Rugalmas állandók mérése

(Mérési jegyzőkönyv)

Hagymási Imre

2007. április 23.
(hétfő délelőtti csoport)

1. Young-modulus mérése behajlásból

1.1. A mérés menete

A mérés elméleti háttere megtalálható a jegyzetben [1]. A mérést az ablaktól távolabbi mérőhelyen végeztem. A laborvezető által kiadott minták sorszáma A1 illetve V3 volt. A mérésnek ezt a részét - a laborvezető javaslatára - a jegyzetben leírttól eltérő módon végeztem. A minta befogását követően az állandó terhelés felhelyezése helyett, a terhelő kart mindig megfeszítettem egy kicsit amikor új súlyt helyeztem fel, ugyanis nem szükséges az, hogy a behajlás-erő függvény az origóból induljon, hiszen könnyen látható, hogy az egyenes meredeksége hordozza a számunkra szükséges információt. Többek között ez biztosítja azt is, hogy az újabb súly felhelyezésekor a mérőóra alapállása ne változzon meg.

1.2. Mérési eredmények

Az A1-es minta keresztmetszete téglalap, amelynek hosszabbik oldalát jelöljük a-val, rövidebbik oldalát b-vel, a V3 jelű hengeres rúd átmérője pedig legyen d! Csavarmikrométer segítségével több helyen is megmértem a rudak fenti paramétereit, az eredmények az 1. táblázatban láthatók. A továbbiak-

lineáris méret	b (mm)	a (mm)	d (mm)
1. mérés	7.92	12.00	10.02
2. mérés	7.94	11.99	10.03
3. mérés	7.93	11.99	10.01
4. mérés	7.93	11.98	10.02
5. mérés	7.93	12.00	10.02
átlagérték	7.93 ± 0.01	11.99 ± 0.01	10.02 ± 0.01

1. táblázat. A rudak lineáris méretei.

ban megkülönböztetünk két helyzetet. „Álló” helyzetnek nevezzük azt, amikor a hajlítás a rövidebbik oldalra merőlegesen történik, míg „fekvő” helyzetnek azt amikor a hosszabbik oldalra merőlegesen terheljük a rudat. [1] jegyzet

képleteinek megfelelően a rudak másodrendű nyomatékai:

$$I_{a^3b} = (1139 \pm 3)\mathrm{mm}^4$$
$$I_{ab^3} = (498 \pm 2)\mathrm{mm}^4$$
$$I_{\bigcirc} = (494 \pm 2)\mathrm{mm}^4.$$

1.2.1. Behajlás a terhelőerő függvényében

A 2. táblázatban láthatók az A1-es minta „fekvő” helyzetében mért adatok. A mérési adatok, illetve a rájuk illesztett egyenes az 1. ábrán látható. Az

m (kg)	s (cm)	m (kg)	s (cm)
0.5	0.36	2.75	0.74
0.75	0.40	3.00	0.79
1.00	0.43	3.25	0.83
1.25	0.47	3.50	0.87
2.00	0.60	4.00	0.95
2.5	0.70	4.25	1.00

2. táblázat. Az A1 minta behajlásának értékei „fekvő” helyzetben, különböző terhelősúlyok mellett.

adatokra illesztett egyenes $s = m_{ab^3} \cdot F + s_{ab^3}$ egyenletében a paraméterekre a következő értékeket kapjuk:

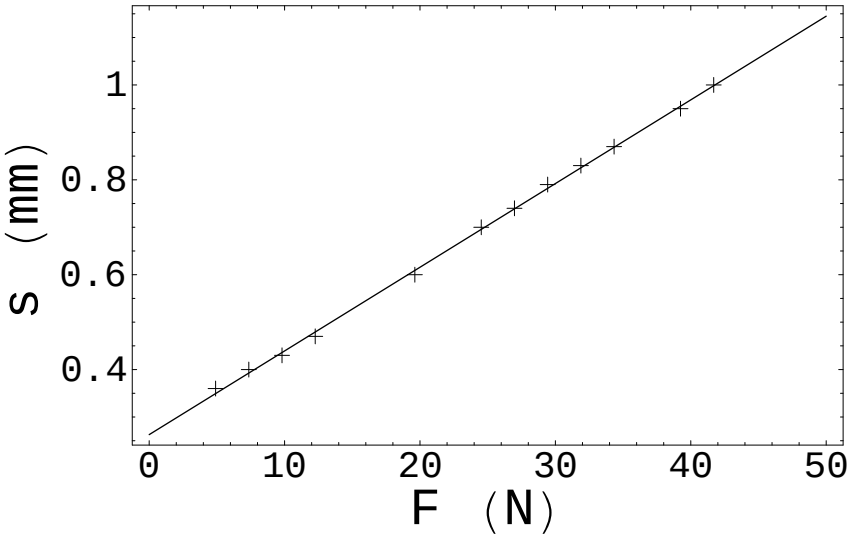
$$m_{ab^3} = (0.0176 \pm 0.0001)\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{N}}, \quad s_{ab^3} = (0.264 \pm 0.004)\mathrm{mm}.$$

Az imént bemutatott esethez teljesen analóg módon járhatunk el akkor is, ha a minta „álló” helyzetben van befogva. A mérési adatok a 3. táblázatban láthatók. A mérési adatokból készült grafikon a 2. ábrán látható. Az illesztett egyenes meredeksége és tengelymetszete:

$$m_{a^3b} = (0.0080 \pm 0.0001)\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{N}}, \quad s_{a^3b} = (0.380 \pm 0.003)\mathrm{mm}.$$

Végül a V3 hengeres vörösrézmintán végzett mérés eredményei láthatók a 4. táblázatban. A mérési eredményekből készített grafikon a 3. ábrán látható. A mérési pontokra illesztett egyenes meredeksége és tengelymetszete:

$$m_{\bigcirc} = (0.01023 \pm 0.00009)\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{N}}, \quad s_{\bigcirc} = (0.538 \pm 0.002)\mathrm{mm}.$$



1. ábra. Az A1 jelű rúd behajlása a terhelőerő függvényében, „fekvő” befogás mellett.

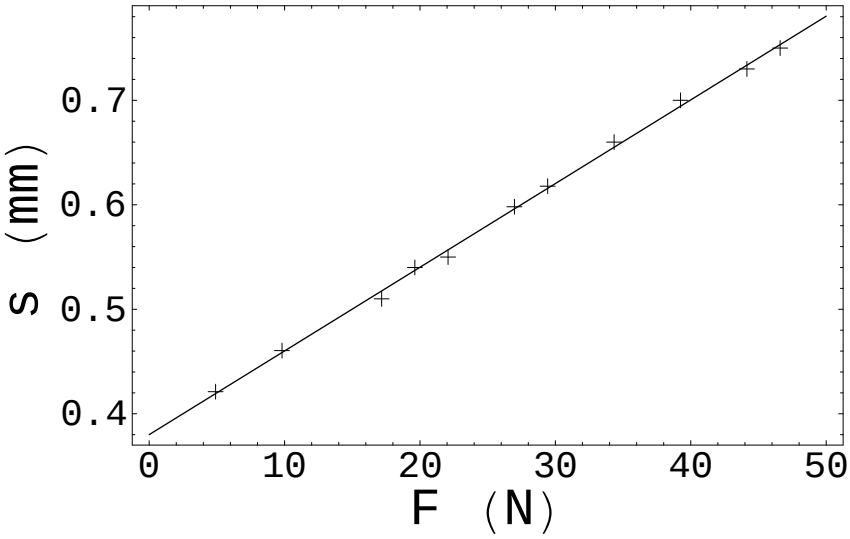
m (kg)	s (cm)	m (kg)	s (cm)
0.5	0.42	3.00	0.61
1.00	0.46	3.50	0.66
1.75	0.51	4.00	0.70
2.00	0.54	4.50	0.73
2.25	0.55	4.75	0.75
2.75	0.59		

3. táblázat. Az A1 minta behajlásának értékei „álló” helyzetben, különböző terhelősúlyok mellett.

1.3. A Young-modulus meghatározása

Az előbb meghatározott meredekségek segítségével megkaphatjuk a minták Young-modulusát. [1] jegyzet szerint:

$$s = \frac{1}{48}\frac{l^3}{E_i I_i}F = m_i F.$$



2. ábra. Az A1 jelű rúd behajlása a terhelőerő függvényében, „álló” befogás mellett.

m (kg)	s (cm)	m (kg)	s (cm)
0.5	0.59	2.25	0.76
0.75	0.61	2.75	0.82
1.00	0.64	3.00	0.84
1.25	0.66	3.25	0.86
1.75	0.72	3.50	0.88
2.00	0.74	4.00	0.94

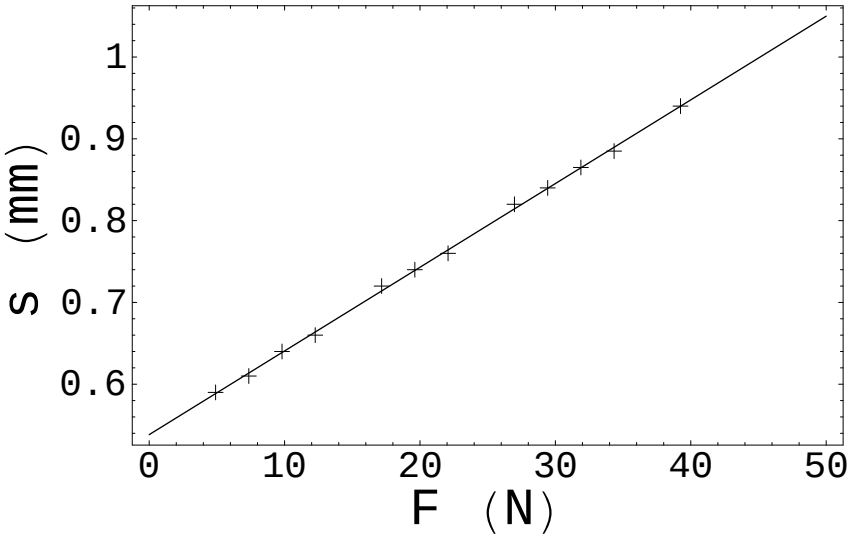
4. táblázat. A V3 minta behajlásának értékei különböző terhelősúlyok mellett.

A mérések során az ékek távolsága $l = (30.1 \pm 0.1)$cm volt. A Young-modulust kifejezve:

$$E_i = \frac{1}{48} \frac{l^3}{m_i I_i}.$$

A Young-modulus hibája a hibaterjedés szabályainak megfelelően számítható:

$$\frac{\Delta E_i}{E_i} = \frac{\Delta m_i}{m_i} + \frac{\Delta I_i}{I_i} + 3\frac{\Delta l}{l}.$$



3. ábra. A V3 jelű rúd behajlása a terhelőerő függvényében.

A minták Young-modulusai:

$$E_{a^3b} = (6.48 \pm 0.12) \cdot 10^{10}\text{Pa}$$
$$E_{ab^3} = (6.23 \pm 0.15) \cdot 10^{10}\text{Pa}$$
$$E_{\bigcirc} = (1.12 \pm 0.02) \cdot 10^{11}\text{Pa}.$$

Eredményeinket összehasonlítva a táblázati értékekkel megállapíthatjuk, hogy nagyságrendileg helyes eredményt kapunk. Ebből arra következtethetünk, hogy a minták nem tisztán alumíniumból és vörösrézből készültek. Annak az oka, hogy alumínium esetében a kétféle Young-modulus eltérése mérési hibán kívül van, feltehetőleg az, hogy az anyag rugalmasságtanilag nem izotrop.

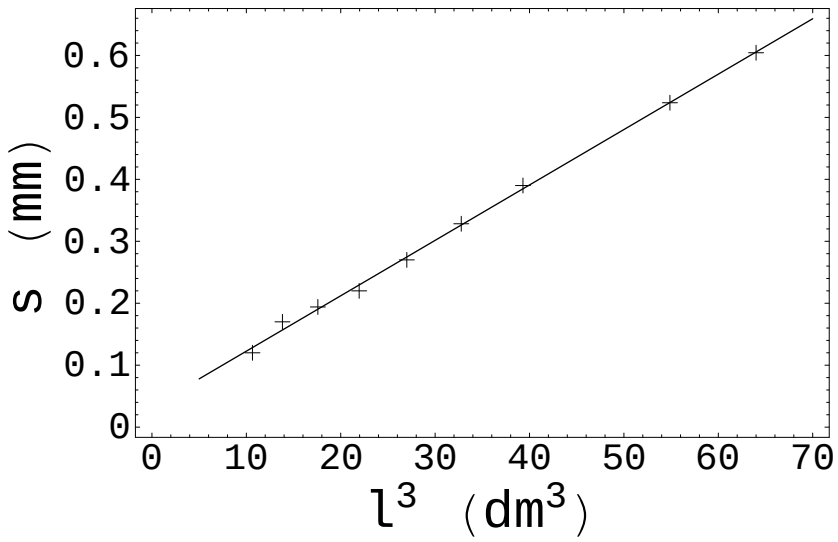
1.4. A behajlás függése a rúd hosszától

Ezen mérés során azt vizsgáltam, hogy hogyan függ a V3-as minta behajlása a befogóékek l távolságától. A mérési leírást követve minden befogás után, az $m = 3 \cdot 9.81$N terhelés felhelyezése előtt, feljegyeztem az $m_0 = 0.5 \cdot 9.81$N alapterhelés által okozott kezdeti s_0 behajlást. A nagyobb F terheléshez így $s = s_t - s_0$ behajlás fog tartozni. A mérési eredményeket az 5. táblázat foglalja össze. A mérési adatokból készült grafikon a 4. ábrán látható.

Az adatpontokra illesztett egyenes m meredekségéből a Young-modulus a

l (cm)	s_0 (cm)	s_t (cm)	s (cm)
40	0.75	1.35	0.60
38	0.33	0.85	0.52
36	0.69	1.19	0.50
34	0.52	0.91	0.39
32	0.42	0.74	0.32
30	0.45	0.72	0.27
28	0.23	0.45	0.22
26	0.42	0.61	0.19
24	0.33	0.50	0.17
22	0.33	0.45	0.12

5. táblázat. A V3 minta behajlásának értékei különböző éktávolságok mellett, azonos terhelés esetén.



4. ábra. A V3 jelű rúd behajlása a befogási hossz köbének függvényében.

következőképpen határozható meg:

$$E'_{\bigcirc} = \frac{F}{48mI_{\bigcirc}}.$$

Az adatpontokra illesztett egyenes meredeksége:

$$m = (0.0089 \pm 0.0001)\frac{1}{\mathrm{m}^2}.$$

Ennek segítségével a Young-modulusz:

$$E'_{\bigcirc} = (1.39 \pm 0.02) \cdot 10^{11}\mathrm{Pa}.$$

2. A torziómodulus mérése

2.1. Geometriai adatok

A torziós szál hosszát mérőszalaggal, átmérőjét csavarmikrométerrel, a tárcsák átmérőjét pedig tolómérővel mértem. A tárcsák tömegét a laborban található analitikai mérleggel mértem. A 6-os számú tárcsa tömegére $m_1 = 196.2870$ g-ot, a 8-as számú tárcsa tömegére pedig $m_2 = 196.3545$ g-ot kaptam, a tárcsák átmérője tizedmilliméterre megegyezett, értéke $D_1 = D_2 = (45.00 \pm 0.05)$mm. A torziós szál hosszát $l = (59.1 \pm 0.05)$cm-nek, átmérőjét pedig $d = (0.510 \pm 0.003)$mm-nek mértem.

2.2. A torziómodulus meghatározása

A csavarás elmélete szerint a G torziómudulus és a torziós inga T lengésideje között az alábbi kapcsolat áll fenn:

$$G = K\frac{\Theta}{T^2},$$

ahol Θ a rendszer tehetetlenségi nyomatéka (az üres ingáé Θ_0):

$$\Theta = \Theta_0 + \frac{1}{2}m_1\left(\frac{D_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{D_2}{2}\right)^2 + (m_1 + m_2) \cdot r^2,$$

K pedig a torziós szál geometriai paramétereitől függő állandó:

$$K = \frac{8\pi l}{(d/2)^4} = (3.51 \pm 0.08) \cdot 10^{15}\frac{1}{\mathrm{m}^3}.$$

Ezek felhasználásával a következő egyenletet kapjuk T^2-re:

$$T^2 = \frac{K}{G}\left(\Theta_0 + \frac{1}{2}m_1\left(\frac{D_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{D_2}{2}\right)^2\right) + \frac{K(m_1+m_2)}{G}\cdot r^2.$$

Azaz, T^2-et r^2 függvényében ábrázolva egy $T^2 = ar^2 + b$ egyenletű egyenest kapunk, amely paramétereinek segítségével a torziómodulusz és az üres inga tehetetlenségi nyomatéka kifejezhető:

$$G = K\frac{m_1+m_2}{a},$$
$$\Theta_0 = \frac{Gb}{K} - \frac{1}{2}m_1\left(\frac{D_1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}m_2\left(\frac{D_2}{2}\right)^2.$$

A mérési eredményeket a 6. táblázat foglalja össze, az adatokból készített grafikon pedig az 5. ábrán látható. Az illesztett egyenes paraméterei:

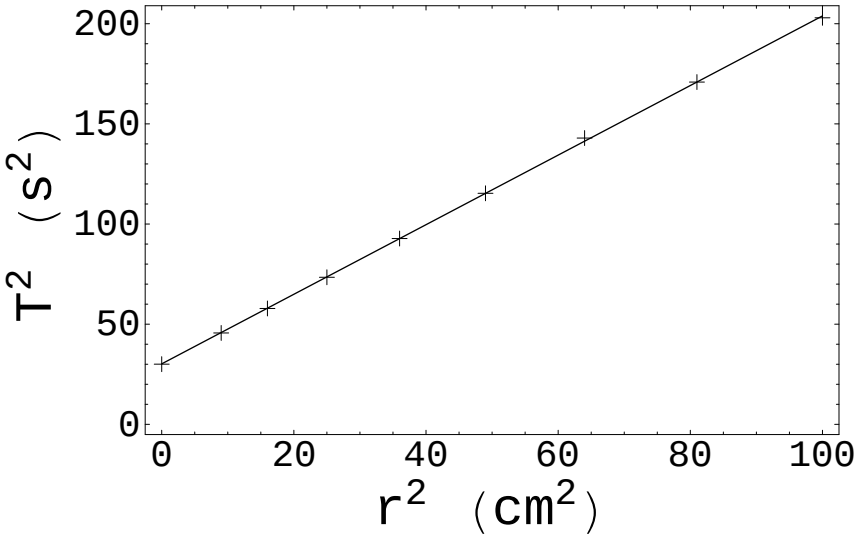
r (cm)	$10T$ (s)
0	54.813
3	67.544
4	76.058
5	85.688
6	96.314
7	107.400
8	119.549
9	130.718
10	142.463

6. táblázat. A torziós mérés eredményei.

$$a = (1.736 \pm 0.007)\cdot 10^4 \mathrm{m}^{-2}\mathrm{s}^2, \quad b = (30.1 \pm 0.3)\mathrm{s}^2.$$

Az illesztett egyenes korrelációs együtthatója $R^2 = 0.999877$, ezzel igazoltuk a Steiner-tételt. A paraméterek segítségével meghatározhatjuk a keresett értékeket:

$$G = (7.9 \pm 0.2)\cdot 10^{10}\mathrm{Pa},$$
$$\Theta_0 = (6.2 \pm 0.4)\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2.$$



5. ábra. A torziós mérés eredményei.

Hivatkozások

[1] Havancsák Károly: *Mérések a klasszikus fizika laboratóriumban*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2003.