JEGYZŐKÖNYV

02. Mérés - Rugalmas állandók mérése

Klasszikus Fizika Laboratórium

- Jegyzőkönyvet írta: Rábóczki Bence
- Jegyzőkönyvet író Neptun-azonosítója: NQQDTE

- Jegyzőkönyv leadásának időpontja: 2020. január 08.

A mérés célja

A mérés során különböző anyagok rugalmas tulajdonságait vizsgáljuk kétféle módszerrel. Az elsőben három minta Young-moduluszát határozzuk meg úgy, hogy vizsgáljuk a behajlásukat terhelés esetén, a másodiknál peig egy torziós szál torzió-moduluszát vizsgáljuk torziós inga segítségével.

Felhasznált mérőeszközök

- "A5" jelzéső hasáb minta
- "F2" jelzésű henger minta
- "S1" jelzésű henger minta
- "71"-es jelzésű torziós szál
- "5"-ös jelzésű tárcsa
- "8"-as jelzésű tárcsa
- Analitikai mérleg
- Csavarmikrométer
- Tolómérő
- Mérőszalag
- Torziós inga
- Kétkarú emelő
- Súlyok

A mérés elméleti háttere

Young-modulusz mérése

A mérés alapja, hogy a testek rugalmas deformációja során a testek bizonyos részei rövidülnek, mások megnyúlnak, de van egy neutrális zóna, amely hossza állandó marad. Rá a következő összefüggést írhatjuk fel:

$$s = \frac{1}{48}\frac{l^3}{EI}F$$

ahol s a lehajlás mértéke, l a felfüggesztések távolsága, I a test másodrendű nyomatéka, F a testre ható deformáló erő, E pedig az általunk keresett Young-modulusz. A másodrendű nyomaték definíció szerint:

$$\int_F z^2 \, dF$$

Mivel a mi esetünkben hengerrel és hasábbal dolgozunk, ezért kör és téglalap keresztmetszetű I-ket kell alkalmaznunk:

$$I_{kor} = \frac{r^4 \pi}{4}$$

$$I_{tegla} = \frac{ab^3}{12}$$

ahol R a kör sugara, a a téglalap alapja és b a magassága.

Torziómodulusz mérése

A G torziós modulusz és a torziós inga T periódus ideje közti összefüggés a következő:

$$G = K\frac{\Theta}{T^2}$$

$$K = \frac{8\pi l}{r^4}$$

ahol Θ a lengő rendszer tehetetlenségi nyomatéka, K a toziós ingára jellemző állandó, amely magába foglalja a hosszát (l) és a sugarát (r). Mivel Θ rendszerint nem ismert ezért úgy járunk el, hogy a tehetetlenségi nyomatékot ismert mértékben változtatjuk. Ehhez $m_1 \approx m_2$ és $\Theta_1 \approx \Theta_2$ tulajdonságú tárcsákat alkalmazunk. Legyen $m_1 + m_2 = M$ és $\Theta_1 + \Theta_2 = \Theta_S$, a tárcsák távolsága a forgástengelytől pedig a. Ekkor a következő összefüggések állnak fenn:

$$\Theta = \Theta_{inga} + \Theta_S + Ma^2$$

$$T^2 = \frac{K}{G}(\Theta_{inga} + \Theta_S) + \frac{KM}{G}a^2$$

Ha T^2-et a^2 függvényeként ábrázoljuk akkor ez egy egyenes egyenlete. Az egyenes meredeksége $m = \frac{KM}{G}$ és tengelyetszete $b = \frac{K}{G}(\Theta_{inga} + \Theta_S)$, így a G torziómodulusz és az inga saját tehetetlenségi nyomatéka meghatározhatóak az alábbi egyenletekből:

$$G = \frac{KM}{m}$$

$$\Theta_{inga} = \frac{Gb}{K} - \Theta_S$$

Mérési adatok és kiértékelés

A mérési adatokat digitális úton kaptam meg a járványhelyzetre való tekintettel, ezeket dolgozom most fel a jegyzőkönyvemben.

Young-modulusz mérése

"A5" jelzésű minta

A minta geometriai adatai és az adatok átlagai:

a [mm]	b [mm]
11.95	8.05
11.96	8.05
11.96	8.04
11.95	8.05
11.96	8.04

$\bar{a}$ [mm]	$\bar{b}$ [mm]
11.956	8.046

A másodrendű nyomatékok pedig:

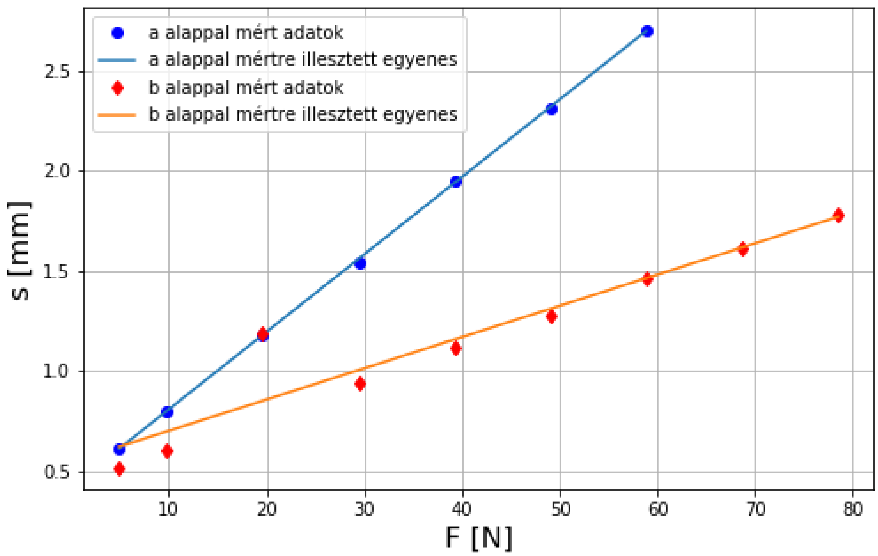
$$I_a = \frac{ab^3}{12} = (5.1897 \pm 0.0024) \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}^4$$

$$I_b = \frac{ba^3}{12} = (11.4593 \pm 0.0043) \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}^4$$

Rögzített alátámasztási távolság ($l = 0.4 \pm 0.001$ m mellett) a lehajlások:

m [kg]	$F = m \cdot 9.81$ [N]	s_a (a az alap) [mm]	s_b (b az alap) [mm]
0.5	4.905	0.615	0.517
1	9.810	0.800	0.606
2	19.62	1.178	1.186
3	29.43	1.543	0.939
4	39.24	1.950	1.113
5	49.05	2.307	1.271
6	58.86	2.703	1.461
7	68.67	-	1.610
8	78.48	-	1.775

Az adatokra egyeneseket illesztettem:



Az egyenesek egyenletei:

$$s_a(F) = m_a \cdot F + b_a \text{ , ahol } m_a = 0.03867 \pm 0.0002 \text{ , } b_a = 0.4200 \pm 0.0076$$

$$s_b(F) = m_b \cdot F + b_b \text{ , ahol } m_b = 0.01560 \pm 0.0019 \text{ , } b_b = 0.5437 \pm 0.0896$$

A meredekségek mértékegysége $\frac{\text{mm}}{\text{N}}$, viszont a számoláshoz $\frac{\text{m}}{\text{N}}$-t használtam, az átváltáshoz pedig eloszottam az eredeti meredekségeket 1000-rel. Így már meghatározhatóak lettek a Young-moduluszok:

$$E_a = \frac{1}{48} \frac{l^3}{I_a \cdot m_a} = 64.44 \pm 0.38 \text{ GPa}$$

$$E_b = \frac{1}{48} \frac{l^3}{I_b \cdot m_b} = 74.59 \pm 9.12 \text{ GPa}$$

Hasonlítsuk össze $\frac{m_a}{m_b} : \frac{I_b}{I_a}$ arányokat, mert elméletben egyezniük kell! Valójában azonban ez az arány 2.4788 : 2.2081. Ez az eltérés a mérési pontatlanságokból kell, hogy származzon.

"F2" jelzésű minta

A minta geometriai adatai:

d [mm]
7.93
7.93
7.94
7.93
7.94

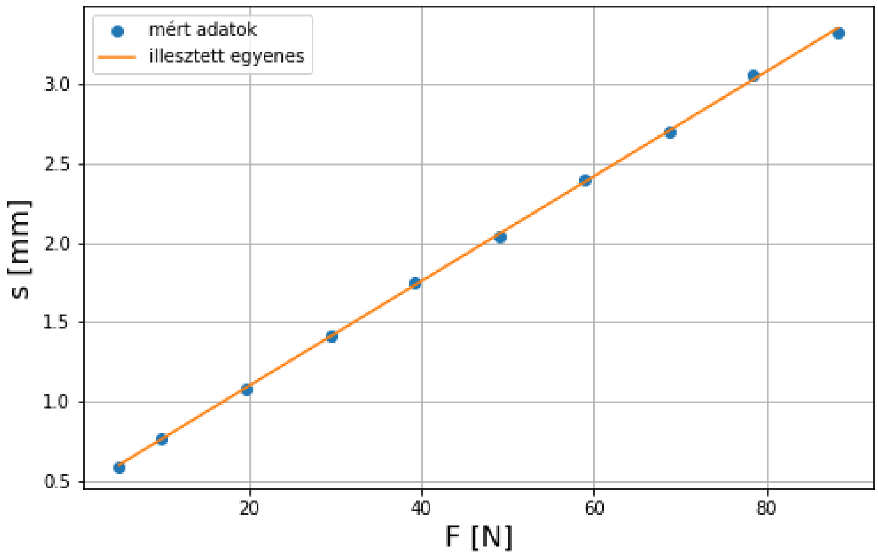
Ezekből az átlag átmérő: $\overline{d} = 7.934 \pm 0.01$ mm, vagyis a sugár amivel számolni fogok: $r = 3.967 \pm 0.005$ mm. A másodrendű nyomaték tehát:

$$I = \frac{r^4 \pi}{4} = (1.9451 \pm 0.0098) \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}^4$$

Rögzített alátámasztási távolság ($l = 0.4 \pm 0.001$ m mellett) a lehajlások:

m [kg]	$F = m \cdot 9.81$ [N]	s [mm]
0.5	4.905	0.590
1	9.810	0.761
2	19.62	1.082
3	29.43	1.417
4	39.24	1.747
5	49.05	2.039
6	58.86	2.400
7	68.67	2.698
8	78.48	3.055
9	88.29	3.330

Az adatokra egyenest illesztettem:



Az egyenes egyenlete:

$$s(F) = m \cdot F + b \text{ , ahol } m = 0.0330 \pm 0.0002 \text{ , } b = 0.4369 \pm 0.0102$$

A mértékegységeket az előző mintánál tárgyalt módszerrel váltottam át a megfelelő eredmény érdekében. Tehát a Young-modulus:

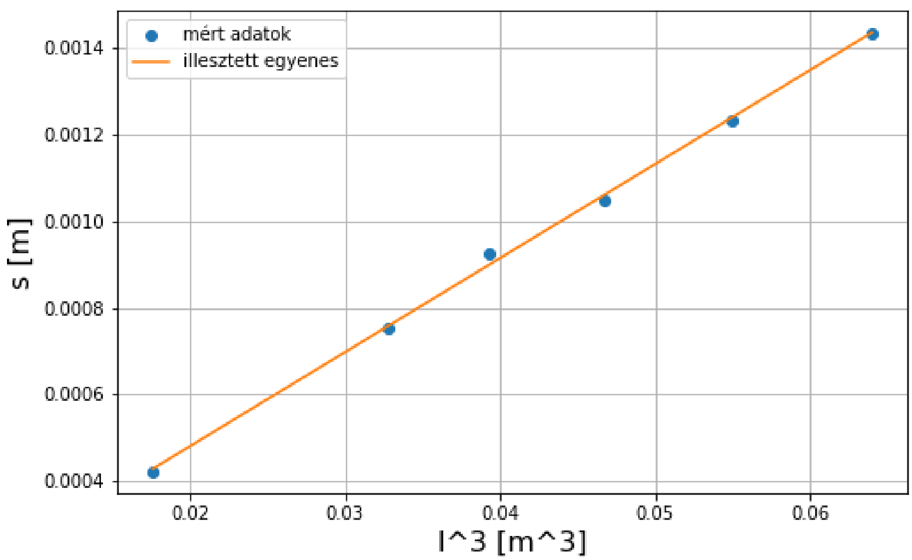
$$E = \frac{1}{48} \frac{l^3}{Im} = 207.72 \pm 3.86 \text{ GPa}$$

"S1" jelzésű minta

Ezzel a mintával nem az eddigi módszert használjuk a Young-modulus meghatározására. Itt állandó terhelések mellett az alátámasztás távolságát változtatva keressük az eredményt. Ezzel lényegében igazoljuk az s lehajlás l^3-tól való függését. A mért lehajlások esetén a terhelések:
$s_1 \rightarrow m_1 = 0.5$ kg és $s_2 \rightarrow m_2 = 4.5$ kg.
A mérési táblázat:

l [m]	l^3[m^3]	s_1 [10^{-5}m]	s_2 [10^{-5}m]	$s = s_2 - s_1$[10^{-5}m]
0.40	0.0640	43.8	187.2	143.4
0.38	0.0549	41.3	164.7	123.4
0.36	0.0467	60.8	165.7	104.9
0.34	0.0393	71.6	164.1	92.5
0.32	0.0328	71.5	146.9	75.4
0.26	0.0176	58.9	101.2	42.3

És az illesztett egyenes:



Az egyenes egyenlete:

$$s(l^3) = m \cdot l^3 + b \text{ , ahol } m = 0.0217 \pm 0.0004 \text{ , } b = 0.00005 \pm 0.00002$$

Itt a meredekség mértékegysége megfelelő, mivel már az illesztés előtt mindent m-be és m^3-be váltottam át.

A minta másodrendű nyomatékára is szükségünk lesz a számoláshoz. A geometriai adatok:

d [mm]
9.93
9.92
9.93
9.92
9.93

Ezekből az átlag átmérő: $\overline{d} = 9.926 \pm 0.01$ mm, vagyis a sugár amivel számolni fogok: $r = 4.963 \pm 0.005$ mm. Így már felírható, hogy:

$$I = \frac{r^4\pi}{4} = (4.7650 \pm 0.0144) \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}^4$$

A ráterhelés 4 kg volt, vagyis $F = 4 \cdot 9.81 = 39.24$ N. Végül pedig a Young-modulusz:

$$E = \frac{1}{48}\frac{F}{Im} = 79.06 \pm 1.70\ \mathrm{GPa}$$

Torziómodulusz mérése

A mérés során az inga periódusidejét vizsgáljuk eltérő tárcsahelyzetek, azaz eltérő tehetetlenségi nyomatékok, esetén. A tárcsák adatai:

	m [g]	d [mm]	R [mm]
5-ös tárcsa	194.648	45.05	22.525
8-as tárcsa	196.362	45.00	22.5

A tárcsák tehetetlenségi nyomatékai:

$$\Theta_5 = \frac{1}{2}m_5R_5^2 = (4.9380 \pm 0.0110) \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$$

$$\Theta_8 = \frac{1}{2}m_8R_8^2 = (4.9704 \pm 0.0111) \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$$

A torziós szál geometriai adatai:

d [mm]
0.70
0.71
0.70
0.70
0.70

A hossza pedig $l = 591 \pm 1$ mm

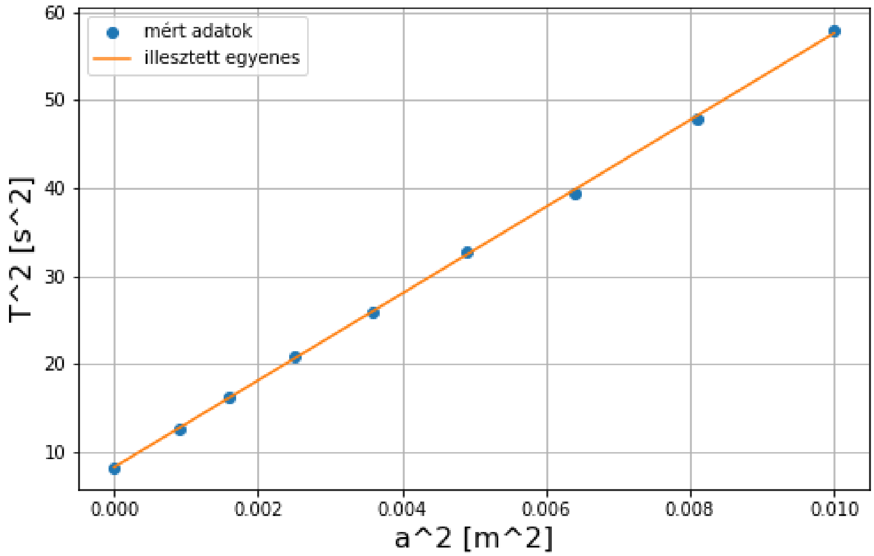
Ezekből az átlag átmérő: $\overline{d} = 0.702 \pm 0.01$ mm, ebből a sugár: $r = 0.351 \pm 0.005$ mm. Így már kiszámolhatjuk a K állandót:

$$K = \frac{8\pi l}{r^4} = (9.7859 \pm 0.5742) \cdot 10^{14}\ \frac{1}{\mathrm{m}^3}$$

A lengésidőket (T) és a hozzájuk tartozó tárcsahelyzeteket (a) az alábbi táblázat tartalmazza:

a [cm]	a^2 [cm^2]	T [s]	T^2 [s^2]
0	0	2.8807	8.2984
3	9	3.5677	12.7285
4	16	4.0236	16.1894
5	25	4.5746	20.9270
6	36	5.0920	25.9285
7	49	5.7245	32.7699
8	64	6.2799	39.4371
9	81	6.9131	47.7910
10	100	7.6158	58.0004

T^2-et ábrázoltam a^2 függvényében és az adatokra egyenest illesztettem:



Az egyenes egyenlete:

$$T^2(a^2) = m_e \cdot a^2 + b \text{ , ahol } m_e = 4924.54 \pm 33.50 \text{ , } b = 8.33 \pm 0.18$$

Így már meghatározható a torziómodulusz az alábbi módon:

$$G = \frac{K \cdot (m_5 + m_8)}{m_e} = 77.7 \pm 5.09 \text{ GPa}$$

Az üres inga tehetetlenségi nyomatéka pedig:

$$\Theta_{inga} = \frac{Gb}{K} - \Theta_5 - \Theta_8 = (5.6318 \pm 0.1600) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Ismeretlen test tehetetlenségi nyomatékának mérése ingával

Ha az ingára ismeretlen tehetetlenségi nyomatékú testet helyezünk, akkor meghatározhatjuk a Θ értékét a következő egyenlettel:

$$\Theta_x = \frac{G}{K} T_x^2 - \Theta_{inga}$$

A mérés során egy hengert vizsgáltunk ezzel a módszerrel, egyszer álló, egyszer pedig fekvő helyzetben. A mért lengésidők:

$$T_{allo} = 2.7245 \text{ s}$$

$$T_{fekvo} = 2.7346 \text{ s}$$

Ezeket behelyettesítbe a képletbe:

$$\Theta_{allo} = 2.6198 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\Theta_{fekvo} = 3.0576 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Hibaszámítás

A mérés során az inga hosszát mérőszalaggal mérték, melynek bizonytalanságát ± 1 mm-nek vettem. A tárcsákat tolómérővel mérték, ennél $\pm$ 0.05 mm-t vettem hibának. A többi hosszúságot csavarmikrométerrel mérték le, melynek bizonytalansága ± 0.01 mm. Az alátámasztási távolságokat milliméterskáláról olvasták le, ezért itt ± 1 mm hibával számoltam. Az analitikai mérlegnél ± 0.001 g volt a bizonytalanság, időmérésnél pedig abszolút pontosságot feltételeztem. Az egyenesek egyenleteinek bizonytalanságait az illesztőprogram számolta ki (erre a célra Pythont használtam).
Másodrendű nyomatékokra használt hibaképletek hasáb esetén:

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta a}{a} + 3 \cdot \frac{\Delta b}{b}$$

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta b}{b} + 3 \cdot \frac{\Delta a}{a}$$

És henger esetén:

$$\frac{\Delta I}{I} = 4 \cdot \frac{\Delta r}{r}$$

Young-modulusok hibáira használt képlet rögzített alátámasztási távolságok esetén:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta m}{m} + 3 \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

Az állandó terheléses mérésnél ugyanezt alkalmaztam, annyi különbséggel, hogy elhagytam az l-t tartalmazó tagot.
A tárcsák tehetetlenségi nyomatékáinál a következő módon számoltam:

$$\frac{\Delta \Theta}{\Theta} = \frac{\Delta m}{m} + 2 \cdot \frac{\Delta R}{R}$$

A K állandó hibája a következő egyenletből kapható meg:

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{\Delta l}{l} + 4 \cdot \frac{\Delta r}{r}$$

A torziómoduluszé pedig:

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta K}{K} + \frac{\Delta m_e}{m_e} + \frac{\Delta m_5 + \Delta m_8}{m_5 + m_8}$$

Az inga tehetetlenségi nyomatékánál az egyszerűség érdekében és a tömegmérés nagy pontossága miatt elhanyagoltam a tömegfüggő tagokat és a következő összefüggést használtam az illesztett egyenes alapján:

$$\frac{\Delta \Theta_{inga}}{\Theta_{inga}} = \frac{\Delta m_e}{m_e} + \frac{\Delta b}{b}$$

Diszkusszió

A mérést sajnos a járványhelyzet miatt nem végezhettem el személyesen, de ennek ellenére igyekeztem a legjobb tudásom alapján feldolgozni a digitális úton kapott adatokat. A mérések pontosra sikerültek, kivéve a hasáb b alaplapú mérésénél 3 kg-os terhelésnél. Ebből következően a tőle függő mennyiségek hibái is számottevőek lettek.

Felhasznált irodalom

- Böhönyey - Havancsák - Huhn: Mérések a klasszikus fizika laboratóriumban, szerkesztette: Havancsák Károly, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2003.