Mérési jegyzőkönyv

2. számú mérés

Rugalmas állandók mérése

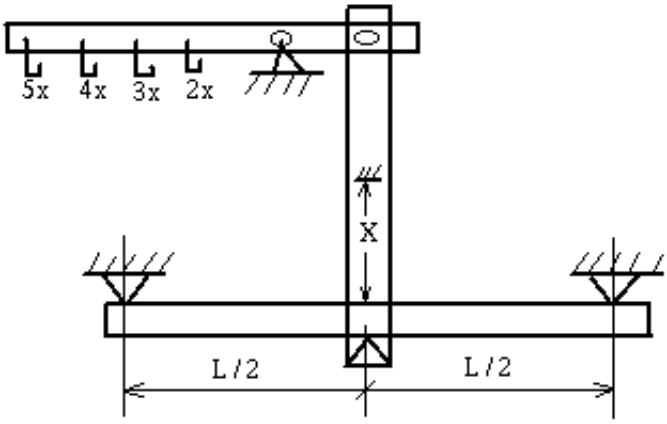
Mérést végezte : Kulyassa Róbert
Mérés időpontja : 2000. február 28. (hétfő délelőtt)

1 Mérés elve

A mérés célja különböző anyagok rugalmas tulajdonságainak vizsgálata, a Young és a torziós modulusz meghatározása. Az előbbit két végén alátámasztott, középen terhelt rúd behajlásából fogjuk kiszámolni, még utóbbi mérésére egy torziós ingát használunk.

2 Young modulusz mérése

2.1 Mérés leírása



ábra 1: A "hajlítógép"

A méréshez használt "hajlítógép" tartalmaz egy század milliméter pontos mélységmérőt, mellyel az ábrán jelölt X távolságot mérhetjük.
Először a különböző mintákat más-más terhelés mellett, de azonos támasztási távolsággal ($L = 40cm$) vizsgáljuk, mérjük azok behajlását. (Én a laboratóriumi minták közül a 2-es (továbbiakban henger) ($d = 10.06 \pm 0.05mm$) és az 5-ös (továbbiakban téglalap) jelűeket használtam.) ($a = 3.97 \pm 0.05mm, b = 14.94 \pm 0.05mm$) A mérés során ügyeltem arra, hogy a vizsgált anyagok hajlításakor a rugalmas tartományából ne menjek ki.

Terhelés		X (mm)		
s (kg)	megvalósítás	henger	téglalap	
			fekvő	álló
0		0.5	0.62	0.31
1	2x0.5	0.88	2.27	0.43
1.5	3x0.5	1.03	3.06	0.5
2	4x0.5	1.25	3.86	0.56
2.5	5x0.5	1.39	4.63	0.62
3	3x1	1.59	5.44	0.69
3.5	2x1,3x0.5	1.8	6.2	0.76
4	4x1	2.07	7.06	0.82
4.5	2x1,5x0.5	2.29		0.88
5	5x1	2.41		0.95
5.5	2x2,3x0.5	2.54		1.01
6	3x2	2.75		1.07
6.5	2x2,5x0.5	2.99		1.13
7	2x2,3x1	3.15		1.19
8	4x2	3.53		1.32
9	4x2,2x0.5	3.73		1.43
10	5x2	4.16		1.56

Táblázat 1: Különböző rudak behajlása ($L = 40cm$)

Az illesztett egyenesek egyenletei:

$$X_{henger} = f(s) = b{+}as\,, \quad (a = a = 3.699{\pm}0.048)10^{-5}\frac{m}{N}\,, \quad b = (51.9{\pm}2.6)10^{-5}m$$

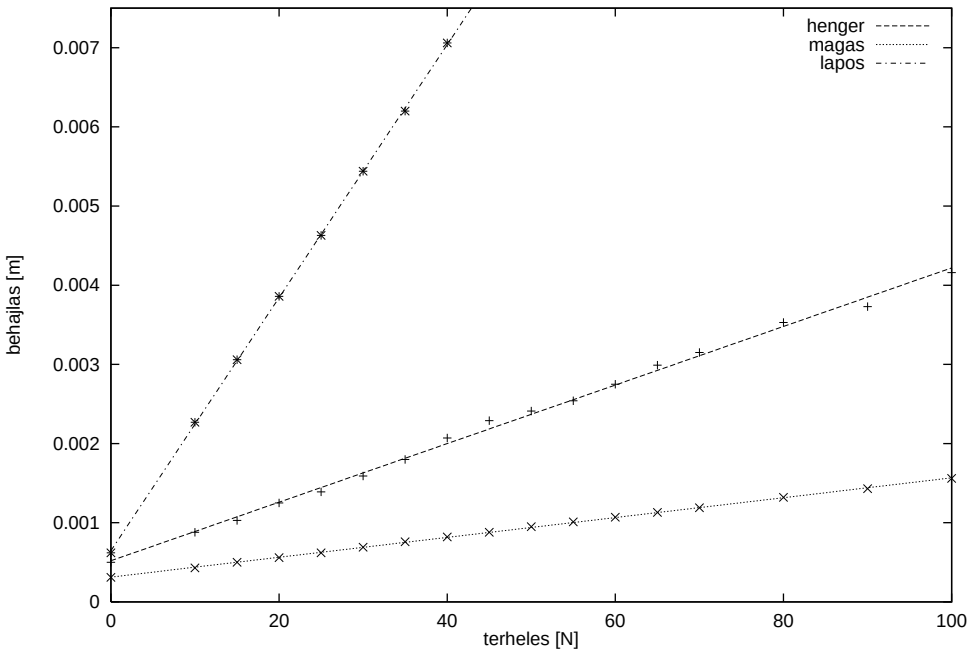
$$X_{magas} = g(s) = d{+}cs\,, \quad c = (1.254{\pm}0.0052)10^{-5}\frac{m}{N}\,, \quad d = (31.3{\pm}0.28)10^{-5}m$$

$$X_{lapos} = h(s) = f{+}es\,, \quad e = (15.97{\pm}0.063)10^{-5}\frac{m}{N}\,, \quad f = (64.7{\pm}1.6)10^{-5}m$$

Amelyek a

$$X = \frac{1}{48}\frac{L^3}{EI}sg$$

képlettel analógok.
ahol:



ábra 2: Különböző rudak behajlása. Mérési eredmények, és a rájuk illesztett egyenes.

- X : a behajlás
- L : a megtámasztások közötti távolság
- E : a Young modolusz
- I : a keresztmetszet másodrendű nyomatéka

$$I = \int z^2 df$$

  - d átmérőjű hengerre : $\frac{\pi d^4}{64}$
    a 2-es jejű mintára : $I = 502 \pm 9.53 mm^4$

  - a szélességű m magasságú téglatestre : $\frac{1}{12} m^3 a$
    az 5-ös mintára :
    a lapra merőleges terhelés esetén : $I = 77.9 \pm 3.2 mm^4$
    a lappal párhuzamos terhelés esetén : $I = 1103.21 \pm 24.96 mm^4$

- s : az alkalmazott terhelés (kg)
- g : a nehézségi gyorsulás ($g = 10\frac{m}{s^2}$)

Ha az X(s) egyenesek meredekségét m-mel ($m = sg$) jelöljük:

$$m = \frac{L^3}{48EI}$$

Ebből a Young modulusz :

$$E = \frac{L^3}{48mI}$$

2.2 Eredmény

$$E_henger = 71.8GPa$$

$$E_magas = 96.3GPa$$

$$E_lapos = 107.17GPa$$

2.3 A mérés hibái

Az alátámasztás távolságát (L) milimáterbeosztású skálán mérjük, ennek hibája :

$$\Delta L = \pm 5 \cdot 10^{-4} m$$

Az egyenes meredekségének hibája az illesztésből adódik :

$$\Delta m_{henger} = \pm 0.048 \cdot 10^{-5} \frac{m}{N}$$

$$\Delta m_{magas} = \pm 0.0052 \cdot 10^{-5} \frac{m}{N}$$

$$\Delta m_{lapos} = \pm 0.063 \cdot 10^{-5} \frac{m}{N}$$

A másodrendű nyomaték hibája pedig már ismert :

$$\Delta I_{henger} = \pm 9.53 \cdot 10^{-12} m^4$$

$$\Delta I_{magas} = \pm 24.96 \cdot 10^{-12} m^4$$

$$\Delta I_{lapos} = \pm 3.2 \cdot 10^{-12} m^4$$

Így már E számításához használt minden adat hibája adott:

$$\Delta E = E(3\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta I}{I}$$

$$\Delta E_{henger} = \pm 2.56 GPa$$

$$\Delta E_{magas} = \pm 2.94 GPa$$

$$\Delta E_{lapos} = \pm 5.22 GPa$$

2.4 A végeredmény

$$E_henger = 71.8 \pm 2.56 GPa$$

$$E_magas = 96.3 \pm 2.94 GPa$$

$$E_lapos = 107.1 \pm 5.22 GPa$$

2.5 Behajlás függése az alátámasztás helyétől

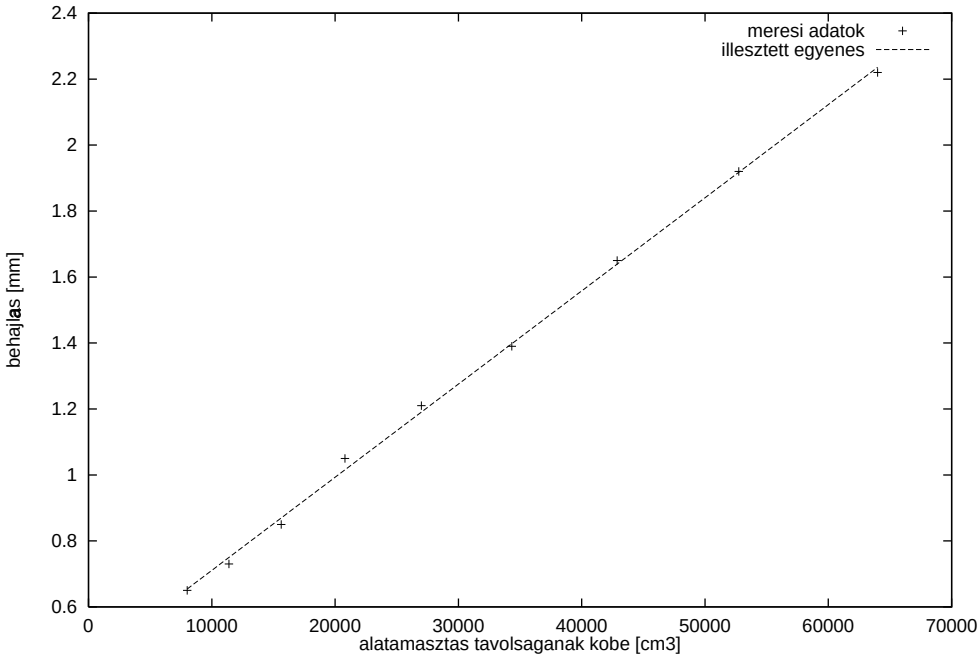
Kisérletileg vizsgáljuk meg, igaz-e, hogy a behajlás az alátámasztások távolságával (azonos terhelés mellett) köbös összefüggést mutat (mint ahogy eddigi számításainknál feltételeztük azt).

L (cm)	X
40	2.18
37.5	1.92
35	1.71
32.5	1.39
30	1.31
27.5	1.05
25	0.85
22.5	0.73
20	0.6

Táblázat 2: Henger behajlása különböző alátámasztási távolságoknál ($s = 4kg$)

A mérési pontokra illesztett egyenes egyenlete:

$$f(x) = ax + b \ , \quad a = (2.82 \pm 0.032) \cdot 10^{-5} \ , \quad b = 0.428 \pm 0.011$$



ábra 3: Behajlás az alátámasztási távolság köbének függvényében

3 Torzió modulusz meghatározása

3.1 Mérés leírása

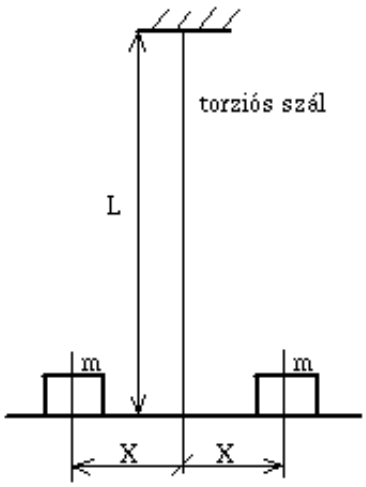
A periódusidő mérését egy elektronikus eszközzel végezzük, mely egy infra LED-ből, egy fényérzékelőből, és egy hozzájuk kapcsolt elektronikus órából áll. Ez a szerkezet érzékeli ha a detektor "lábai közt" elhalad az inga, és megméri 10 (vagy 50) periódus idejét.
Megmérjük az inga lengésidejét különböző tehetetlenségi nyomatékok esetén. A tehetetlenségi nyomaték változtatását a súlyok ($m = 194g$) tengelyhez viszonyított távolságainak (X) változtatásával valósítjuk meg.

A táblázatban szereplő adatokat négyzetre emeljük, ábrázoljuk és egyenest illesztünk rájuk. Közben aktívan támaszkodunk a

$$T^2 = \frac{8\pi L}{GR^4}(\Theta_0 + 2\Theta_s + 2mX^2)$$

képletre (amely egy egyenes ha T^2 -et X^2 függvényében ábrázoljuk), ahol:

- Θ_0 : az inga "üres" tehetetlenségi nyomatáka



ábra 4: A torziós inga

X (cm)	T (s)
0	5.2119
3	6.5117
4	7.3448
5	8.3119
6	9.3342
7	10.4113
8	11.5644
9	12.7857
10	13.9225

Táblázat 3: Inga periódusidejének alakulása (10 periódusokból meghatározva)

- $\Theta_s = 4.91 \pm 0.01 \cdot 10^{-5} kgm^2$: a súlyok járuléka a tehetetlenségi nyomatékhoz

$$\Theta_s = \frac{1}{2} m r^2$$

(itt m a súly tömege, r pedig a henger alakú súlyok sugara $r = 22.5 \pm 0.05mm$)

- m : a súlyok tömege
- L : az inga hossza (most : $L = 0.59m$)
- R : az inga szálának átmérője (esetünkben : $R = 2.5 \cdot 10^{-4}m$)
- G : a meghatározandó torzió modulusz

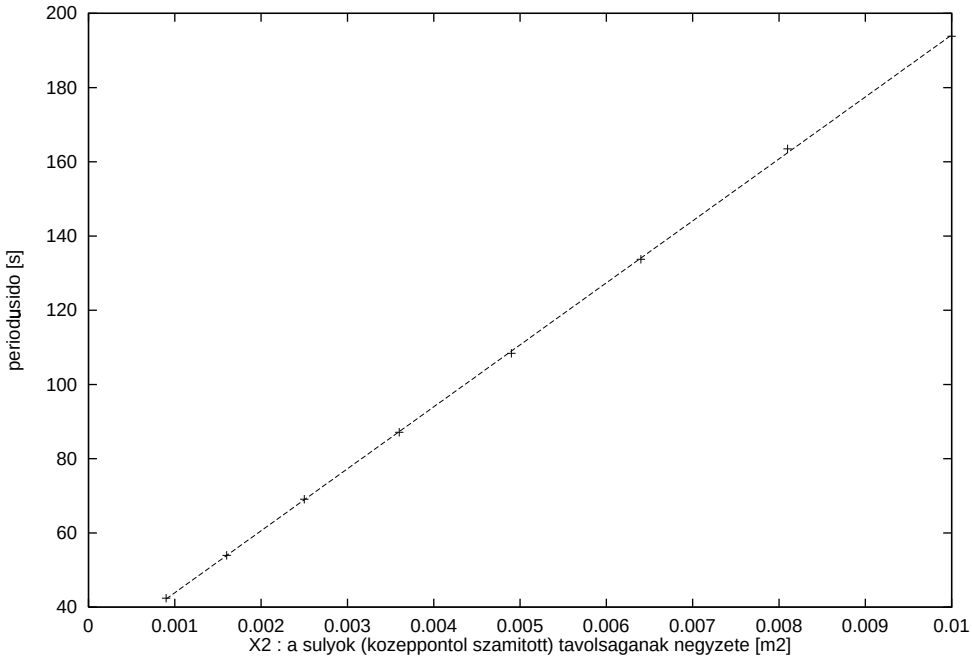
$$T^2(X^2) = aX^2 + b \ , \quad a = 16699 \pm 54\frac{s^2}{m^2} \ , \quad b = 27.17 \pm 0.3s^2$$

Az előzőekből pedig:

$$a = \frac{16\pi Lm}{GR^4} \ , \quad b = \frac{8\pi L}{GR^4}(\Theta_0 + 2\Theta_s)$$

Ahonnan G és Θ_0 már meghatározható.

$$G = \frac{16\pi Lm}{aR^4}$$



ábra 5: A mért periódusidők a rájuk illesztett egyenessel.

$$\Theta_0 = 2(\frac{b}{a}m - \Theta_s)$$

3.2 Eredmény

$$G = 88.2 \cdot 10^9 \frac{kg}{ms^2}$$

$$\Theta_0 = 53.3 \cdot 10^{-5} kgm^2$$

3.3 A mérés hibái

A szál hosszát (L) mérőszalaggal mértem, vastagságát (R) pedig tolómérővel, ezek pontossága :

$$\Delta L = \pm 5 \cdot 10^{-4} m \ , \quad \Delta R = \pm 5 \cdot 10^{-6} m$$

Így már G számításához használt minden adat hibája adott:

$$\Delta G = G(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta a}{a} + 4\frac{\Delta R}{R})$$

R hibája azonban olyan súlyt kap így, hogy gyakorlatilag minden más hibát elnyom, ezért egyszerűsíthetünk :

$$\Delta G = G(4\frac{\Delta R}{R}) = \pm 7.05 \cdot 10^9 \frac{kg}{ms^2}$$

Θ_0 hibaszámítása :

$$\Delta\Theta_0 = \Theta_0(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta\Theta_s}{\Theta_s}) = \pm 0.86 \cdot 10^{-5} kgm^2$$

3.4 A végeredmény

$$G = (88.2 \pm 7.05)10^9 \frac{kg}{ms^2}$$

$$\Theta_0 = (53.3 \pm 0.86)10^{-5} kgm^2$$