Hangfrekvenciás mechanikai rezgések vizsgálata

(Mérési jegyzőkönyv)

Hagymási Imre

2007. május 7.
(hétfő délelőtti csoport)

1. Bevezetés

Ebben a mérésben a szilárdtestek rugalmas tulajdonságait vizsgáljuk dinamikus módszerekkel. Ezek sokkal előnyösebbek, mint a statikus módszerek, ugyanis a mérési hibát okozó külső zavarok kiküszöbölhetők továbbá kis amplitúdójú rezgésekkel dolgozunk, így a minta maradandóan nem deformálódik.

2. A mérés elmélete

A mérés során az egyik végén befogott téglalap keresztmetszetű rúdban kialakuló transzverzális rezgéseket vizsgáljuk. A rúd egy rezgése diszkrét sajátmódusok szuperpozíciójaként állítható elő. A gerjesztés alkalmas megválasztásával az egyes sajátmódusok külön is gerjeszthetők. Az i-edik sajátmódus kitérését leíró függvény hely- (x) és időfüggő (t) függvények szorzatára bontható: $z_i(x,t) = Z_i(x)T_i(t)$. A helyfüggő rész a rudat leíró negyedrendű differenciálegyenlet megoldásával kapható meg:

$$Z_i(x) = \mathrm{sh}\left(\frac{k_i}{l}x\right) - \sin\left(\frac{k_i}{l}x\right) + \frac{\mathrm{sh}(k_i)+\sin(k_i)}{\mathrm{ch}(k_i)+\cos(k_i)}\left(\cos\left(\frac{k_i}{l}x\right) - \mathrm{ch}\left(\frac{k_i}{l}x\right)\right),$$

ahol l a rúd hossza, k_i pedig az i-edik módushoz tartozó állandó, melynek értéke megtalálható [1] jegyzetben. A mérés során az $i = 0$ alapmódus és az első néhány felharmonikust mérjük.
A gerjesztő generátor feszültsége szinuszos, ezért a minta minden pontja csillapított kényszerrezgést végez. Az időfüggő rész alakja:

$$T_i(t) = A_i(\omega)\sin(\omega t - \delta_i(\omega)).$$

Az i-edik amplitúdójának frekvenciafüggését az

$$A_i(\omega) = \frac{A_{i0}}{\sqrt{(\omega_{i0}^2 - \omega)^2 + 4\kappa_i^2\omega^2}} \tag{1}$$

formula írja le, ahol A_{i0} a gerjesztés nagyságától függő amplitúdó-állandó, κ_i a súrlódást leíró csillapítási tényező, ω_{i0} pedig az i-edik módus sajátkörfrekvenciája, amely az

$$\omega_{i0} = \frac{k_i^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho q}} \tag{2}$$

formulával számolható. Ebben E a rúd hosszirányú Young-modulusa, ρ a minta sűrűsége, q pedig a keresztmeszete, I pedig a másodrendű felületi nyomatéka:

$$I = \iint_q z^2 dz dy.$$

Téglalap keresztmetszet esetén:

$$I = \frac{1}{12} a b^3,$$

ahol a az alap hossza, b pedig a magasság. A sajátkörfrekvenciát megadó összefüggésből következik, hogy egy minta i-edik módusának sajátfrekvenciáját megkaphatjuk az alapharmonikusból:

$$\frac{\nu_{0i}}{\nu_{00}} = \left(\frac{k_i}{k_0}\right)^2. \tag{3}$$

A fémből készült rudat időben ω_g frekvenciájú szinuszos jelű elektromágnessel gerjesztjük, amelynek következtében rá

$$F(t) \sim \alpha \cos(\omega_g t) + \beta \sin(2\omega_g t)$$

alakú gerjesztőerő hat. Az első tag az örvényáramok és a gerjesztő elektromágnes alatt található állandó mágnes kölcsönhatásából adódik és ω_g frekvenciájú erőt gyakorol a mintára. A második tag az örvényáramok és a változó mágneses tér közötti kölcsönhatásból származik és $2\omega_g$ frekvenciájú. Tehát minden sajátmódus kétféle frekvenciával gerjeszthető, az egyik az $\omega_g = \omega_{0i}$ egyenletnek tesz eleget, a másik pedig ennek a fele.
Az amplitúdót mérve a gerjesztőfrekvencia függvényében megkapjuk a rezonanciagörbét. A görbe $\Delta\nu$ félértékszélessége kifejezhető a κ csillapítási tényezővel:

$$\Delta\nu = \frac{\kappa}{\pi}. \tag{4}$$

3. Mérési eredmények

3.1. A minták geometriai adatai

3.1.1. Az „A” minta

Az „A” minta egyik vége vastagított volt, azért, hogy a befogásnál jól teljesüljön a határfeltétel. Jelölje a szélességét D, a rezgő rész vastagságát h_1, hosszát l_1, a kiszélesedő rész vastagságát h_2, hosszát l_2! Az adatokat lehetőség szerint több pontban csavarmikrométerrel vagy tolómérővel mértem, a minta tömegét pedig analitikai mérleggel mértem.

$$\left.\begin{array}{l} D = (15.06 \pm 0.01)\mathrm{mm} \\ h_1 = (1.99 \pm 0.01)\mathrm{mm} \\ h_2 = (10.02 \pm 0.01)\mathrm{mm} \\ l_1 = (79.99 \pm 0.05)\mathrm{mm} \\ l_2 = (20.01 \pm 0.01)\mathrm{mm} \\ m_A = (14.6456 \pm 0.0001)\mathrm{g} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} I_A = 9.8 \pm 0.2\mathrm{mm}^4 \\ \rho_A = (2703 \pm 20)\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}. \end{array}$$

3.1.2. A 13-as számú minta

A 13-as minta téglatest alakú volt, szélességét jelöljük D-vel, hosszát l-lel, vastagságát pedig h-val! A mért értékek:

$$\left.\begin{array}{l} D = (15.10 \pm 0.04)\mathrm{mm} \\ h = (3.04 \pm 0.02)\mathrm{mm} \\ l = (100.00 \pm 0.05)\mathrm{mm} \\ m_{13} = (38.5522 \pm 0.0001)\mathrm{g} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} I_{13} = 35.3 \pm 0.8\mathrm{mm}^4 \\ \rho_{13} = (8398 \pm 90)\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}. \end{array}$$

3.2. A sajátfrekvenciák mérése

Először az „A” minta első négy sajátfrekvenciáját mértem mindkét lehetséges gerjesztő frekvenciánál. A mérési adatok az 1. táblázatban láthatók. Jól látható, hogy az ugyanazon módushoz tartozó párosával előforduló gerjesztési frekvenciák valóban egy 2-es faktorban különböznek. Továbbá leolvashatjuk, hogy a (3) elméleti összefüggés is kis hibával teljesül.

ν (Hz)	i	ν_{0i}/ν_{00} (mért)	$(k_i/k_0)^2$ (számolt)	eltérés
127.22	0	0.499	felező frekvencia	-
254.60	**0**	**1**	**1**	**-**
803.88	1	3.157	felező frekvencia	-
1607.5	**1**	**6.314**	**6.267**	**0.7%**
2259.2	2	8.873	felező frekvencia	-
4517.4	**2**	**17.743**	**17.547**	**1.1%**
4439.3	3	17.436	felező frekvencia	-
8879.0	**3**	**34.874**	**34.386**	**1.4%**

1. táblázat. Az „A” minta sajátfrekvenciái.

3.3. Az „A” minta Young-modulusa

A Young-modulust a (2) egyenlet segítségével számíthatjuk ki:

$$E_i = 4\pi^2 \nu_i^2 \frac{l^4}{k_i^4} \frac{\rho q}{I}. \tag{5}$$

Az egyes módusoknál számolt értékek és a belőlük képzett átlag:

$$\left.\begin{array}{l} E_0 = (7.0 \pm 0.1) \cdot 10^{10}\text{Pa} \\ E_1 = (7.1 \pm 0.1) \cdot 10^{10}\text{Pa} \\ E_2 = (7.1 \pm 0.1) \cdot 10^{10}\text{Pa} \\ E_3 = (7.2 \pm 0.1) \cdot 10^{10}\text{Pa} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \bar{E_A} = (7.1 \pm 0.1) \cdot 10^{10}\text{Pa}.$$

3.4. A rezonanciagörbe mérése

Az alapharmonikus frekvenciájának közelében mértem a rezonanciagörbét. A mérési eredmények a 2. táblázatban illetve az 1. ábrán látható. A rezonanciagörbe számunkra fontos paraméterei:

$$\text{Alapharmonikus frekvencia:} \quad \nu_{00} = (254.50 \pm 0.01)\text{Hz}$$
$$\text{Félértékszélesség:} \quad \Delta\nu = (0.38 \pm 0.05)\text{Hz}.$$

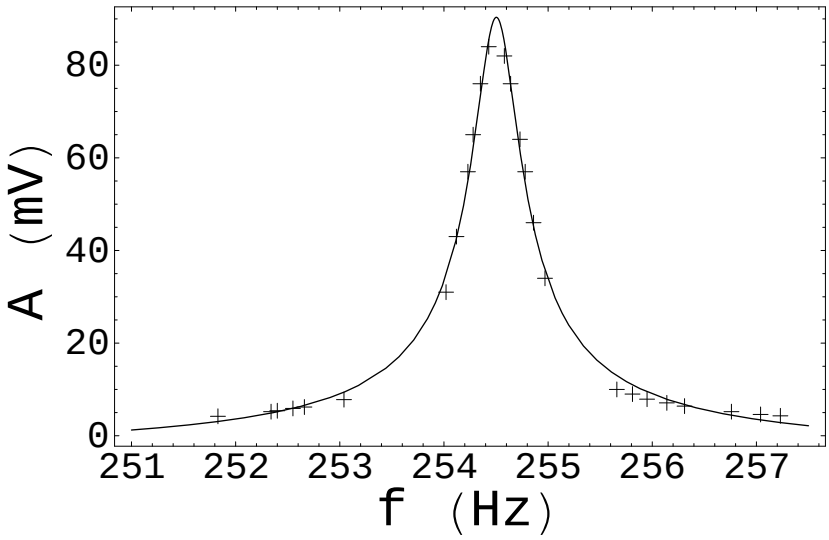
3.5. A csillapítási együttható

A κ csillapítási együtthatót a (4) képlet segítségével a félértékszélességből határozhatjuk meg:

$$\kappa = \pi \cdot \Delta\nu = (1.2 \pm 0.1)\text{Hz}. \tag{6}$$

ν (Hz)	A (mV)	ν (Hz)	A (mV)
251.81	4.2	254.58	82.0
252.34	5.2	254.64	76.0
252.40	5.4	254.73	64.0
252.55	5.9	254.78	57.0
252.66	6.2	254.86	46.0
252.97	7.4	254.97	34.0
253.04	7.8	255.66	10.0
254.02	31.0	255.81	9.0
254.12	43.0	255.95	7.9
254.23	57.0	256.14	7.1
254.28	65.0	256.31	6.4
254.35	76.0	256.76	5.2
254.43	84.0	257.04	4.6

2. táblázat. A rezonanciagörbe mért értékei.



1. ábra. Az amplitúdóval arányos feszültség frekvenciafüggése.

3.6. Az alapharmonikus frekvenciájának hosszfüggése

A 13-as számú mintánál megvizsgáltam, hogyan függ az alapharmonikus frekvenciája a rezgő hossztól. A 4-8 cm-es tartományban 1-cm-enként mér-

tem a rezonanciafrekvenciát. A mérési eredmények a 3. táblázatban láthatók. A (2) képlet felhasználásával megkaphatjuk az alapmódus frekvenciájának

l (cm)	ν (Hz)
8	251.90
7	327.68
6	457.85
5	653.82
4	1019.86

3. táblázat. Az alapharmonikus frekvencia hosszfüggése.

hosszfüggését:

$$\nu_{00} = \frac{1}{l^2}\frac{k_0^2}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{\rho q}}.$$

Tehát, ha ábrázoljuk a frekvenciaértékeket $1/l^2$ függvényében, egy m meredekségű egyenesre illeszkedő pontsorozatot kapunk, amelyből a minta Young-modulusa megkapható:

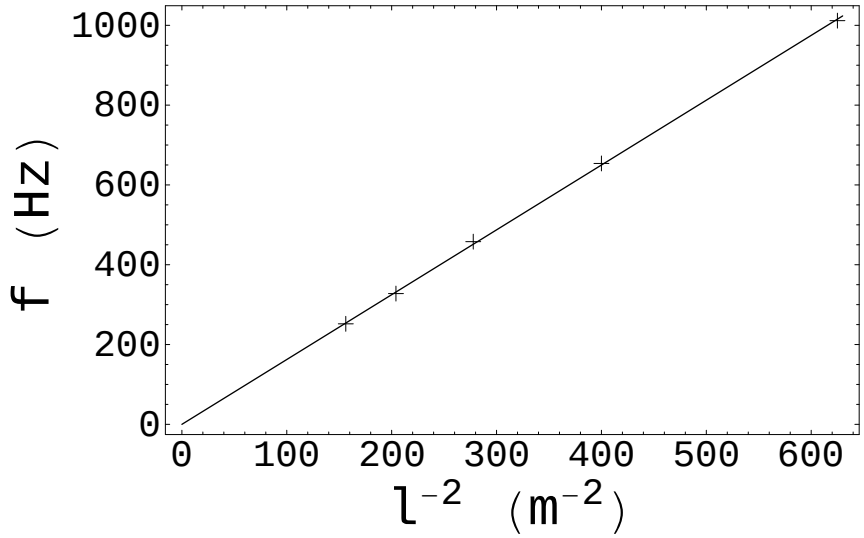
$$E_{13} = \frac{4\pi^2}{k_0^4}\frac{\rho_{13}q}{I_{13}}m^2.$$

Az illesztés eredménye a 2. ábrán látható. Az illesztett egyenes meredeksége:

$$m = (1.624 \pm 0.005)\mathrm{Hz} \cdot \mathrm{m}^2. \tag{7}$$

Ezzel a 13-as minta Young-modulusa:

$$E_{13} = (9.2 \pm 0.4) \cdot 10^{10}\mathrm{Pa}.$$



2. ábra. Az alapharmonikus frekvenciája $1/l^2$ függvényében.

Hivatkozások

[1] Havancsák Károly: *Mérések a klasszikus fizika laboratóriumban*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2003.