JEGYZŐKÖNYV

03. Mérés - Hangfrekvenciás mechanikai rezgések vizsgálata

Klasszikus Fizika Laboratórium

- Mérést végezte: Rábóczki Bence
- Mérést végző Neptun-azonosítója: NQQDTE

- Mérés időpontja: 2020. október 09.
- Jegyzőkönyv leadásának időpontja: 2020. október 19.

Fehasznált mérőeszközök

- "B" jelzéssel ellátott minta
- "14"-es jelzéssel ellátott minta
- mintatartó keret
- gerjesztő elektromágnes
- detektor
- feszültség generátor
- frekvenciamérő
- frekvencia finomszabályzó
- analóg voltmérő
- csavarmikrométer
- digitális tolómérő
- digitális mérleg

A mérés rövid leírása

A mérés három részből állt. Először is "B" jelű mintánál mértem ki a sajátfrekvenciákat, valamint vizsgáltam a sajátfrekvenciák felénél is a rezgést. Szintén ennél a mintánál mértem meg a rezonanciagörbét az alapfrekvenciánál. Végül a harmadik részben a "14"-es mintára váltottam és megvizsgáltam a frekvencia hosszfüggését.

A mérés elve

A mérés során a mintában kialakuló transzverzális mechanikai rezgéseket vizsgáljuk. A rúd egy rezgése diszkrét sajátmódusok szuperpozíciójaként állítható elő. A gerjesztés alkalmas megválasztásával az egyes sajátmódusok külön is gerjeszthetők. A z tengely irányában megrezgetett rúd sajátmóddusait leíró függvények szétbonthatók hely- és időfüggő tagok szorzatára: $z_i(x,t) = Z_i(x) \cdot T_i(t)$. Itt a helyfüggő tag alakja:

$$Y(x) = A \cdot \left[(\mathrm{sh}(\lambda x) - \sin(\lambda x)) + \frac{\mathrm{ch}(\lambda l) + \cos(\lambda l)}{\mathrm{sh}(\lambda l) - \sin(\lambda l)} \cdot (\mathrm{ch}(\lambda x) - \cos(\lambda x)) \right]$$

A gerjesztő generátor feszültsége színuszos (a gerjesztő erő: $F = F_0 \sin(\omega t)$), a rezgést pedig a belső súrlódás jellegű erők és a levegő is akadályozza, ezért a minta minden pontja csillapított kényszerrezgést végez. ω_{0i} az i-edik módus saját-körfrekvenciája, és a következő képlettel írható fel:

$$\omega_{0i} = \frac{k_i^2}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{\varrho \cdot q}}$$

ahol $i = 1, 2, 3, ...$, E a minta hosszirányú Young-modulusa, ϱ a sűrűsége, q a keresztmetszetének a felülete, I pedig a másodrendű felületi nyomaték, amely definíció szerint:

$$I = \int \int_q z^2 \; dzdx$$

A minta téglalap keresztmetszetéből adódóan pedig az értéke (a a rezgő rész vastagsága, b a szélessége):

$$I = \frac{ab^3}{12}$$

Az i-edik módus sajátfrekvenciájának és az alapharmonikus sajátfrekvenciájának hányadosa, valamint az i-edik k állandó és az alapharmonikushoz tartozó k állandó hányadosa között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$\frac{\nu_{0i}}{\nu_{00}} = \left(\frac{k_{0i}}{k_{00}}\right)^2$$

A mintát ω_g frekvenciájú elektromágnessel gerjesztjük, ennek következtében erő hat, melynek időfüggő komponensére ezt írhatjuk fel:

$$F(t) \sim \alpha \cos(\omega_g t) + \beta \sin(\omega_g t)$$

Az első tag az örvényáramok és a gerjesztő elektromágnes alatt található állandó mágnes kölcsönhatásából adódik és ω_g frekvenciájú erőt gyakorol a mintára. A második tag az örvényáramok és a változó mágneses tér közötti kölcsönhatásból származik és $2\omega_g$ frekvenciájú. Tehát minden sajátmódus kétféle frekvenciával gerjeszthető, az egyik az $\omega_g = \omega_0 i$ egyenletnek tesz eleget, a másik pedig ennek a fele. Az amplitúdót mérve a gerjesztőfrekvencia függvényében megkapjuk a rezonanciagörbét. A görbe $\Delta\nu$ félértékszélessége kifejezhető a κ csillapítási tényezővel:

$$\Delta\nu = \frac{\kappa}{\pi}$$

Mérések a "B" jelzésű mintával

Sajátfrekvenciák kimérése

Először is megmértem a minta geometriai adatait, a pontosság növelése érdekében a szélességet és a vastagságot 5 különböző pontban is, ezeknek a az átlagát tüntetem most fel a jegyzőkönyvben. Belőlük már meghatározhattam a másodrendű nyomatékot valamint a sűrűséget. A geometriai méréseket követően a fémet a mintatartóba helyeztem, satuval rögzítettem, alá igazítottam az elektromágnest, a tetején pedig elhelyeztem a piezo-kristályos detektort.

"B" minta geometriai adatai [milliméterben]

A minta hossza	100.08 ± 0.01
A kalapácsfej hossza	20.10 ± 0.01
A kalapácsfej vastagsága	9.97 ± 0.01
A rezgő rész vastagsága	2.002 ± 0.052
A minta szélessége	15.038 ± 0.028

"B" minta egyéb mért és számolt adatai

Tulajdonság	Jel	Érték
A minta tömege	m	14.6349 ± 0.0001 g
A minta teljes térfogata	V	$(5.4214 \pm 0.018) \cdot 10^{-6}$ m^3
A minta sűrűsége	ϱ	$2699.4688 \pm 9.1 \ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$
A másodrendű nyomaték	I	10.055 ± 0.267 mm^4

"B" rezonancia frekvenciái

i	ν_{mert}[Hz]	$\nu_{mertfele}$[Hz]	$\nu_{szamolt}$[Hz]	$\nu_{szamoltfele}$ [Hz]	Eltérés [%]
0	256.7	127.8	-	-	-
1	1613.8	806.9	1608.72	804.36	0.253
2	4502.9	2251.45*	4515.94	2257.97	0.29
3	8824.5	4412.25*	8826.87	4413435	0.27

Az eltérések ν_{mert} és $\nu_{szamolt}$ között értendők

Az $i = 2$ és az $i = 3$-hoz tartozó félfrekvenciákat sokszoros próbálkozásra sem sikerült kimérnem, nem találtam amplitudót a kérdéses frekvenciák környékén. Valószínűleg pontatlanul állíthattam össze a mérést, de a nagyjábóli értéküket csillaggal jelölve feltüntettem a táblázatban, mint a ténylegesen kimért módusok frekvenciájának 0.5-szörösét.

Ezeknek az adatoknak az ismeretében már kiszámolhattam a Young-modulust, amelyre a következő összefüggés írható fel:

$$E_i = 4\pi^2 \cdot \nu_{0i}^2 \cdot \frac{l^4 \varrho q}{k_i^4 I}$$

ahol E a Young-modulus, ν_{0i} az i-edik módushoz mért frekvencia, l a rezgő rész hossza (amely a teljes hossz és a kalapácsfej hosszának különbsége), k_i az i-edik módushoz tartozó módusállandó, q a rezgő rész keresztmetszete, I pedig hozzá tartozó másodrendű nyomaték.

i	k_i	E_i (GPa)
0	1.87510	69.626
1	4.69409	70.07
2	7.86476	69.228
3	10.9955	69.589

Az eredmények átlagát véve és hibát számolva: $E_B = 69.628 \pm 4.47$ GPa.

Hibaszámítás

A legkisebb beosztásokból kiindulva a digitális tolómérő és a csavarmikrométer is 0.01 milliméter hibával mér, a digitális mérleg pedig 0.0001 grammal. A több pontban mért geometriai adatok hibái az átlagtól való legnagyobb eltérések lettek. A frekvencia bizonytalanságát 0.5 hertznek vettem, mivel az oszcilloszkóp nem működött, a frekvenciamérő által jelzett érték pedig nagyjából ennyit mozgott pluszban és mínuszban egy beállított pont körül. A hibák számításához használt fontosabb képletek:

$$\left|\frac{\Delta V}{V}\right| = \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right| + \left|\frac{\Delta c}{c}\right|$$

$$\left|\frac{\Delta \varrho}{\varrho}\right| = \left|\frac{\Delta V}{V}\right| + \left|\frac{\Delta m}{m}\right|$$

$$\left|\frac{\Delta I}{I}\right| = \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + 3\left|\frac{\Delta b}{b}\right|$$

$$\left|\frac{\Delta E}{E}\right| = 2\left|\frac{\Delta \nu}{\nu}\right| + 4\left|\frac{\Delta l}{l}\right| + \left|\frac{\Delta \varrho}{\varrho}\right| + 2\left|\frac{\Delta b}{b}\right|$$

Rezonanciagörbe kimérése

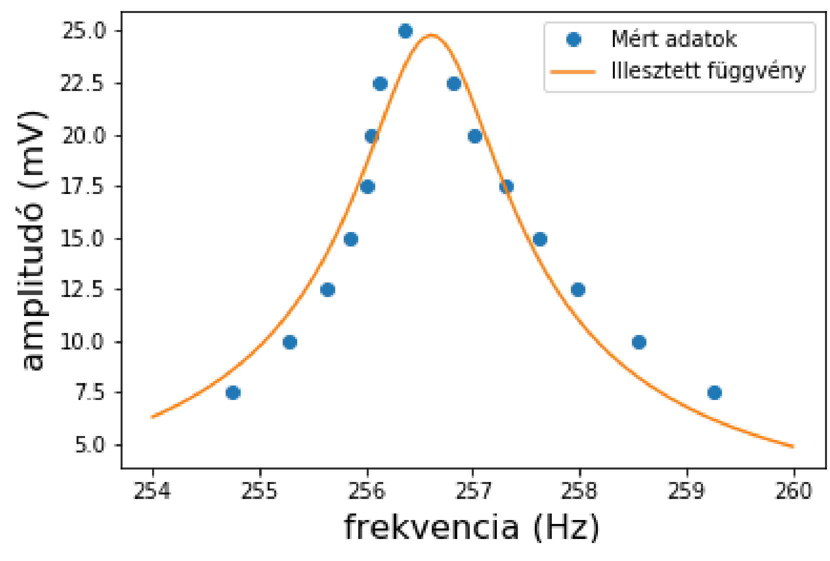
U/U_{max} [%]	Feszültség [mV]	ν_1 [Hz]	ν_2 [Hz]
100	25	256.37	
90	22.5	256.13	256.81
80	20	256.04	257.02
70	17.5	256	257.3
60	15	255.84	257.62
50	12.5	255.64	257.98
40	10	255.28	258.55
30	7.5	254.75	259.26

A rezonanciagörbe értékei az alapmódus körül

A haranggörbe két oldala asszimmetrikus lett, ezért a félértékszélesség és a csillapítási tényező hibája is jelentős:

$$\Delta\nu = 1.17 \pm 0.44 \text{ Hz}$$

$$\kappa = \pi \cdot \Delta\nu = 3.676 \pm 1.382 \text{ Hz}$$



Az illesztett görbe egyenlete :

$$A_i(\omega) = \frac{A_{i0}}{\sqrt{\left(\omega_{i0}^2 - \omega^2\right)^2 + 4\kappa_i^2\omega^2}}$$

Mérések a "14"-es jelzésű mintával

A rezonancia hosszfüggésének a vizsgálata

Ennél a mérésnél a rezgő rész hosszúságát 8 és 3 centiméter között változtatva vizsgáltam a rezonanciafrekvenciákat a "14"-es jelzésű mintán.

A minta hossza [mm]	100.05 ± 0.01
A minta szélessége [mm]	14.962 ± 0.112
A minta vastagsága [mm]	3.022 ± 0.032
A minta tömege [g]	39.8818 ± 0.0001

A "14"-es minta mért adatai

Tulajdonság	Jel	Érték
A minta térfogata	V	$(4.5232 \pm 0.082) \cdot 10^{-6}$ m^3
A minta sűrűsége	ϱ	8817.16 ± 159.87 kg/m^3
Másodrendű nyomaték	I	34.41 ± 1.35 mm^4

A "14"-es minta számolt adatai

A rezgő rész hossza: l [cm]	Rezonanciafrekvencia: ν [Hz]
8	238.78
7	338.3
6	397.08
5	581.26
4	893.67
3	1539.98

A mért rezonanciafrekcenviák a hossz függvényében

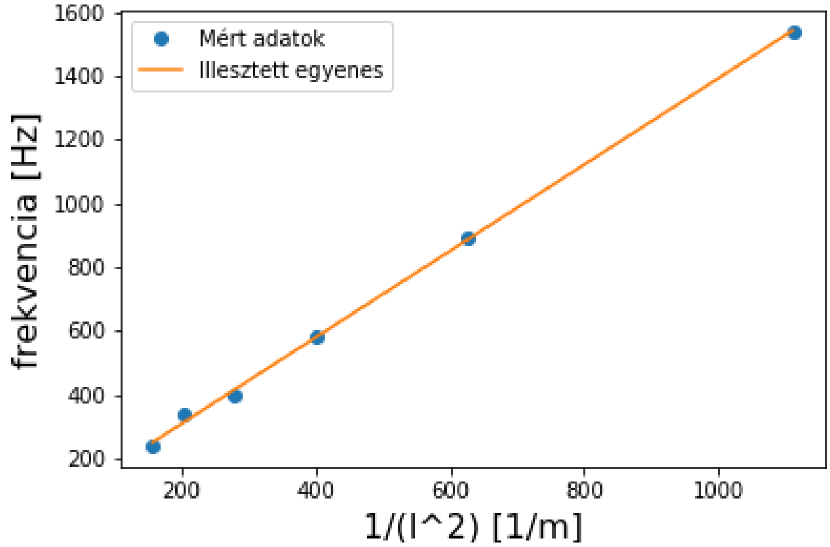
Az alapharmonikus frekvenciájára a következő összefüggés írható fel:

$$\nu_{00} = \frac{1}{l^2} \cdot \frac{k_0^2}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\varrho q}}$$

amiből látszik, hogy a frekvencia fordítottan arányos a rezgő rész hosszúságának négyzetével.

A mért adatokra illesztett egyenes meredekségének (m) segítségével már-meghatározható a Young-modulus az alábbi képlet alkalmazásával:

$$E = \frac{4\pi^2}{k_0^4} \cdot \frac{\varrho ab}{I} \cdot m^2$$



Az illesztésből a meredekség értéke: $m = 1.354 \pm 0.02\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$.

Így a "14"-es mintára számolt Young modulus: $E_{14} = 67.831 \pm 4.67$ GPa.

Hibaszámítás

A hibákat ugyanazokkal a képletekkel számoltam, mint a "B" mintánál, kivéve a Young-modulusét, amelynél a következő összefüggést alkalmaztam:

$$\left|\frac{\Delta E}{E}\right| = 2\left|\frac{\Delta m}{m}\right| + \left|\frac{\Delta \varrho}{\varrho}\right| + 2\left|\frac{\Delta b}{b}\right|$$

Diszkusszió

Mindent összevetve az első és a harmadik mérésem mondanám kellően pontosnak, sajnos a másodiknál a rezonanciagörbe nagyon asszimmetrikus lett ezért az illesztés is nehézkes volt és a számolt értékek is pontatlanok lettek. A mérés során szerencsétlen módon több mérőeszköz működésével is probléma adódott, valószínűleg ezek és a saját mérési pontatlanságaim vezettek ezekre az ereményekre.

Felhasznált irodalom

- Böhönyey - Havancsák - Huhn: Mérések a klasszikus fizika laboratóriumban, szerkesztette: Havancsák Károly, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest,2003.