta_{eredő} = \Theta_{üres} + \Theta_1 + \Theta_2 + (m_1+m_2)\cdot a^2$. Innen: $T^2(a^2) = \frac{K}{G}(\Theta_{üres} + \Theta_1 + \Theta_2) + \frac{K}{G}\cdot(m_1 + m_2)\cdot a^2$. Ábrázolva a $T^2(a^2)$ párokat, rájuk egyenest illesztve megkaptam a *G* ill. a $\Theta_{üres}$ értékét.

3. A mérés kivitelezése

A mérés kivitelezése során a következő dolgokat használtam:

- lengésszámláló óra — 10 lengés mérésére: Δ t=0,0005 s
- mikrométercsavar — Δ R=0,02 mm
- tolómérő — Δ d=0,05 mm
- mérleg — Δ m=0,00005 g
- lehajlásmérő — Δ s=0,01 mm

3.1. Rudak lehajlásának mérése

A ***2.1.*** pontban leírtaknak megfelelően mértem meg a következő minták lehajlását: alumíniumból készült henger (3-asszámú minta), vörösréz henger (7-es számú minta) és téglalap alapú egyenes sárgaréz hasáb (8-as minta).

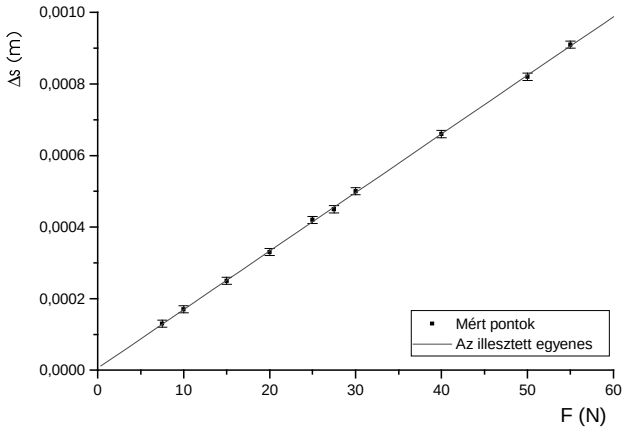
3.1.1. Alumíniumból készült henger

A henger átmérőjét d=10,96±0,4[1] mm-nek mértem, a hossza pedig *l*=300 mm volt. A kezdeti lehajlás az F=12,50 N alap terhelő erő hatására 1,16±0,01 mm volt. Az 1-es táblázatban már a terhelő erő és az alapterhelő erő különbségét tüntettem fel (első oszlop), így kerülve el a minta súlyát ellensúlyozó erő figyelembevételét. A második oszlop tartalmazza a mért lehajlás és az alaplehajlás különbségét. A táblázat melletti 1-es ábrán már az *F*(*s*) pontpárokat tüntettem fel, az illesztett egyenessel egyetemben.

Táblázat 1

F (N)	Δs. (mm)
7,5	0,13
10	0,17
15	0,25
20	0,33
25	0,42
27,5	0,45
30	0,5
40	0,66
50	0,82
55	0,91

Ábra 1



Az illesztett egyenes meredeksége $\frac{s}{F} = m =$ 1,637·10^{-5}±8·10^{-8} m/N (δ*m*=0,005). Jelen esetben $E = \frac{l^3}{48I} \cdot \frac{F}{s} = \frac{l^3}{48I} \cdot \frac{1}{m} = (0{,}485 \pm 0{,}082) \cdot 10^{11} = (48 \pm 8)$ GPa, ahol a hiba mértékét a δ*E*= 3·δ*l*+4·δR+ δ*m*≈0,17 módon számoltam.

Tehát $E_{\text{Alumínium}} \approx$ (48±8) GPa

Mivel ez majdnem 20%-os hiba ezt a mérést illene megismételni egy másik, jobban megmunkált alumíniumhengerrel.

3.1.2. Vörösrézből készült henger

A mérés során állandó adatok, felsorolásszerűen: a henger átmérője: d=8,9±0,02 mm, a hossza *l*=300 mm, F=25 N alap terhelő erő, Δs_0 = 1,99±0,01 mm. A 2-es táblázat és a 2-es ábra 3.1.1. pontbeliek mintájára készült.

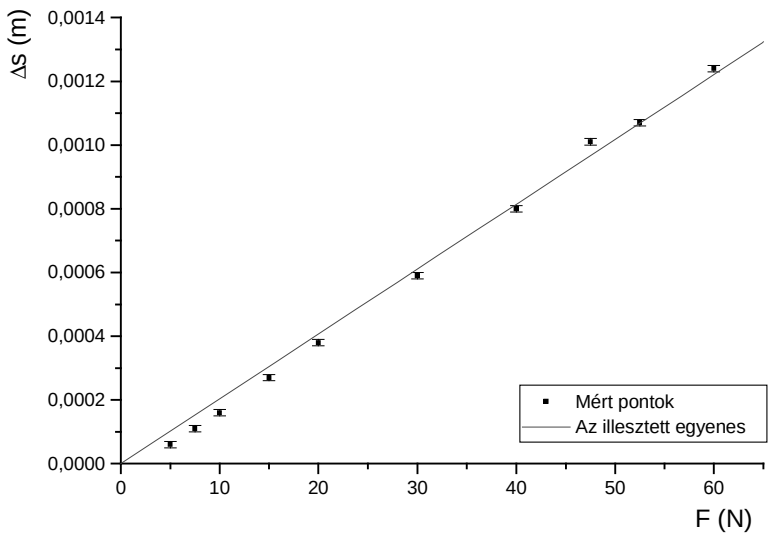
Az ábrán látható, hogy az illesztett egyenes illeszkedhetne pontosabban is a mért pontokra. Azonban megköveteltem, hogy az egyenes y=a·x alakú legyen, hisz $\frac{s}{F} = áll$. Természetesen az illesztésnél létrejött nagyobb hiba jelzi, hogy ezen mérés hibája nagyobb mint amit a műszer hibájának tekintettem.

[1] A mikrométercsavarral ±0,2 mm pontossággal tudtam mérni, de az alumínium hengernél ennél nagyobb ingadozást tapasztaltam. Valószínűleg a henger megmunkálása nem sikerült elég jól.

Táblázat 2

F (N)	Δs. (m)
5	0,00006
7,5	0,00011
10	0,00016
15	0,00027
20	0,00038
30	0,00059
40	0,00080
47,5	0,00101
52,5	0,00107
60	0,00124

Ábra 2



Az egyenes meredksége: m= 2,03·10^{-5} ±0,03·10^{-5} m/N (δm=0,015).

Innen a már ismert módszerrel:

$E_{\text{Vörösréz}}$=(89±9) GPa (δE≈0,1)

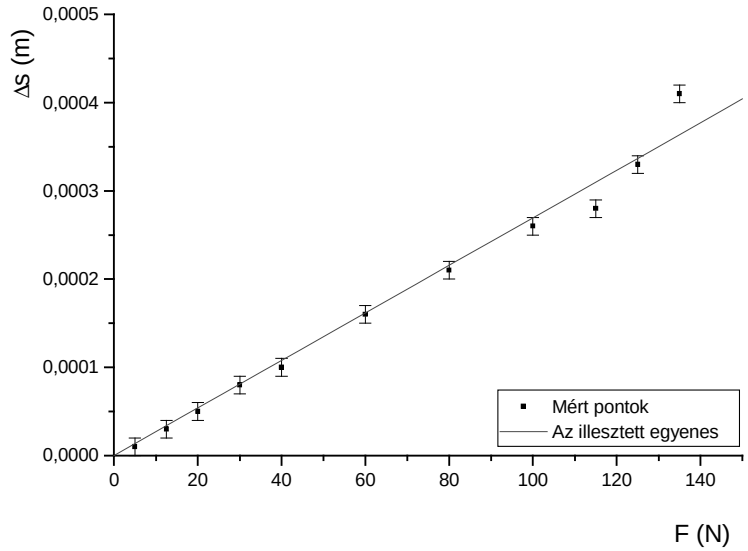
3.1.3. Sárgarézből készült téglalap alapú egyenes hasáb

A mérés során állandó adatok, felsorolásszerűen: a rövidebbik alapél: a=5,0±0,1 mm, a hosszabbik alapél: b=8,1±0,1 mm, a hossza l=300 mm, F=25 N alap terhelő erő, Δs_0 = 0,58±0,01 mm. A 3-as táblázat és a 3-as ábra az előzőek mintájára készült. A mintát a hosszabbik élével fektettem fel.

Táblázat 3

F (N)	Δs. (m)
5	0,00001
12,5	0,00003
20	0,00005
30	0,00008
40	0,00010
60	0,00016
80	0,00021
100	0,00026
115	0,00028
125	0,00033
135	0,00041

Ábra 3



Az egyenes meredeksége: m= (2,69±0,07)·10^{-6} m/N (δm=0,024). Ennél a mintageometriánál a keresztmetszet másodrendű nyomatéka nem $\frac{\pi}{4}\cdot R^4$, hanem I= 1/12·a^3·b Ettől eltekintve E-t teljesen azonos módon lehet számolni, mint eddig. Ezért:

E = (2,5±0,2)·10^{13} Pa (δE≈0,1 ebben az esetben is).

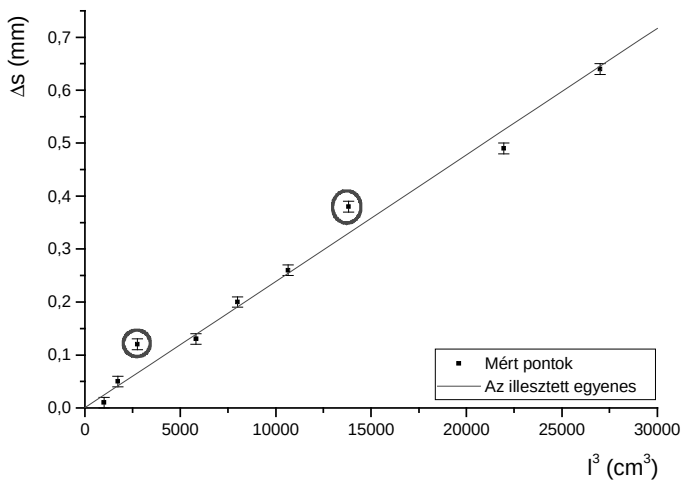
3.2. A lehajlás l^3-ös függésének kísérleti ellenőrzése

Az l^3-ös függést egy minta adott terhelésével végeztem. A minta a 7-es számú vörösrézhenger volt, a terhelési erő F=30 N. Minden alkalommal alkalmaztam előfeszítést, F_0=25 N-t A 4-es táblázat első oszlopában olvashatóak az l mintahosszak (cm-ben), a másodikban pedig a behajlások különbségei [(terhelt lehajlás)–("alapterheléses" lehajlás)] mm-ben.

Táblázat 4

F (N)	Δs (mm)
30	0,64
28	0,49
26	0,05
24	0,38
22	0,26
20	0,2
18	0,13
16	0,5
14	0,12
12	0,05
10	0,01

Ábra 4



Az ábráról leolvasható, hogy a lehajlás valóban a hossz köbével arányos. A két megjelölt adat túlontúl kilóg a sorból, ennél a kettőnél a mérés nem sikerült elég jól.

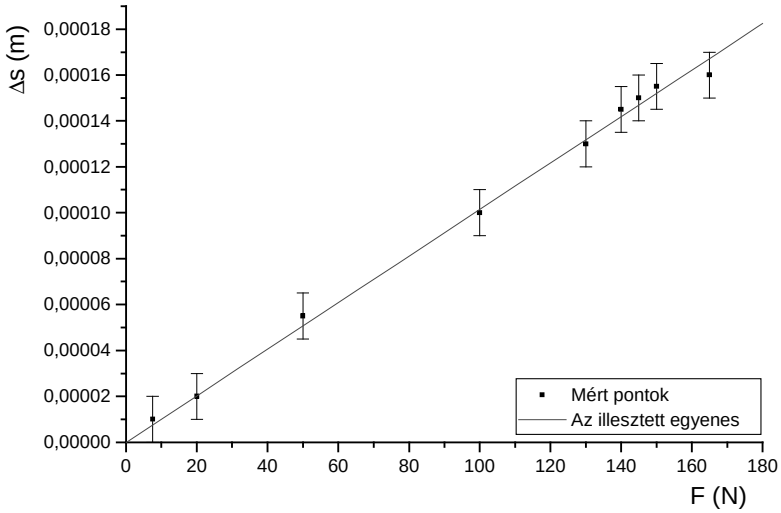
3.3. Az $\frac{I_2}{I_1}=\frac{m_1}{m_2}$ összefüggés kísérleti igazolása

Az $\frac{I_2}{I_1}=\frac{m_1}{m_2}$ összefüggést értelemszerűen a 8-as mintán tudtam kísérletileg igazolni. Mivel a 3.1.3. pontban már kiértékeltem egyszer azt, mikor a mintát a hosszabbik élére merőlegesen terheltem, ezért itt most csak a másik eset kiértékelése és a két eredmény összehasonlítása van leírva. Ennek megfelelően az 5-ös táblázat és 5-ös ábra tartalmazza a már szokásos információkat a szokásos elrendezésben. Ezúttal az alapterhelés F=5 N volt, az alaplehajlás pedig s=0,63 mm.

Táblázat 5

F (N)	Δs (m)
7,5	0,00001
20	0,00002
50	0,000055
100	0,0001
130	0,00013
140	0,000145
145	0,00015
150	0,000155
165	0,00016

Ábra 5



Ezt az esetet jelölve 2-el, $I_2=1/12\cdot a\cdot b^3 = 8{,}43\cdot 10^{-11}$ m lesz, m_2 pedig:

$m_2=(1{,}01\pm 0{,}01)\cdot 10^{-6}$

Innen $\underline{\dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{1{,}01\cdot 10^{-6}}{2{,}69\cdot 10^{-6}} = 0{,}375 \approx 0{,}380 = \dfrac{0{,}84\cdot 10^{-10}}{2{,}21\cdot 10^{-10}} = \dfrac{I_1}{I_2}}$

3.4. Torziós inga

A mérés során egy d=0,51±0,02 mm ármérőjű és l=59,8±0,1 cm hosszúságú torziós szálat használtam. A két súly, mellyel az ingát terheltem m_1= 196,8516 g, R_1=2,25 cm, m_2=196,3651 g, R_2=2,25 cm. A digitális mérleg és tolómérő jelen esetbeli nagy pontossága (a relatív hibák 1 ezrelék alatt maradtak) miatt a hibákat nem vettem figyelembe (m és R). Az 1-es indexű súlyba a 7-es szám volt beleütve, a 2-es indexűbe a 8-as.

3.4.1. A torziómodulusz "egyszerűbb" mérése

"Egyszerűbb" mérésnek azt nevezem, amikor az üres ingát terheltem meg a forgástengely mentén. A mérés során mindig 10 lengésidőt mértem, melyeket elosztva 10-el a következő lengésidőket eredményezte: $T_{üres}$=4,9793 s, T_1= 5,0662 s , T_2= 5,1751 s (T_1 -el jelöltem amikor csak az 1-es tárcsa volt rajta, T_2 -vel mikor mindkettő).

Mivel $\Theta_{Súly} = 0{,}5\cdot m\cdot R^2$, ezért $\Theta_1 = 49{,}82806125\cdot 10^{-6}$ kg·m^2, Θ_2 pedig $49{,}70491594\cdot 10^{-6}$ kg·m^2. Innen $\Theta_{üres_1} = \Theta_1 \cdot \dfrac{T^2_{üres}}{T^2_{Terhelt} - T^2_{üres}} = 0{,}0014$ kg·m^2, $\Theta_{üres_2}$= 0,00124 kg·m^2. Látható, hogy a mérés mégsem volt elég pontos, mert különböző $\Theta_{Terhelés}$ esetén nem ugyanazt a Θ értéket kaptam. A relatív hiba nagysága δΘ≈0,08, tehát **Θ_{inga}=0,0013±0,0001 kg·m^2**.

3.4.2. A torziómodulusz "bonyolultabb" mérése

Az előzőekből következően azt nevezem "bonyolultabb" mérésnek, melynél az ingát a forgástengelyétől *a* távolságra egy-egy ismert tömegű és tehetetlenségi nyomatékú tárcsával terheltem (m_1, Θ_1 ill. m_2, Θ_2), s az $T^2(a^2) = \frac{K}{G}(\Theta_{üres} + \Theta_1 + \Theta_2) + \frac{K}{G} \cdot (m_1 + m_2) \cdot a^2$ összefüggés felhasználásával állapítottam meg *G* és $\Theta_{üres}$ értékét.

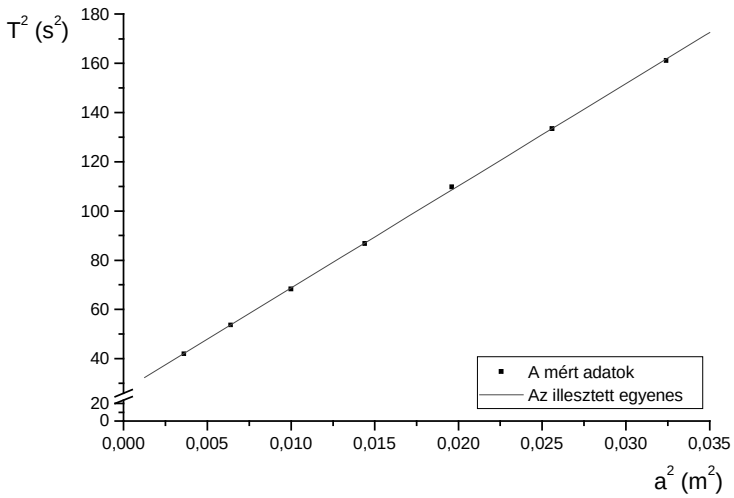
A 6-os táblázat tartalmazza a mért lengésidő(*a*) pontpárokat, a 6-os ábra pedig az ábrázolt $T^2(a^2)$ pontpárokat s a rájuk illesztett egyenest.

Táblázat 6

T (s)	a (cm)	T^2 (s^2)	a^2 (m)
6,4773	6	41,95542	0,0036
7,3246	8	53,64977	0,0064
8,2677	10	68,35486	0,01
9,3167	12	86,8009	0,0144
10,4795	14	109,8199	0,0196
11,5534	16	133,4811	0,0256
12,6955	18	161,1757	0,0324

Az ábrán látható egyenes egyenlete: $T^2=b+c\cdot(a^2)$ $=27{,}14+4154\cdot(a^2)$. Az illesztési pontosság: b=27,14±0,47, c=4154±25.

Ábra 6



Mivel $c=\frac{K}{G}\cdot(m_1+m_2)$, ahol $G=\frac{K}{c}\cdot(m_1+m_2)$, ahol $K = \frac{8\pi \cdot l}{(0{,}5 \cdot d)^4} = 0{,}3554514761 \cdot 10^{16}\,\frac{1}{m^3}$.

Innen **G= (3,3±0,6)·10^{11} Pa** ($\delta G = \delta c + \delta K = \delta c + 4\cdot\delta d + \delta l$ = 0,006+0,157+0,016≈0,18). Látszik, hogy ez a viszonylag nagy (18%-os) relatív hiba nagy része elsősorban a torziós szál hosszának mérési hibájából származik.

G ismeretében már $\Theta_{üres}$ is könnyen kiszámítható: $\Theta_{üres} = \frac{G \cdot b}{K} - \Theta_1 - \Theta_2 =$ $= \frac{(m_1 + m_2)}{c} \cdot b - \Theta_1 - \Theta_2 =$ **0,0025±0,0001 kg·m² = Θ_{Inga}** ($\delta\Theta = \delta b + \delta c$≈0,02+0,01=0,03)

Látható, hogy ezúttal nagyon eltérnek a különböző módon mért Θ értékek. Valószínűsítem, hogy az eltérés oka az általam pontosnak tekintett *a* értékek a valóságban nem annyira pontosak, s így a $T^2(a^2)$ pontokra illesztett egyenes egyenlete eltér az általam számolttól. (Megfordítva számolva, ahhoz, hogy a 3.4.1. pontban kiszámolt Θ_{inga} értéket kapjam itt is, az ezt eldöntő b/c aránynak kb. 0,038-nak kéne lennie a jelenlegi 0,065 helyett; ez változatlan meredekség mellett b≈16-ot jelentene.)