KLASSZIKUS FIZIKA LABORATÓRIUM

2. MÉRÉS

Rugalmas állandók mérése

Mérést végezte:
Enyingi Vera Atala
ENVSAAT.ELTE

Mérés időpontja:
2011. november 16.
Szerda délelőtti csoport

1. A mérés rövid leírása

Mérésem során különböző anyagok rugalmas tulajdonságait kellett vizsgálnom. Erre két módszert alkalmaztam.
Az egyikben egy hengeres rúd s egy téglatest Young-moduluszát határoztam meg statikusan, különböző súlyokkal terhelve őket, és a lehajlásukat vizsgálva. Ebben a mérésben a téglalap alapú hasáb rövidebb és hosszabb élére is megvizsgáltam az összefüggést.
A másik módszerrel egy torziós szál torziómodulusznak meghatározására a torziós inga periódusidejét határoztam meg, különböző tehetetlenségi nyomatékokra.

2. A mérés eszközei

- **A3** jelű téglalap alpú hasáb
- **S9** jelű hengeres rúd
- Súlyok
- Kétkarú emelő
- **7**-es és **8**-as tárcsák
- Tolómérő, mérőszalag, csavarmikrométer
- Torziós inga
- Analitikai mérleg

3. A mérés elmélete

3.1. A Young-modulusz mérése

A mérés alapja a testek rugalmas deformációjának azon jellemzője, hogy a testek bizonyos részei lehajlás során rövidülnek, vagy megnyúlnak, de mindig lesz egy olyan rész, az ún. *neutrális zóna*, melynek hossza állandó marad. Erre [1] alapján felírhatjuk az alábbi összefüggést:

$$s = \frac{1}{48}\frac{l^3}{EI}F$$

ahol s a lehajlás nagysága, l a felfüggesztések távolsága, I a keresztmetszet másodrendű nyomatéka F a testre ható, deformáló erő, E pedig a keresett Young-modulusz.
I definíciója:

$$I = \int\limits_{\mathcal{F}} z^2 \,\mathrm{d}F$$

Ezt tehát a minta alakja határozza meg. Mérésünkben kör keresztmetszetű, és téglalap alakú formák fordulnak elő, ezekre:

$$I_k = \frac{R^4\pi}{4}$$

$$I_t = \frac{ab^3}{12}$$

ahol a az alap, és b a magasság.

3.2. Torziós modulusz mérése

A torziós modulusz (G) és az inga periódusideje (T) között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$G = k\frac{\Theta}{T^2}$$

$$K = \frac{8\pi l}{r^4}$$

ahol Θ a rendszer tehetetlenségi nyomatéka és K a torziós szál jellemzésére használt mennyiség, l a torziás szál hossza, r a sugara.
Θ nem ismert, ezért a felhelyezett két tárcsát úgy célszerű választanunk, hogy azok közel azonos tömegűek legyenek, és $\Theta_1 \approx \Theta_2$. A távolságuk a tengelytől a. A tehetetlenségi nyomatéka a tárcsáknak, ha R a tárcsa sugara:

$$\Theta_{\text{tárcsa}} = \frac{1}{2}mR^2$$

Ekkor igaz az alábbi összefüggés:

$$\Theta = \Theta_{\text{ü}} + \Theta_1 + \Theta_2 + (m_1 + m_2)a^2$$

ahol $\Theta_{\text{ü}}$ az üres inga tehetetlenségi nyomatéka, $(m_1 + m_2)a^2$ pedig a Steiner-tétel következménye.

$$T^2 = \frac{K}{G}\left(\Theta + \Theta_1 + \Theta_2\right) + \frac{K(m_1 + m_2)}{G}a^2$$

A $T^2(a^2)$ adatokra egynest illesztek, innen számolhatóak al alábbi mennyiségek:

$$m = \frac{K}{G}(m_1 + m_2)$$

$$b = \frac{K}{G}\Theta + \Theta_1 + \Theta_2$$

ahol m az egyenes meredksége, b pedig a tengelymetszete. A torziómodulusz innen tehát:

$$G = K\frac{m_1 + m_2}{m}$$

Az üres inga tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta = \frac{Gb}{K} - \Theta_1 - \Theta_2$$

4. Mérési eredmények és kiértékelés

4.1. Young-modulusz

Fontos eltérés a mérési leírásban ([1]) szereplő módszerhez képest, hogy a kapott mintákat a kétkarú emelőbe való befogáskor nem használtam állandó terhelést. Ezt azért tehettem, mert a számomra fontos adat az erő-behajlás egyenes meredeksége, nem pedig a tengellyel alkotott metszéspontja. Azonban azt biztosítottam, hogy a terhelő kar mindig megfeszüljön, hogy a minta ne mozdulhasson el, ezáltal a mérőóra állása ne változzon. A testeket lehetőleg szimmetrikusan támasztottam alá.

4.1.1. Az A3 jelű hasáb

Az általam mért **A3** jelű hasábra kapott geometriai adatok:

	Hosszabb él a [mm]	Rövidebb él b [mm]
	11,98	7,86
	12,01	7,87
	11,99	7,86
Átlag	11,99	7,86

1. táblázat. *Az **A3** jelű test geometriai adatai*

A hosszmérés hibája $\Delta a = \Delta b = 0.01mm$.
Ennek lehajlási nyomatéka:

$$I_{\text{a oldal}} = \frac{ab^3}{12} = 486 \pm 1,9\text{mm}^4$$

$$I_{\text{b oldal}} = \frac{ba^3}{12} = 1133 \pm 6,5\text{mm}^4$$

A rögzítés távolsága $l = 36$ cm volt. Az erre mért lehajlási értékek a (2). táblázatban találhatók.
Az ezen pontokra illesztett egyenesek paraméterei:

$$m_{\text{a alap}} = 0,0277 \pm 0,0005\frac{\text{mm}}{\text{N}}$$

$$b_{\text{a alap}} = 0,15 \pm 0,02\text{mm}$$

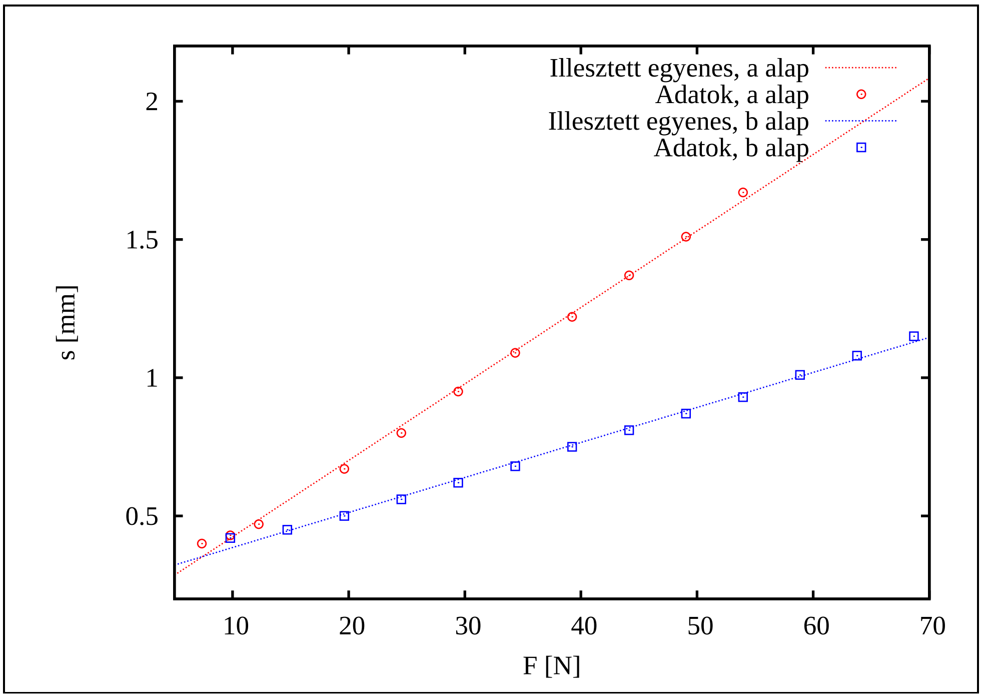
$$m_{\text{b alap}} = 0,0126 \pm 0,0002\frac{\text{mm}}{\text{N}}$$

$$b_{\text{b alap}} = 0,26 \pm 0,01\text{mm}$$

Az egyenesek egyenlete a (1). ábrán láthatók.

Hosszabb él, a az alap			Rövidebb él, b az alap		
m [kg]	F [N]	s [mm]	m [kg]	F [N]	s [mm]
0,75	7,36	0,40	1	9,81	0,42
1	9,81	0,43	1,5	14,72	0,45
1,25	12,26	0,47	2	19,62	0,50
2	19,62	0,67	2,5	24,53	0,56
2,5	24,53	0,80	3	29,43	0,62
3	29,43	0,95	3,5	34,34	0,68
3,5	34,34	1,09	4	39,24	0,75
4	39,24	1,22	4,5	44,15	0,81
4,5	44,15	1,37	5	49,05	0,87
5	49,05	1,51	5,5	53,96	0,93
5,5	53,96	1,67	6	58,86	1,01
			6,5	63,77	1,08
			7	68,67	1,15

2. táblázat. *Az **A3** jelű test tömeg-erő-lehajlás értékei*



1. ábra. *A hasáb adataira illesztett egyenesek, és a mért adatok*

Ezekből már számolható a Young-modulusz:

$$E_\mathrm{a} = \frac{1}{48}\frac{l^3}{I_\mathrm{a} m_\mathrm{a}} = (72,3 \pm 2,1)\,\mathrm{GPa}$$

$$E_{\text{b}} = \frac{1}{48}\frac{l^3}{I_{\text{b}} m_{\text{b}}} = (67,9 \pm 2,2)\text{ GPa}$$

A hibát az alábbi képlet alapján számoltam:

$$\Delta E = E\left(\frac{\Delta m}{m} + 3\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta I}{I}\right)$$

4.1.2. Az S9 jelű rúd

Ezután lemértem az **S9** jelű rudat, aminek az alábbiak a geometriai adatai:

	Átmérő d [mm]
	9,92
	9,91
	9,91
Átlag	9,91
Sugár	4,96

3. táblázat. *Az **A3** jelű test geometriai adatai*

Ennek lehajlási nyomatéka:

$$I_{\text{rúd}} = \frac{R^4\pi}{4} = 474 \pm 1,1\text{mm}^4$$

Az erre mért lehajlási értékek a (4). táblázatban találhatók.

m [kg]	F [N]	s [mm]
0,5	4,91	0,52
0,75	7,36	0,58
1	9,81	0,64
1,25	12,26	0,71
1,5	14,72	0,77
2	19,62	0,90
2,5	24,53	1,03
3	29,43	1,17
3,5	34,34	1,28
4	39,24	1,42
4,5	44,15	1,56
5	49,05	1,71

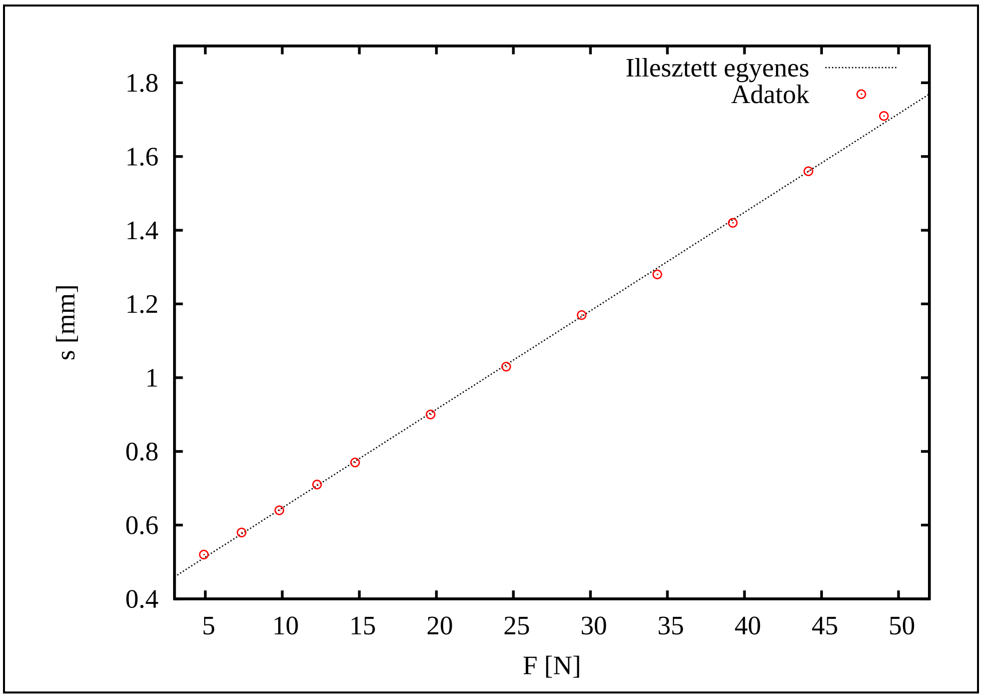
4. táblázat. *Az **S9** jelű rúd tömeg-erő-lehajlás értékei*

Az ezen pontokra illesztett egyenesek paraméterei:

$$m_{\text{rúd}} = 0,0267 \pm 0,0002\frac{\text{mm}}{\text{N}}$$

$$b_{\text{rúd}} = 0,379 \pm 0,005\text{mm}$$

Az egyenesek a (2). ábrán láthatók.



2. ábra. *A rúd adataira illesztett egyenes, és a mért adatok*

Ezekből már számolható a Young-modulusz:

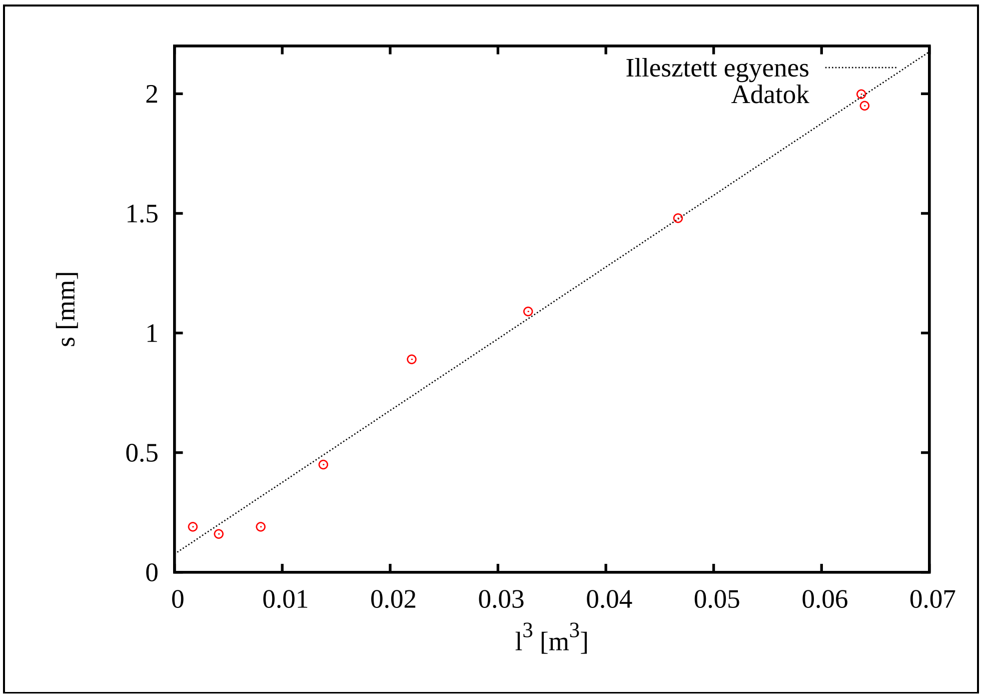
$$E_{\text{rúd}} = \frac{1}{48}\frac{l^3}{I_{\text{rúd}} m_{\text{rúd}}} = (72,3 \pm 1,4)\,\text{GPa}$$

4.1.3. A lehajlás és az alátámasztás közti összefüggés

Ezt követően vizsgáltam a lehajlás (s) és az alátámastás helye (l) közötti összefüggést. A mérést az **A3**-as hasábbal végeztem. Azért ezt választottam, és nem a rudat, mert a rúd elfordulásából származó hibát így kiküszöbölhetem.
Minden hossznál két tömeggel végeztem el a mérést. A feladat az volt, hogy kimutassam, hogy s l köbével lesz arányos, azaz $s(l^3)$ (Itt $s = s_2 - s_1$, azaz a két lehajlás különbsége).
A két tömegem $m_1 = 1$kg és $m_2 = 6$kg voltak.
Az adatokat a (5). táblázat, az illesztett egyenest a (3). grafikon tartalmazza.

$l/2$ [m]	l^3 [m^3]	s_1 [mm]	s_2 [mm]	s [mm]
0,12	0,0017	0,26	0,45	0,19
0,16	0,0041	0,28	0,44	0,16
0,20	0,0080	0,42	0,61	0,19
0,24	0,0138	0,32	0,77	0,45
0,28	0,0220	0,32	1,21	0,89
0,32	0,0328	0,44	1,53	1,09
0,36	0,0467	0,53	2,01	1,48
0,40	0,0640	0,51	2,46	1,95

5. táblázat. *Az **A3** jelű hasáb mért értékei*



3. ábra. *A rúd adataira illesztett egyenes, és a mért adatok*

$$m = 29,94 \pm 1,5 \frac{\text{mm}}{\text{m}^3}$$

$$E = \frac{1}{48}\frac{F}{Im} = 70,2 \pm 4,1\text{GPa}$$

Jól láthatóan itt a hiba nagyobb, mint az előző mérésnél, ám az értékek jó közelítéssel egyeznek.

4.2. Torziómodulusz mérése

A következő feladatom a torziós inga torziómoduluszának kimérése volt. Az inga periódusidejét vizsgáltam különböző tárcsahelyzetek, azaz tehetetlenségi nyomatékok esetén.
A tárcsák geometriai- és tömegadatait a (6). táblázat tartalmazza.

Szám	m [g]	d [cm]	R [cm]
7	196,8395	4,505	2,25
8	196,2783	4,5	2,25

6. táblázat. *A tárcsák adatai*

A tárcsák tehetetlenségi nyomatékai:

$$\Theta_7 = \left(4,892 \pm 0,2210^{-5}\right) \text{kgm}^2$$

$$\Theta_8 = \left(4,968 \pm 0,2210^{-5}\right) \text{kgm}^2$$

Ahol a hiba:

$$\Delta\Theta_i = \Theta_i \left(\frac{\Delta m_i}{m_i} + 2\frac{\Delta R_i}{R_i}\right)$$

A torziós szál $l = 59,7 \pm 0,1$cm hosszú, és $d = 0,51 \pm 0,01$mm átmérőjű, azaz a sugara $r = 0,255 \pm 0,005$mm. Innen számolható a K:

$$K = \frac{8\pi l}{r^4} = 3,55 \cdot 10^{15} \pm 0,28 \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{m}^3}$$

Itt K hibáját a következő módon számoltam:

$$\Delta K = K \left(\frac{\Delta l}{l} + 4\frac{\Delta r}{r}\right)$$

A periódusidőket a (7). táblázat mutatja. A hibamérés a (8). táblázatban található.

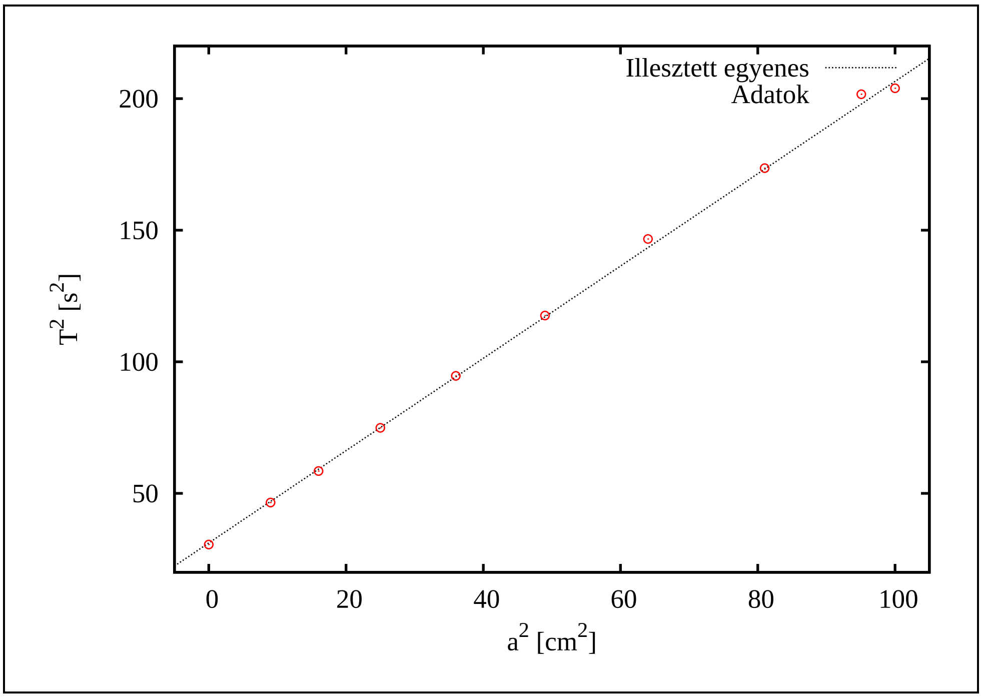
a [cm]	a^2 [cm^2]	$10T$ [s]	T [s]	T^2 [s^2]
0	0	55,257	5,526	30,5334
3	9	68,189	6,819	46,4974
4	16	76,461	7,646	58,4628
5	25	86,552	8,655	74,9125
6	36	97,290	9,729	94,6534
7	49	108,440	10,844	117,5923
8	64	121,105	12,111	146,6642
9	81	131,751	13,175	173,5833
10	100	142,814	14,281	203,9584

7. táblázat. *A mért periódusidők*

T_1	86,552
T_2	86,768
T_3	86,753
$\overline{10T}$	86,691
$\Delta 10T$	0,14
ΔT	0,014

8. táblázat. *A mért 5. periódusidő - hibaszámítás*

A mért, és megfelelő hatványra hozott adatpontokra egyenest illesztettem, ennek grafikonja a (4).



4. ábra. *A toziós inga $T^2(a^2)$ grafikonja*

Az egyenes paraméterei:

$$m = 1,75 \pm 0,02\ \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{cm}^2}$$

$$b = 31,2 \pm 0,9\ \mathrm{s}^2$$

Ebből már számolhatjuk a torziómoduluszt:

$$G = K\frac{M_7 + M_8}{m} = 79,5 \pm 7\ \mathrm{GPa}$$

A tengelymetszet segítségével számolható az üres inga tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta_{\text{üres}} = (M_7 + M_8)\frac{b}{m} - \Theta_7 - \Theta_8 = 6 \cdot 10^{-4} \pm 4,3 \cdot 10^{-6}\ \text{kgm}^2$$

ahol:

$$\Delta G = G\left(\frac{\Delta K}{K} + \frac{\Delta M_7 + \Delta M_8}{M_7 + M_8} + \frac{\Delta m}{m}\right)$$

Hivatkozások

[1] Böhönyey - Havancsák - Huhn: Mérések a klasszikus fizika laboratóriumban, Szerkesztette: Havancsák Károly, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2003.