Jegyzőkönyv

1.
A nehézségi gyorsulás mérése megfordítható ingával

Készítette:
Bozsoki Péter,
másodéves fizikushallgató

1999. március 19., péntek

1. A mérés célja

A mérés célja (mint az mérés címéből is kiderül) a nehézségi gyorsulás meghatározása volt, s ezen keresztül a klasszikus fizikának is az egyik "legklasszikusabb" részével, a gravitációs erőtörvény való ismerkedés.

2. A mérés elve

A mérés során a megfordítható inga következő fizikai tulajdonságát használtam ki:

Egy fizikai inga *x* tengely körüli kis kitérései esetén a periódusidő $T = 2\pi\sqrt{\frac{J_x}{Msg}}$ képlet segítségével számolható ki (J_x az *x* tengelyre vett forgatónyomaték, M az inga tömege, s pedig a távolság az inga S súlypontja és az *x* tengely között). Legyen $l_{red} = \frac{J_x}{Ms}$, ekkor $T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{red}}{g}}$, ami a matematikai inga periódusidejét megadó összefüggés. Így minden fizikai inga azonosítható egy l_{red} hosszúságú és M tömegű matematikai ingával. Levezethető, hogy ha az X felfüggesztési ponttól a súlyponton keresztül felmérve egy l_{red} hosszúságú szakaszt, az így kapott Y pontban felfüggesztve az ingát a periódusidő meg fog egyezni az X pontbelivel. (Lényegében az elrendezés szimmetriájából adódik az azonosság.) A megfordítható inga ezt használja ki: a rajta lévő tolósúllyal változtatva a súlypont helyzetét, elérhető, hogy a felfüggesztési pont és a mérési pont távolsága megegyezzen a l_{red} -al. Megállapítva, hogy a két különböző felfüggesztés esetén a tolósúly milyen helyzeteiben lesz egyenlő a két periódusidő, kiszámolható a $d(S_1,Y)$ ill. a $d(S_2,X)$ távolság, és l_{red} =$d(S_1,Y)$+ $d(S_2,X)$. Ugyanis $T_1 = T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_x + Ms_1^2}{Ms_1 g}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_y + Ms_2^2}{Ms_2 g}}$, ahol az Ms_1-t és Ms_2-t a Steiner-tétel miatt kellett hozzáadni a forgatónyomatékhoz. A megoldások közül van egy amely nem hordoz információt, triviális megoldás: az $s_1 = s_2$ esetben is egyenlő lesz két lengésidő. Mikor már ismert az inga l_{red} hossza a $g = 4\pi^2 \frac{l_{red}}{T^2}$ összefüggésből könnyen számolható a *g* értéke.

3. A mérés kivitelezése

A mérés gyakorlati kivitelezésekor az ingán kívül csak egy nagy pontosságú lengésidőmérőt használtam, mely egy LED - fotodióda páros segítségével számlálta a lengéseket és mérte az időt.

A mérés során a két inga közül a rövidebbet választottam, azaz *l*=1,0052±0,0002 m.

A mérés első részében megállapítottam a mérés reprodukálhatóságát, s így a mérés hibáját. A második részben megmértem a $T_1(x)$ és $T_2(x)$ függvényeket, majd a mérés harmadik részében újramértem $T_1(x)$, $T_2(x)$ függvényeket a metszési pontok környékén, finomabb felbontással.

3.1. A mérés reprodukálhatósága

Ahhoz, hogy meg tudjam állapítani, hogy milyen pontosan tudtam beállítani a tolósúlyt a kívánt értékre egy adott értéknél többször is megmértem tíz lengés idejét ebből háromszor úgy, hogy a tolósúlyt eltoltam, majd visszaállítottam a mért értékre. Az 1-es táblázat tartalmazza a mért értékeket. Mint látható 10 lengés idejét, adott tolósúlyállásnál, ±0,001 s pontossággal tudtam mérni. Ezért az inga mért lengésidejének **hibája $\pm 10^{-4}$ s ($\delta T \approx 0{,}005$ %).**

Táblázat 1

$10 \cdot T_1(x=40)$	$T_1(x=40)$	
20,151	2,0151	a súly elmozdítása nélkül
20,15	2,015	
20,15	2,015	
20,15	2,015	a súly elmozdí-tásával
20,15	2,015	
20,15	2,015	

Megjegyzés: a lengésidők ($10 \cdot T_1$ és T_1) dimenziója másodperc és a tolósúly x=40 cm-re volt beállítva.

3.2. A metszési pontok körülbelüli megállapítása

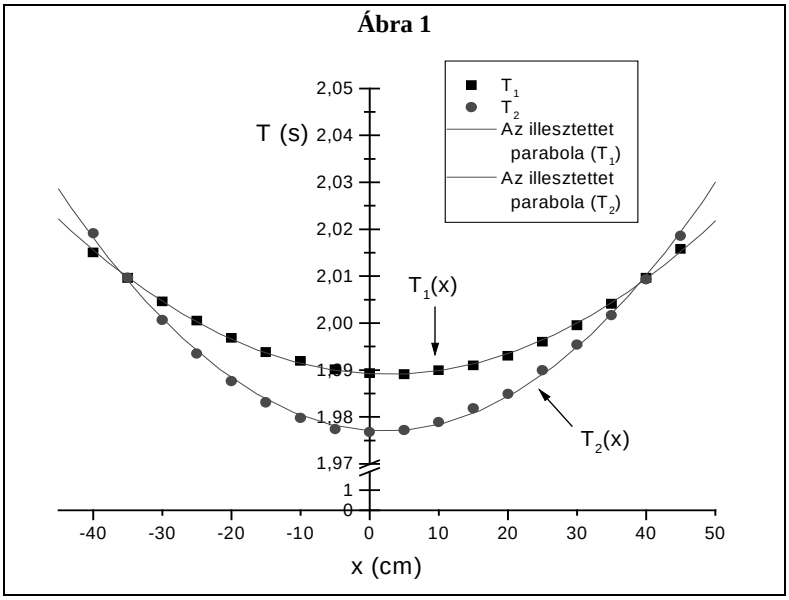
A mérés ezen részében mértem meg a $T_1(x)$ és $T_2(x)$ függvényeket durva felbontással, hogy meg tudjam állapítani, hogy hol van a két nemtriviális metszéspont. A " durva felbontás" azt jelenti, hogy x=5 cm lépésekkel haladtam az ingán a tolósúllyal.

A 2-es táblázat tartalmazza a mért adatokat. A mérés során 10 lengésidőt mértem, azonban mivel 10-el könnyű osztani, ezért itt csak a mért értékek 0,1-ét, azaz a lengésidőt tüntettem fel. A táblázat melletti ábra (1-es) tartalmazza a mért adatokat grafikonon ábrázolva, a rájuk illesztett másodfokú polinomokkal együtt. Tekintve, hogy erre a méréssorozatra azért volt szükség, hogy a finomabb mérés *körülbelüli* helyét megállapítsam, a hibákat nem tüntettem fel (a metszéspontok 1-es ábráról leolvasott adatai is csak hozzávetőlegesek).

Táblázat 2

x (cm)	T_1(s)	T_2(s)
-40	2,015	2,0191
-35	2,0096	2,0096
-30	2,0046	2,0006
-25	2,0005	1,9935
-20	1,9968	1,9876
-15	1,9938	1,9831
-10	1,9919	1,9798
-5	1,9901	1,9774
0	1,9893	1,9768
5	1,9891	1,9772
10	1,9899	1,9789
15	1,991	1,9818
20	1,993	1,9849
25	1,996	1,9899
30	1,9995	1,9954
35	2,0041	2,0017
40	2,0096	2,0093
45	2,0158	2,0186

Ábra 1



Az két illesztett parabola egyenlete: $T_{1ill}(x) = 1.98918-0.840574\cdot10^{-4}\cdot x+0.145402\cdot10^{-4}\cdot x^2$ és $T_{2ill}(x) = 1.97705-0.101167\cdot10^{-3}\cdot x+0.231396\cdot10^{-4}\cdot x^2$. A két görbe metszéspontja: $\mathbf{x_1\approx-36{,}2}$ **cm** és $\mathbf{x_2\approx38{,}9}$ **cm**.

3.3. A metszési pontok pontos megállapítása

Miután körülbelül megállapítottam a két T(x) görbe metszési pontját, a két metszési pont környékén megismételtem a mérést, kisebb lépésekkel haladva a tolósúllyal. Ezúttal csak 1-1 cm különbség van a tolósúly két állása között. A 3-as és 4-es táblázat tartalmazza a mért adatokat. Mivel a hibát nagysága minden mért értékre ugyanakkora (0,0001 s), ezért azt nem tüntettem fel külön, minden egyes érték mellett. A hiba nagyságát a 3.1 pontban leírtak alapján mindenhol ±0,001 s-nak vettem.

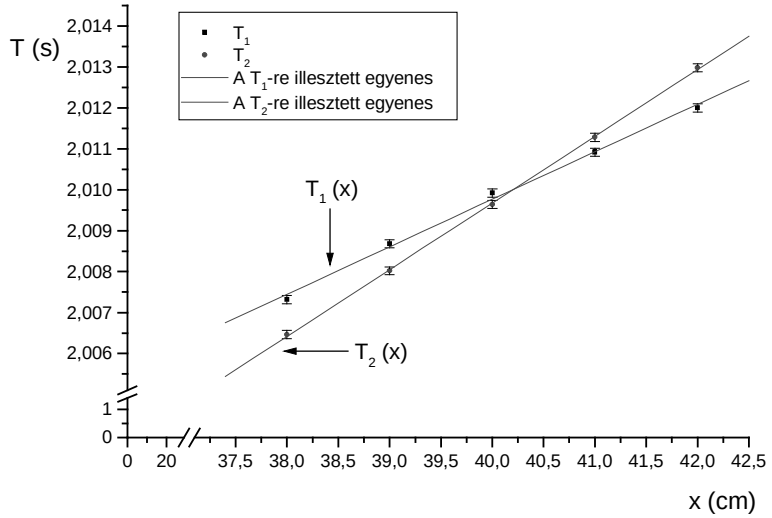
Táblázat 4

x=-36 cm	$50\cdot T_1$ (s)	T_1 (s)	$50\cdot T_2$ (s)	T_2 (s)
-33	100,37	2,00740	100,279	2,00558
-34	100,421	2,00842	100,372	2,00744
-35	100,474	2,00948	100,462	2,00924
-36	100,525	2,01050	100,588	2,01176
-37	100,584	2,01168	100,683	2,01366

Táblázat 3

x=38 cm	$50\cdot T_1$ (s)	T_1 (s)	$50\cdot T_2$ (s)	T_2 (s)
42	100,6	2,01200	100,649	2,01298
41	100,546	2,01092	100,564	2,01128
40	100,496	2,00992	100,482	2,00964
39	100,434	2,00868	100,401	2,00802
38	100,366	2,00732	100,323	2,00646

Ábra 2

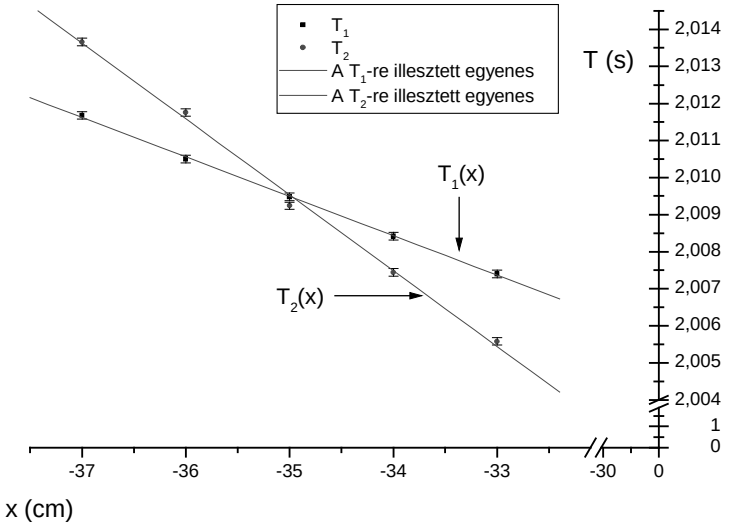


A 2-es ábrán látható metszéspont koordinátái: x=40,2 cm és T=2,0099 s
A 3-as ábrán (következő oldal) lévő metszésponté pedig: x=34,95 cm és T=2,0094 s
Innen T=2,0096±0,0003 s. Így már minden adat a rendelkezésemre áll a *g* kiszámolásához:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}\cdot\left[1\pm\left(\frac{\Delta l}{l}+2\frac{\Delta T}{T}\right)\right] = \frac{4\pi^2\cdot 1{,}0052}{2{,}0096^2}\left[1\pm\left(\frac{0{,}0002}{1{,}0052}+2\frac{0{,}0003}{2{,}0096}\right)\right] = 9{,}826\pm0{,}005$$

Tehát $\mathbf{g_{Budapest} = 9{,}826\pm0{,}005\ m/s^2}$

Ábra 3



<u>Kiegészítés:</u> a mérés során általában csak azokat a hibákat kell figyelembe venni, melyek oka nem látható, nem kiszámítható, nem kiküszöbölhető, stb. Ezeket általában a hiányzó okok elve miatt véletlenszerű, más néven szórás jellegű hibáknak nevezzük. Azonban néha a mérés elvéből vagy a számolásból adódnak olyan hibák, melyek következetesen "végigvonulnak" a mérés során, minden mérési eredményt azonosan befolyásolva. Ezeket a hibákat a következetes mivoltuk miatt szisztematikusnak (is) nevezik. Jelen mérés folyamán is voltak ilyen hibák. Az egyik az inga lengésidejének levezetéséből adódott. Ott ugyanis kihasználtuk a kis kitérítés szögét és sorfejtéssel közelítettük a valós lengésidőt. Ha a sorfejtést felösszegezzük, akkor kiszámolható, hogy mekkora amplitúdóhoz mekkora relatív hiba adódik a lengésidő számolásakor. Mivel én a mérés során 8-10°-ra is kitérítettem az ingát, így az ebből eredő relatív hiba ≈0,002.

Egy másik, a mérésen következetesen végigvonuló hiba, hogy nem vettem figyelembe a levegő felhajtóerejéből következő lengésidő-változást illetve a jelenlévő közegben (levegő) mozgó testre (ingára) ható hidrodinamikai erőket. Ha ezeket is figyelembe vesszük, akkor az innen származó relatív hiba $\delta T = 0{,}8 \cdot \frac{\rho_{levegő}}{\rho_{inga}} = 0{,}8 \cdot \frac{1{,}259}{8500} \approx 0{,}00012$ -nek adódik. Mivel az utóbbi hatásokból származó relatív hiba egy nagyságrenddel kisebb, mint a másik kettőből, ezért ez elhanyagolható. De a sorfejtés pontatlanságából adódó hiba hozzájárulása már nem elhanyagolható. A fenti képlet szerint, csak a "megváltozott" $\frac{\Delta T}{T}$-vel újraszámolva, a végeredmény: **<u>$g_{Budapest}$= 9,826±0,044 m/s^2</u>**