Jegyzőkönyv

3.
Hangfrekvenciás mechanikai rezgések vizsgálata

Készítette:
Bozsoki Péter,
másodéves fizikushallgató

1999. április 9., péntek

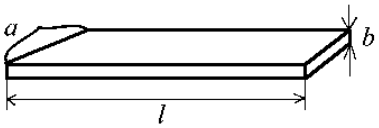
1. A mérés célja

Az előző mérés során (is) láthattuk, hogy még az egyszerű hétköznapi tapasztalat által merevnek ítélt anyagok is (pl. fémek) rugalmasan deformálódnak külső erő hatására. Ebből viszont az következik, hogy rezgésre is képesek. Ezen rezgések behatóbb vizsgálata volt a mérés célja egy adott geometriájú és anyagú minta rezonanciafrekvenciáinak és egy rezonanciagörbéjének mérésén keresztül.

2. A mérés elve

A mérés során egy kétdimenziósnak tekinthető minta (egyenes hasábot vizsgáltam, melynek magassága elhanyagolhatóan kicsiny volt a minta hosszához képest -ld. 1-es ábra) függőleges irányú rezgéseivel foglalkoztam. Ebben az esetben felírva a neutrális szál mozgásegyenletét és a változók szeparálásával (y-ra, mint helykoordinátára és *t*-re, mint időfüggő részre) megoldva a következőt kapom:

Ábra 1



- az időfüggő részre a $\ddot{T}(t) + 2\kappa\dot{T}(t) + \omega_0^2\, T(t) = f_0 \sin(\omega t)$ differenciálegyenlet adódik, melyben κ a csillapításra jellemző tényező, ω gerjesztő rezgés körfrekvenciája, ω_0 a csillapítatlan rezgés saját körfrekvenciája, f_0 pedig az egységnyi tömegre ható maximális gerjesztési erő. Az egyenlet megoldás időben állandó részei: $T(t) = A(\omega)\sin(\omega t - \varphi(\omega))$, $\operatorname{tg}\varphi(\omega) = \dfrac{2\kappa\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ és $A(\omega) = f_0((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2\omega^2)^{-\frac{1}{2}}$ (*A* az amplitúdó).

- a helyfüggő rész egyenlete a $\dfrac{d^4Y(x)}{dx^4} + \omega_0^2\dfrac{\rho q^2 Y(x)}{EI} = 0$ alakot ölti, melyből a határfeltételeket is figyelembe véve a ch(λl)·cos(λl)=0 egyenlet következik ($\lambda^4 := \omega_0^2\dfrac{\rho q^2 Y(x)}{EI}$, *l* a minta hossza az x tengely mentén). Ennek végtelen sok megoldása van: $k_i = \lambda_i l = 0{,}5\cdot(2i-1)\cdot\pi + x_i$, ahol x_i értékei ismertek. A fenti egyenletekből és megoldásaikból következik, hogy $\omega_0 = \left(\dfrac{EI}{\rho q}\right)^{\frac{1}{2}}\dfrac{k_i^2}{l^2}$, *i*=1,2,3,4.... (ρ a térfogat, q pedig az *ab* felület).

Ezen függvények segítségével már meg tudjuk oldani a mérés technikai kivitelezését. A mérés során kiemelt jelentőseget kap az amplitúdó frekvenciafüggésének szélsőértéke. Ezért célszerű kiszámolni az $A(\omega)$ függvényből. Kétszeri deriválással kijön, hogy $\omega = (\omega_0^2 - 2\kappa^2)^{\frac{1}{2}}$-nél van a maximum helye és értéke pedig $A_{\max}(\omega) = \dfrac{f_0}{2\kappa\sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}}$.

3. A mérés kivitelezése

A mérés során a következő technikai részleteket kell megvalósítani: egyrészt úgy gerjeszteni a mintát, hogy az erő ismert legyen, ám a mechanikai rezgéseket ne akadályozza a gerjesztés, másrészt a minta rögzített végét kellett úgy befogni, hogy az valóban rögzített legyen, azaz ne rezeghessen. Az előbbit egy elektromágnessel sikerült megvalósítani, az utóbbit pedig egy nagy tömegű, a minta alakjához jól illeszkedő satuval. Tehát összességében a következő eszközöket használtam a mérés során:

- hanggenerátor, tekercs
- frekvenciamérő ($\Delta(1/f)=\Delta T=0{,}05\ \mu s$)
- pick-up (piezzo elektromos lemezjátszótű) és voltmérő
- tolómérő ($\Delta d=0{,}05$ mm)
- mérleg ($\Delta m=0{,}00005$ g)

3.1. Rezonanciafrekvenciák mérése

Először megmértem a K3-as minta rezonanciafrekvenciáit. Az általam mért legalacsonyabb rezonanciafrekvencia ***f_0*=133,761±0,001 Hz** ($\delta T=10^{-6} \Rightarrow \Delta f\approx 0{,}001$ Hz) volt. Mivel az ***f_1*=275,598±0,001 Hz**-t is rezonanciafrekvenciának mértem, ezért az f_1 az alapfrekvencia ($f\approx 551{,}18\ s^{-1}$ nem volt az). Ezeken kívül még két rezonanciafrekvenciát sikerült kimérnem: ***f_2*≡ 1750 ,792±0,001 Hz** és ***f_3*= 4912,049±0,001 Hz**-t. Ezen mért frekvenciaértékek összevetését az elméleti k_i^2/k_j^2 értékekkel az egyes táblázat tartalmazza

Táblázat 1

k_j	Elvi érték	k_1^2/k_j^2	f_1/f_j	Relatív eltérés [%]
k1	1,8751	1	1	0
k2	4,69409	0,159568	0,157413	1,35
k3	7,85476	0,056988	0,056106	1,55

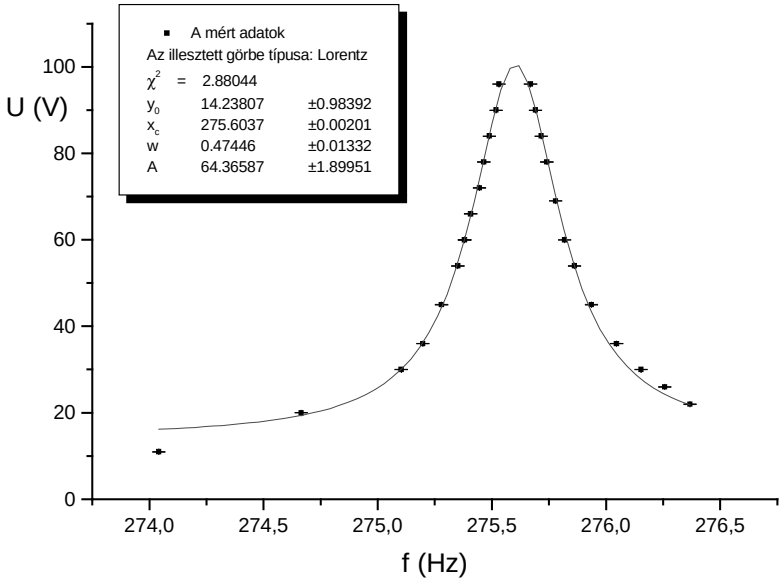
3.2. Rezonanciagörbe mérése

Miután kimértem az alapfrekvenciát, meg tudtam határozni a rezonanciagörbét körülötte. Mivel technikailag egyszerűbb volt bizonyos amplitúdó értékekhez tartozó frekvenciát megmérni, ezért nem a frekvenciaértékek lettek "kerek" számok, hanem az amplitúdóértékek. A 2-es táblázat tartalmazza mért adatokat, az 1-es ábrán pedig ábrázoltam őket. A maximális érték helyét leolvasva ***f_0*=275,623±0,001 Hz**-t kaptam rezonanciafrekvenciának és **Δf =0,337±0,002 Hz** sávszélességnek. (*f* hibáját a ***3.1.*** pontban leírtaknak megfelelően számoltam ki.)

Táblázat 2

U (V)	f (Hz)
10,998	274,042
19,998	274,664
30	275,104
36	275,197
45	275,280
54	275,350
60	275,380
60	275,381
66	275,408
72	275,445
78	275,465
84	275,488
90	275,518
96	275,532
96	275,669
90	275,691
84	275,716
78	275,741
69	275,779
60	275,819
54	275,862
45	275,936
36	276,045
30	276,153
25,98	276,257
21,99	276,368

Ábra 2



3.3. A rezonanciafrekvencia l^2*-es függése és a minta Young-moduluszának kiszámítása*

3-8 cm között változtatva a minta[1] rezgő részét és mérve az $l(T)$ adatokat a következő mérési eredményt kaptam (3-as táblázat, lásd a következő oldalon). A 3-as ábrán látható az adatsor az illesztett egyenessel, melynek meredeksége m=0,43±0,01 lett.

$$\frac{2\pi}{T} = \left(\frac{EI}{\rho q}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{k_1^2}{l^2}, \text{ ahol } I = \int_0^{1,50} dz \int_{-0,155}^{0,155} dx(z^2) = (0,34 \pm 0,03)\cdot 10^{-11} m^4, \ \rho = \frac{m}{abc} = 2500\pm100$$

kg/m^3, q = ab = 4,65·10^{-5} m^2 $\Rightarrow$ $E = \left(\frac{l^2}{T}\right)^2 \frac{\rho q}{I} \frac{4\pi^2}{k_1^4} = m^{-2} \frac{\rho q}{I} \frac{4\pi^2}{k_1^4}$ =**57±6 GPa=*E*.**

Ha E-t az egyik hosszhoz tartozó körfrekvenciából számolom ki: $E = \frac{l^4}{k_1^4} * \frac{\rho * q}{I} * \omega_1^2 \Rightarrow$ ***E*=54±5 GPa**, ami hibahatáron belül egyezik az előző eredménnyel. (Az l=81,1 mm és T=2909,67 μs-al számoltam.)

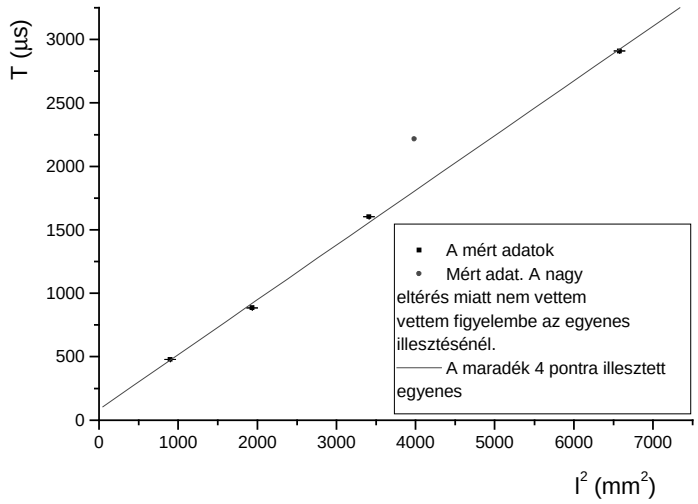
[1] A K3-as minta vastagított vége miatt nem tudtam változtatni a befogás helyét, ezért a ***3.3.*** pontban a 3-as mintát használtam. Ennek adatai: m = 11,8046±0,0001 g, a = 1,50±0,01 cm, b=0,31±0,01 cm, l_0=10,03±0,01 cm. (Tehát a számolt sűrűség hibája: δρ=δm+δa+ δb+ δc≈0,04.)

Táblázat 3

l (mm)	l^2 (mm^2)	T (μs)
81,1	6577,21	2909,676
63,1	3981,61	2214,431
58,4	3410,56	1602,814
44	1936	884,417
30	900	477,604

(l hibája: $\Delta l \approx 0{,}1$ mm)

Ábra 3



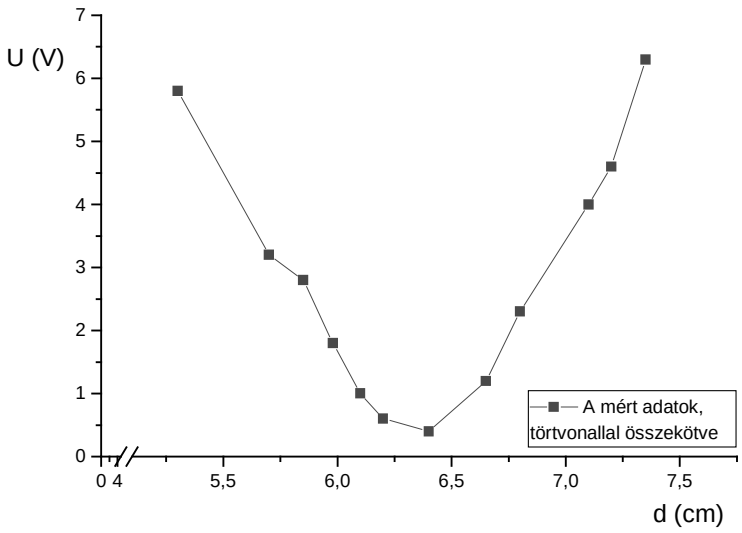
3.4. Minta csomópontjának mérése

A K3-as mintának a korábbiakban mértek és k_2 értéke alapján megbecsülve csomópont várható helyét a T=570,286 μs-os periódusidő (f_2 rezonanciafrekvencia esetén). A 4-es táblázat tartalmazza a mért adatokat (első oszlop: a mérési pont távolsága a minta befogási pontjától; második oszlop: a mért effektív feszültségértékek), a 4-es ábra pedig ábrázolva az U(d) függvényt. Az ábráról leolvasva U minimumának helyét $d \approx 6{,}4 \pm 0{,}2$ cm-nek adódik. Ez jól illeszkedik a becsült értékhez, hisz azt k_2=4,69409 és l_0=8,2±0,2 cm-ből kiszámolva: $d_{\text{becsült}} = 0{,}774 \cdot l_0 \approx 6{,}35 \pm 0{,}15$ cm.

Táblázat 4

d (cm)	$U_{\text{mért}}$ (V)
7,35	6,3
7,2	4,6
7,1	4
6,8	2,3
6,65	1,2
6,4	0,4
6,2	0,6
6,1	1
5,98	1,8
5,85	2,8
5,7	3,2
5,3	5,8

Ábra 4

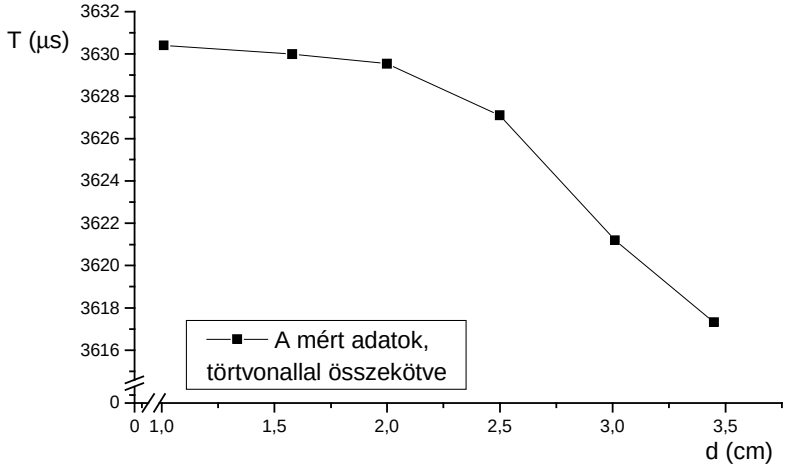


3.5. A detektor hatásának mérése

A mérés befejezéséül megmértem, hogy mennyire befolyásolja a detektor, mint egy pontban ható külső erő a minta szabad rezgését. Megmérve a rezonanciafrekvenciát a detektor különböző pontjaiban az 5-ös ábrán látható görbét kaptam eredményül. Az 5-ös táblázatban vannak feltüntetve a mért adatok (első oszlop: a detektor távolsága a minta befogási pontjától; második oszlop: a mért periódusidők). *d* hibája ≈0,03 cm, T-é továbbra is 0,05 μs (abszolút).

Az ábrán jól kivehető, hogy amint a detektor által kifejtett forgatónyomaték (a detektor által kifejtett erőt helyfüggetlennek tekintettem és a forgatónyomatékot a minta rögzített végére vonatkoztatva vettem figyelembe) nő, úgy csökken a periódusidő, azaz nő a rezonanciafrekvencia. Az ábrán az is látszik, hogy ez a függés nem lineáris, hanem valami egyéb, általam nem beazonosított függés.

Táblázat 5

d (cm)	T (μs)
1,01	3630,395
1,58	3629,979
2	3629,53
2,5	3627,092
3,01	3621,187
3,45	3617,33

Ábra 5