KLASSZIKUS FIZIKA LABORATÓRIUM

3. MÉRÉS

Hangfrekvenciás mechanikai rezgések vizsgálata

Mérést végezte:
Enyingi Vera Atala
ENVSAAT.ELTE

Mérés időpontja:
2011. november 23.
Szerda délelőtti csoport

1. A mérés rövid leírása

A mérés során két, különböző anyagú, téglatest alakú rúd transzverzális rezgési tulajdonságait vizsgáltam. Mérésem során a **B** jelű alumínium rúdnak mértem ki a sajátfrekvenciáit, illetve ezek frekvenciájának felénél vizsgáltam a rezgést. Ennél a mintánál vettem fel az alapfekvenciához tartozó rezonanciagörbét. Ezen adatokból meghatároztam a rúd Young-modulusát.
A második részben a frekvencia hosszfüggését vizsgáltam a **14**-es réz mintánál.
Ezzel a módszerrel az anyagok rugalmas tulajdonságait sokkal kevesebb külső hatás mellett, maradandó deformáció nélkül vizsgálhatjuk.

2. A mérés eszközei

- Minták:
  1. **B** jelű alumínium
  2. **14**-es számú réz
- Függvénygenerátor
- Voltméter
- Oszcilloszkóp
- Detektor
- Multiméter
- Elektromágnes a gerjesztéshez
- Csavarmikrométer, tolómérő
- Digitális mérleg

3. A mérés elmélete

A mérés során a rúdban kialakuló transzverzális rezgéseket vizsgáljuk. A rúd egy rezgése diszkrét sajátmódusok szuperpozíciójaként állítható elő, de a gerjesztés megválasztható úgy, hogy az egyes sajátmódusok külön is gerjesztődjenek.
A mérés során az i = 0 alapmódus és az első néhány felharmonikust mérjük. A gerjesztő generátor feszültsége szinuszos, ezért a minta minden pontja csillapított kényszerrezgést végez. ω_{i0} az i-edik módus sajátkörfrekvenciája, amely az alábbi formulával számolható:

$$\omega_{i0} = \frac{k_i^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{p\rho}} \tag{1}$$

Ebben E a rúd hosszirányú Young-modulusa, ρ a minta sűrűsége, l a rúd hossza, k_i az i-edik módushoz tartozó állandó (melynek értéke megtalálható [1] jegyzetben), q a keresztmeszete, I pedig a másodrendű hajlítási nyomatéka:

$$I = \int\int_q z^2 \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y$$

A mérésben csak téglalap keresztmetszet szerepel, erre:

$$I = \frac{ab^3}{12} \tag{2}$$

ahol a az alap, b pedig a magasság.
A sajátkörfrekvencia összefüggéséből következik, hogy egy minta i-edik módusának sajátfrekvenciája úgy aránylik az alapharmonikushoz, mint az i-edik k állandó, és ak_0, azaz alapharmonikushoz tartozó k.

$$\frac{\nu_{0i}}{\nu_{00}} = \left(\frac{k_1}{k_0}\right)^2 \tag{3}$$

A fémből készült rudat időben $\omega_{\text{gerjesztő}}$ frekvenciájú szinuszos jelű elektromágnessel gerjesztjük, amelynek következtében rá erő hat.

$$F(t) \sim \alpha \cos(\omega_{\text{gerjesztő}} t) + \beta \sin(2\omega_g t)$$

Az első tag az örvényáramok és a gerjesztő elektromágnes alatt található állandó mágnes kölcsönhatásából adódik és ω_g frekvenciájú erőt gyakorol a mintára. A második tag az örvényáramok és a változó mágneses tér közötti kölcsönhatásból származik és $2\omega_g$ frekvenciájú. Tehát minden sajátmódus kétféle frekvenciával gerjeszthető, az egyik az $\omega_g = \omega_{0i}$ egyenletnek tesz eleget, a másik pedig ennek a fele.
Az amplitúdót mérve a gerjesztőfrekvencia függvényében megkapjuk a rezonanciagörbét. A görbe $\Delta\nu$ félértékszélessége kifejezhető a κ csillapítási tényezővel:

$$\Delta\nu = \frac{\kappa}{\pi} \tag{4}$$

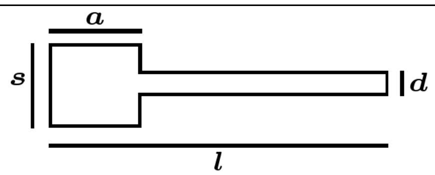
4. A mérés - B jelű alumínium rúd

4.1. Sajátfrekvenciák kimérése

A mintát a mintatartóba helyeztem, majd a szabad végéhez igazítottam a gerjesztő mágnest. A mérőeszközök bekapcsolása után a piezo-kristályos érzékelőt a minta végétől $1-1,5$ cm-re helyeztem el. A mágneses rendszert szinuszos jelre kötjük, amit egy függvénygenerátor szolgáltat. Ennek hatására a rúd rezgésbe jön, ami a "pick-up"-on mérhető feszültségként jelentkezik, a rezgés amplitúdójával arányosan. A rezonanziafrekvencián ez a feszültség jelentősen megnő, lokálisan maximuma lesz.
A minta mérése során elsőként a geometriai adatokat, illetve a tömeget mértem meg. A **B** minta végén található vastagabb rész miatt a pontos adatok méréséhez paramétereket vezettem be, ezek az ábrán láthatók. A hibák az átlagtól vett legnagyobb eltérések. Ezekből számoltam a minta térfogatát és sűrűségét, valamint lehajlási nyomatékát. Mindezen adatokat az (1). táblázatban rögzítettem.
A hibákat relatív hibaszámítási módszerrel számoltam.

A mintára mért rezonanciafrekvenciákat a (2). táblázat tartalmazza.
A Young modulusra felírhatjuk az alábbi összefüggést:

$$E = 4\pi^2 \nu_{0i}^2 \frac{l^4 \varrho q}{k_i^4 I}$$



A minta oldalnézeti képe

A minta geometriai adatai [mm]		
A minta teljes hossza	l	$100,005 \pm 0,005$
A vastagabb rész hossza	a	$20,005 \pm 0,005$
A minta teljes szélessége	b	$15,015 \pm 0,005$
A rezgő rész vastagsága	d	$2,02 \pm 0,03$
A vastagabb rész vastagsága	s	$9,96 \pm 0,06$
A minta egyéb adatai		
A minta tömege	m	$14,6522 \pm 0,0001$ g
A minta teljes térfogata	V	$(5,41 \pm 0,05) \cdot 10^{-6}$ m^3
A minta sűrűsége	ρ	$2706 \pm 26 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$
Hajlítási nyomaték	I	$10,3 \pm 0,5$ mm^4

1. táblázat. A **B** minta

i	ν_{elm} [Hz]	$\nu_{\text{mért}}$ [Hz]	$\nu_{\text{fél elm}}$ [Hz]	$\nu_{\text{fél mért}}$ [Hz]	Eltérés (%
0		256,57	128,285	127,95	
1	1607,9	1610,9	803,95	803,63	0,19
2	4502,2	4518,7	2251,1	2259,33	0,37
3	8822,4	8857,3	4411,2	4425,5	0,40

2. táblázat. A **B** minta rezonancia frekvenciái

Ahol ω_{i0} a rezgés körfrekvenciája, E a keresett Young-modulus, I a test hajlítási nyomatéka, ϱ a sűrűsége, $l = 7.98$ cm a rezgő rész hossza, $q = ab$ pedig a keresztmetszete.
A módusokhoz külön számolt Young-moduluszokat a (3). táblázat tartalmazza.

i	E_i (GPa)
0	$68,78$
1	$49,34$
2	$69,29$
3	$69,33$
$\overline{E}$	$69,11$

3. táblázat. A **B** minta Young-moduluszai

Ahol a hibát a következő módon számolhatjuk:

$$\left|\frac{\Delta E}{E}\right| = 2\left|\frac{\Delta \nu}{\nu}\right| + 4\left|\frac{\Delta l}{l}\right| + 2\left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta \varrho}{\varrho}\right|$$

Ebből $\Delta\nu = 0.339$ Hz.
Innen a rúd Young-modulusa:

$$\overline{E} = 69,11 \pm 2,7 \text{ GPa.}$$

4.2. A rezonanciagörbe az alapharmonikusra

Az általam mért pontokat a (4). táblázat tartalmazza.

ν (Hz)	A (mV)	ν (Hz)	A (mV)	ν (Hz)	A (mV)
254,64	9	255,72	49	256,01	71
255,06	13	255,79	60	256,04	66
255,19	15	255,86	72	256,11	54
255,32	19	255,89	74	256,34	30
255,44	24	255,92	78	256,50	22
255,53	29	255,97	76	256,70	16
255,64	38	255,99	74	257,17	10

4. táblázat. A **B** minta rezonancia-görbéjének mért pontjai

Ezekre illesztettem a görbét, melynek egyenlete:

$$A_i(\omega) = \frac{A_{i0}}{\sqrt{(\omega_{i0}^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa_i^2\omega^2}}$$

A görbe paraméterei:

$$\omega = 255,935 \pm 0,004 \text{ Hz}$$

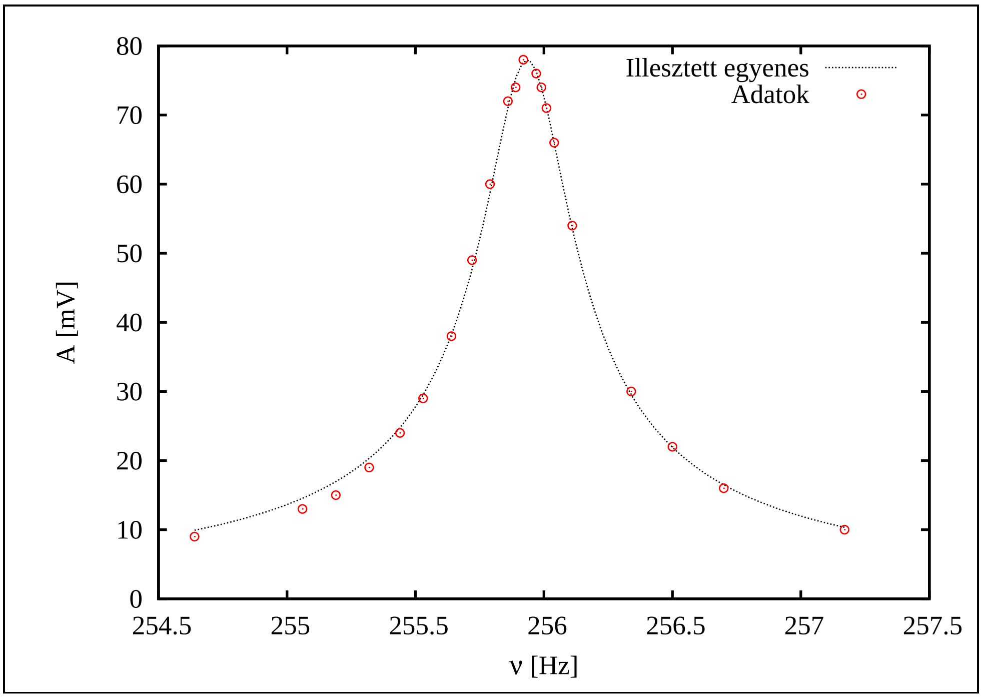
$$\Delta\omega = 0,347 \pm 0,009 \text{ Hz}$$

A jósági tényezőt ez alapján számoltam:

$$Q = \frac{\omega}{\Delta\omega} = 737,56$$

A csillapítási tényező pedig:

$$\kappa = \pi\Delta\nu = 1,09 \pm 0,04 \text{ Hz}$$



1. ábra. *A rezonanciagörbe*

5. A mérés - 14-es jelű réz rúd

A minta mérése során első lépésként ismét a geometriai- illetve tömegadatokat vizsgáltam, melyeket a (5). táblázat tartalmaz.

A minta geometriai adatai [mm]		
A minta hossza	l	$100,075 \pm 0,025$
A minta vastagsága	d	$3,033 \pm 0,028$
A minta szélessége	b	$14,99 \pm 0,13$
A minta egyéb adatai		
A minta tömege	m	$14,6522 \pm 0,0001$ g
A minta teljes térfogata	V	$(4,55 \pm 0,08) \cdot 10^{-6}$ m^3
A minta sűrűsége	ρ	$8820 \pm 41 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$
Hajlítási nyomaték	I	$34,8 \pm 1,3$ mm^4

5. táblázat. A **14**-es minta

Ennél a mintánál a rezonancia hosszfüggését kellett vizsgálni. A rezonanciát 8 és 4 cm között, 1 cm-enként vizsgáltam. Ennek mérési adatait a (6). táblázat tartalmazza.

$l(\ \mathrm{cm})$	ν (Hz)	$\frac{1}{l^2}(\frac{1}{\mathrm{m}^2})$
8	249,80	156,25
7	328,60	204,08
6	415,53	277,78
5	599,26	400,00
4	915,90	625,00

6. táblázat. A **14**-es minta rezonancia frekvenciája a hossz függvényében

Az alapharmonikus frekvenciájára vonatkozó összefüggés:

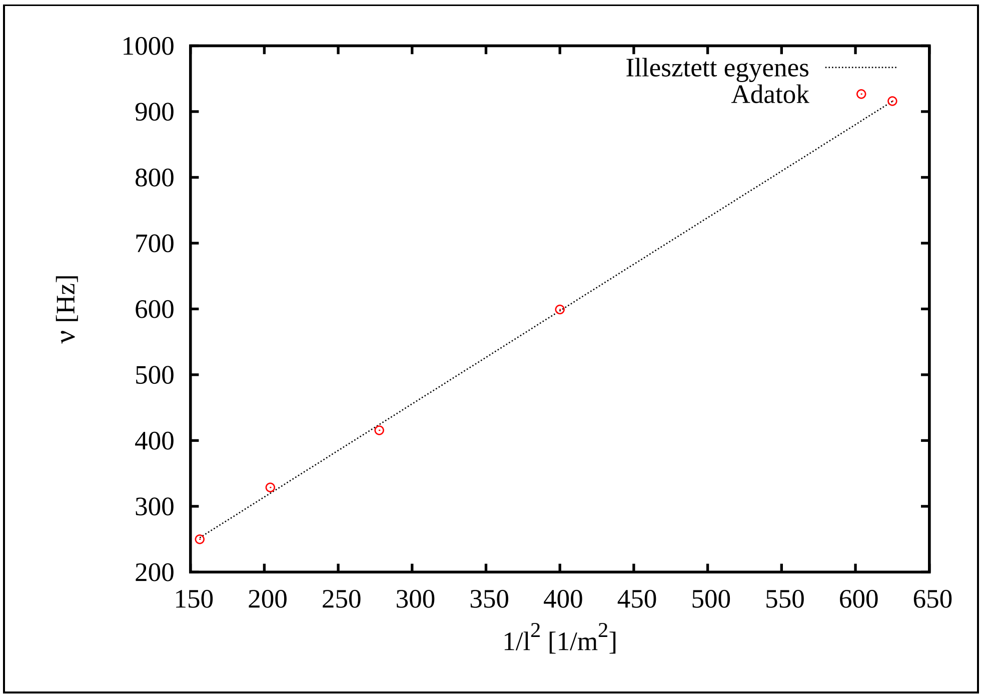
$$\nu_{00} = \frac{1}{l^2}\frac{k_0^2}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{\varrho q}}$$

Ebből látszik, hogy az alábbi arány fennáll:

$$\nu_{00} \sim \frac{1}{l^2}$$

Tehát a mért adatokra illesztett egyenes meredeksége alapján számolhatjuk a Young-modulust:

$$E_{\mathrm{Cu}} = \frac{4\pi^2}{k_0^4}\frac{\varrho_{\mathrm{Cu}}ab}{I_{\mathrm{Cu}}}m^2.$$



2. ábra. *A rezonanciagörbe*

Az illesztett egyenes meredeksége:

$$m = 1,415 \pm 0,019 \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$$

A Young-modulus tehát:

$$E_{14} = 82,39 \pm 5,9 \text{ GPa}$$

A hibát az alábbi képlettel számoltam:

$$\left| \frac{\Delta E}{E} \right| = 2 \left| \frac{\Delta m}{m} \right| + \left| \frac{\Delta \varrho}{\varrho} \right| + 2 \left| \frac{\Delta a}{a} \right|$$

Hivatkozások

[1] Böhönyey - Havancsák - Huhn: Mérések a klasszikus fizika laboratóriumban, Szerkesztette: Havancsák Károly, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2003.