1. Nehézségi gyorsulás mérése megfordítható ingával

PÁPICS PÉTER ISTVÁN

csillagász, 3. évfolyam

2005.10.20.

Beadva: 2005.11.10.

1. A 2-ES, AZAZ AZ ABLAK FELŐLI MÉRŐHELYEN MÉRTEM, A RÖVIDEBB INGÁNÁL. A mérési összeállítás áttekintése, majd az időmérő óra áram alá helyezése után két méréssorozatot végeztem. Mindkétszer 5 cm-enként állítottam a tolósúly helyzetét, az első sorozatban az inga nagyobb súllyal terhelt vége volt lent. Először a kitérítés szögéből származó korrekció mellőzésével közlöm a mérési adatokat és számolok eredményt, majd a végén megvizsgálom, hogy a korrekció alkalmazásával mennyiben módosul (ha módosul) az eredmény. A csúszka beállításának leolvasási hibáját nem tudom megadni, míg az időadatok leolvasási hibája ±0,0005s.

helyzet (cm)	***$10T_1$ (s)***	***$10T_2$ (s)***
-45	20,153	20,178
-40	20,092	20,093
-35	20,039	20,016
-30	19,993	19,949
-25	19,954	19,891
-20	19,924	19,843
-15	19,904	19,807
-10	19,890	19,780
-5	19,884	19,764
0	19,882	19,758
5	19,891	19,767
10	19,908	19,788
15	19,932	19,820
20	19,960	19,864
25	19,998	19,927
30	20,041	20,001
35	20,089	20,089
40	20,145	20,191
45	20,209	-

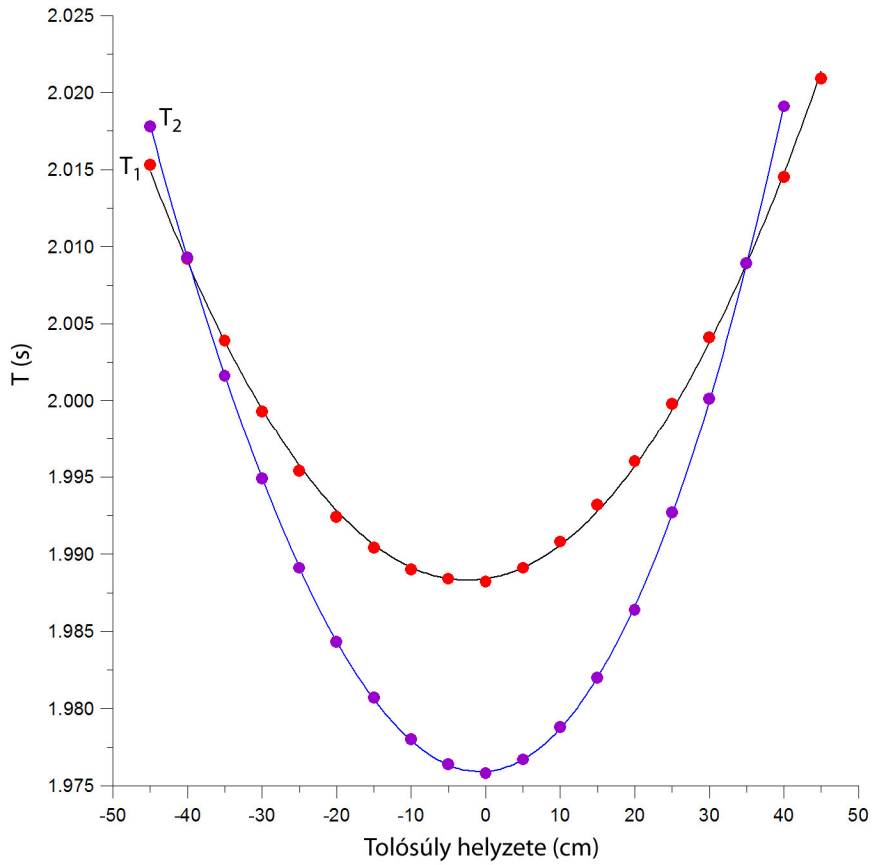
A következő oldalon látható a lengésidők ábrázolása a kitérések függvényében negyedrendű görbéket illesztve a mérési pontokra. A mérések hibájának későbbi számításához ezután reprodukciós méréssorozatot végeztem a tolósúlyt a 15 cm-es értékre többször újra beállítva. A mért lengésidők:

i	***T (s)***	***$\Delta T_i = T_i - T_{átl}$***	***$(\Delta Ti)^2$ (s^2)***
1	1,9820	-1,6667E-05	2,77789E-10
2	1,9821	8,3333E-05	6,94439E-09
3	1,9820	-1,6667E-05	2,77789E-10
4	1,9820	-1,6667E-05	2,77789E-10
5	1,9819	-0,000116667	1,36112E-08
6	1,9821	8,3333E-05	6,94439E-09

$$T_{átlag} = 1{,}98201667s$$

Ez után kiszámoltam az átlag empirikus szórását a következő képlet segítségével:

$$s_{T_{átl.}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} (\Delta T_i)^2}{6 \cdot 5}} = 0{,}0000307318s$$



Tehát a beállításból adódó $\Delta T_1 = 0{,}0000307318s \approx 0{,}00003\ s$

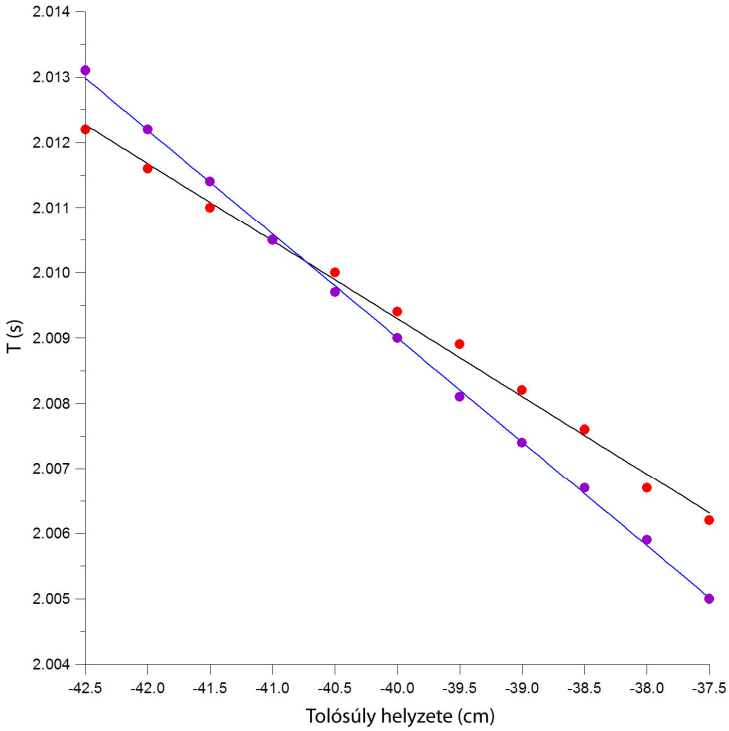
Ezután a metszéspontok közelében újramértem a lengésidőket – a tolósúlyt mindkét esetben 0,5 cm-enként állítva. Lássuk a mérési eredményeket az elő és második pontra:

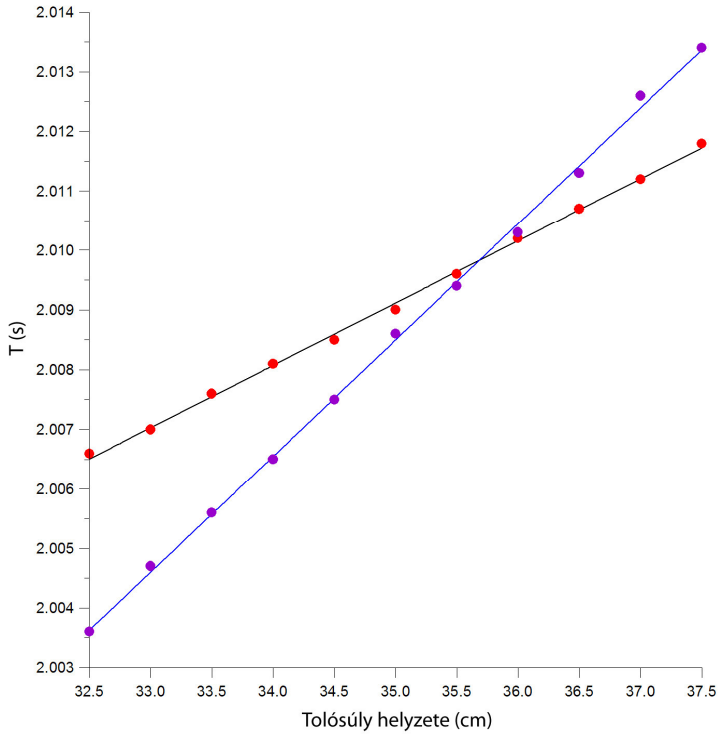
helyzet (cm)	***$10T_1$ (s)***	***$10T_2$ (s)***
-42,5	20,122	20,131
-42,0	20,116	20,122
-41,5	20,110	20,114
-41,0	20,105	20,105
-40,5	20,100	20,097
-40,0	20,094	20,090
-39,5	20,089	20,081
-39,0	20,082	20,074
-38,5	20,076	20,067
-38,0	20,067	20,059
-37,5	20,062	20,050

helyzet (cm)	***$10T_1$ (s)***	***$10T_2$ (s)***
32,5	20,066	20,036
33,0	20,070	20,047
33,5	20,076	20,056
34,0	20,081	20,065
34,5	20,085	20,075
35,0	20,090	20,086
35,5	20,096	20,094
36,0	20,102	20,103
36,5	20,107	20,113
37,0	20,112	20,126
37,5	20,118	20,134

Ilyen kis környezetben már alkalmazható lineáris illesztés, és ez után az egyenesek metszéspontjának megkeresésével megállapítható a keresett T_1 és T_2 metszéspont.

Előbb még lássuk $T_1(x)$ és T_2 (x) egyeneseket mindkét metszéspont környezetében:





Az itt látható egyenesek $m \cdot x + b$ egyenletei:

1.: T_1: m = (-0,00119091 ± 0,00002524) s/cm
b = (1,96166 ± 0,001011) s

1.: T_2: m = (-0,00159273 ± 0,00001538) s/cm
b = (1,94529 ± 0,0006157) s

2.: T_1: m = (0,00104364 ± 0,00001333) s/cm
b = (1,97259 ± 0,0004671) s

2.: T_2: m = (0,00194909 ± 0,00002096) s/cm
b = (1,94028 ± 0,0007343) s

Nem szabad a hibának megfelelő tizedesekre kerekíteni, mert a metszéspont számításánál sokat torzít a kapott értéken (kipróbáltam, a metszéspont helye úgy -41,75 cm-re tolódik, és ez sem az ábrának sem a mért adatoknak nem felel meg, ahol pl. -41,0 cm-re egyezést kaptam – saját véleményem szerint tehát itt érdemesebb ezt az utat követni).

Az ezekből számolt metszéspontok, majd a lengésidők (hiba nélkül, mint a jegyzetben – valójában az egyenesek hibahatárai egy-egy rombuszt határolnak, így mind a metszéspont mindkét egyenes irányába rendelkezik valamilyen hibával):

1.: T_1-T_2: -40,73963466 cm-nél levő metszéspontnál ***T_1 = 2,0102 s***

2.: T_1-T_2: 35,68391408 cm-nél levő metszéspontnál ***T_2 = 2,0098 s***

Tekintsük a megfordított ingánk lengésidejének a jegyzetre hagyatkozva e két érték átlagát, és lehetséges hibának az átlagtól való eltérésüket:

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2} = 2{,}0100s$$

Azaz ***T = (2,0100 ± 0,0002) s***

Itt ΔT_2 = 0,0002s és mivel ez jóval nagyobb, mint a reprodukciós mérésekből számított, ezt használom a későbbiekben.

Határozzuk meg a nehézségi gyorsulás értékét a kitérés szögéből adódó korrekció figyelembevétele nélkül:

$$g = \frac{4\pi^2 l_e}{T^2} = \frac{4 \cdot (3{,}141592654)^2 \cdot 1{,}0033}{(2{,}01)^2} = 9{,}803890097 m/s^2$$

Azaz ***g = 9,804 m/s²***

Ennek hibáját a következő módon számolhatjuk:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l_e}{l_e} + 2 \cdot \frac{\Delta T}{T} = \frac{0{,}0002}{1{,}0033} + 2 \cdot \frac{0{,}0002}{2{,}0100} = 0{,}000398347$$

Amiből $\Delta g = g \cdot 0{,}000398347$

$\Delta g = 0{,}00390535$

g = (9,804 ± 0,004) m/s²

Most vegyük figyelembe, hogy a lengésidő képlete α szögű kitérés esetén nem egészen úgy néz ki, ahogy abból a g-t számítottuk.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_e}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2} + \ldots\right)$$

A magasabb rendű tagokat nyugodtan elhanyagolhatjuk.

Jelen esetben az alátámasztástól 1,1933m-re volt az érzékelő, és a kitérítés általában 0,05m-es volt, az ebből adódó szög: ***α = 2,3993 ≈ 2,4°***

Így a pontosabb számítás:

$$g = \frac{4\pi^2 l_e}{T^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{4 \cdot (3{,}141592654)^2 \cdot 1{,}0033}{(2{,}01)^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{2{,}4°}{2}\right)^2 = 9{,}806040134 m/s^2$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l_e}{l_e} + 2 \cdot \frac{\Delta T}{T} = \frac{0{,}0002}{1{,}0033} + 2 \cdot \frac{0{,}0002}{2{,}0100} = 0{,}000398347$$

$\Delta g = g \cdot 0{,}000398347$

$\Delta g = 0{,}003906208$

g = (9,806 ± 0,004) m/s²

Ha a hidrodinamikai korrekciót is figyelembe vesszük, akkor tovább módosul az eredmény:

$$\Delta T_{korr} = 0{,}8\frac{\rho_{lev}}{\rho_{inga}}T = 0{,}8\frac{1{,}259}{8500}2{,}01 = 0{,}000238173$$

ΔT_{korr} = *0,0002* ami mérési határon belül van, így figyelembe kell venni, így módosul a metszéspontokból számolt lengésidő

$T_{korrigált}$ = T - ΔT_{korr} = 2,0100 – 0,0002 = 2,0098s

A T hibája ezzel a korrekcióval csak másodrendben változik, így azzal nem kell foglalkozni, számoljuk újra a g-t ezzel az eredménnyel:

$$g = \frac{4\pi^2 l_e}{T_{korrigált}^{\ 2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{4 \cdot (3{,}141592654)^2 \cdot 1{,}0033}{(2{,}0098)^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{2{,}4°}{2}\right)^2 = 9{,}807991877 m/s^2$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l_e}{l_e} + 2 \cdot \frac{\Delta T}{T_{korrigált}} = \frac{0{,}0002}{1{,}0033} + 2 \cdot \frac{0{,}0002}{2{,}0098} = 0{,}000398366$$

$$\Delta g = g \cdot 0{,}000398366$$

$$\Delta g = 0{,}003907179$$

<u>g = (9,808 ± 0,004) m/s²</u>

Megjegyezném, hogy ez igen jó egyezést mutat az elméleti képletből számolt értékkel, illetve a Budó I. kötetében közölt Oltay Károly-féle adattal (utóbbi g = 9,80852 m/s²). Az elméleti számítást is közlöm, mely a lokális gravitációs anomáliákat ugyan nem veszi figyelembe (φ=47,5°-ra) – így g a Cassinis-féle formulával:

$$g_{0\varphi} = 9{,}78049 \cdot \left(1 + 0{,}0052884 \cdot \sin^2\varphi - 0{,}0000059 \cdot \sin^2 2\varphi\right) m/s^2 = 9{,}80854829 m/s^2$$

Figyelembe véve, hogy az egyetemi labor körülbelül h=140m-es tengerszint feletti magasságban található (R_F=6,378×10¹⁰m):

$$g_{47{,}5°-140m} = \left(1 - \frac{2h}{R_F}\right) \cdot g_0 = 9{,}808548247 m/s^2$$

Kérdés, hogy ha a Föld nem forogna, a gravitációs gyorsulás változását ezzel a mérési elrendezéssel ki lehetne-e mutatni. Lényegében 0,0005 m/s²-nál nagyobb eltérést már ki lehet mutatni, ennek tudatában nézzük mennyi lenne a föld forgása nélkül a várható elméleti g:

A centrifugális erő megfelelő komponensével a közelítő képlet, valamint a komponens hiányában a gravitációs gyorsulás így néz ki:

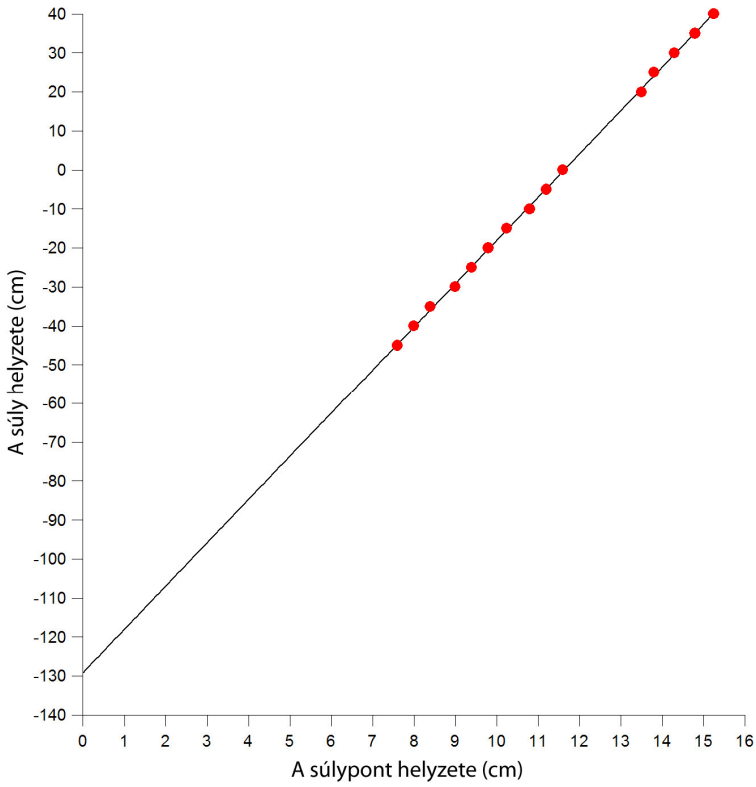
$$g_\varphi = \left(g_{90°} - 3{,}4 \cdot \cos^2\varphi\right) cm/s^2 \Downarrow$$

$$g_{90°} = 9{,}80854829 + 0{,}034 \cdot \cos^2 47{,}5° = 9{,}824066642 m/s^2$$

Az eltérés itt a centrifugális erőből származó tag, melynek értéke a mi földrajzi szélességünkre ***≈ 0,0155 m/s²***, mely jóval a mérési pontosság fölött van, azaz a kérdéses esetben kimutatható lenne.

2. A SÚLYPONT MÉRÉSE. A laborvezető által kiadott utolsó feladat annak a pozíciónak meghatározása volt, mikor is a rendszer súlypontja pont középen, a 0-ás osztásnál lenne. Ehhez az ingát felfektettem az ékre, és több helyzetben is kiegyensúlyoztam – lehetőség szerint 1 illetve 5 mm-es leolvasási pontossággal. Lássuk a mért értékeket és azok ábrázolását (amikor nagyon pontosan két osztás között volt a csúsztatható súly helyzetét jelző nyíl, akkor az elméleti leolvasási pontosság alá mentem – elméletileg helytelenül, de a későbbi ábra alátámasztja ennek létjogosultságát):

csúszka helyzete (cm)	***súlypont helyzete (cm)***
40	15,25
35	14,80
30	14,30
25	13,80
20	13,50
0	11,60
-5	11,20
-10	10,80
-15	10,25
-20	9,80
-25	9,40
-30	9,00
-35	8,40
-40	8,00
-45	7,60



Az $m \cdot x + b$ egyenes-illesztés eredménye:

A meredekség; ***m = 11,10 ± 0,06***

A tengelymetszet; ***b = (-129,1 ± 0,7) cm*** és ennél a helyzetnél lenne középen a súlypont.