Hogyan készítsünk jegyzőkönyvet?

Az alábbiakban egy példamérést, a hozzá tartozó kiértékelést és grafikus módszerrel történő hibaszámítást, valamint a mérésről készült jegyzőkönyv vázlatát szeretnénk bemutatni. A jegyzőkönyvben dőlt betűvel jelöltük a megjegyzéseket.

1. Mérési példafeladat – A matematikai inga vizsgálata

Matematikai inga esetén a T lengésidő és az inga l hossza között kis kitérések esetén a következő összefüggés áll fenn:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{1}$$

ahol g a nehézségi gyorsulás.
Feladatunk ezen összefüggés kísérleti ellenőrzése, valamint a nehézségi gyorsulás meghatározása.

Rögzítsük a mérőállványra a fonálra akasztott fémgolyót. (A fémgolyó egy kis horoggal akasztható a fonálra.) Mérjük meg stopperral a fonalinga lengésidejét különböző fonálhosszak esetén. g értékét grafikus úton kaphatjuk meg, ennek érdekében célszerű az (1) egyenletet a következő alakra átrendezni:

$$l = \frac{g}{4\pi^2}T^2. \tag{2}$$

Ekkor az $y_i = l_i$ értékek az $x_i = T_i^2$ függvényében egyenest adnak, melynek meredeksége $\frac{g}{4\pi^2}$. Ebből g már meghatározható.

MÉRÉSI FELADATOK

1. Mérjük meg a 15, 30, 60, 100 és 135 cm hosszú fonálinga lengésidejét. Mindegyik mérést legalább háromszor végezzük el.
2. Ábrázoljuk az (l_i, T_i^2) pontpárokat. Vegyük figyelembe, hogy az $l_i = 0$, $T_i = 0$ is mérési pont.
3. Illesszünk egyenest az (l_i, T_i^2) pontpárokra és számítsuk ki a nehézségi gyorsulás értékét.
4. Határozzuk meg grafikus módszerrel a nehézségi gyorsulás hibáját (inkább: a számítási hibát).

2. Órán mért adatok

A feladat azt kéri, hogy a lengésidőket legalább háromszor mérjük le. Mivel egy lengésidő 1-2 s, a nagy (a lengésidővel összemérhető) reakcióidő miatt célszerű legalább 10 lengésidőt egyszerre lemérni.

$l(cm)$	$10 \cdot T(s)$
15	9,2
30	11,4
60	16,7
100	21,1
135	23,0

3. Kiértékelés

A kiértékeléshez ki kell számítanunk a T_i és T_i^2 értékeket. A grafikus hibaszámításhoz további két oszlopot fogunk használni, az üres cellákat célszerű már most elkészíteni. Kitöltésükhöz szükség van az egyenes-illesztés során nyert paraméterekre. Az órán mért adatoknál még tetszőleges mértékegységet használhattunk, a kiértékeléskor készített táblázatban azonban már mindent SI mértékegységben kell megadni. A használt mértékegységet fel kell tüntetni a táblázatban. Ezt kétféleképpen tehetjük meg. Az egyszerűbb az, ha fejlécet készítünk és ebbe írjuk be a mért mennyiség jelét és mértékegységét. (Mi ezt a módszert követjük.) A másik lehetőség az, ha minden mennyiség után közvetlenül odaírjuk a mértékegységét is.
A táblázatba ne felejtsük el beírni az $l_i = 0$, $T_i = 0$ mérési pontot is!

$l(m)$	$10 \cdot T(s)$	$T(s)$	$T^2(s^2)$	$l_{ill.}(m)$	$l - l_{ill.}(m)$
0	0	0	0		
0,15	9,2	0,92	0,8464		
0,3	11,4	1,14	1,2996		
0,6	16,7	1,67	2,7889		
1,0	21,1	2,11	4,4521		
1,35	23,0	2,3	5,29		

Illesztés

A következő lépés a táblázatban található adatokra történő illesztés. Példánkban a `http://metal.elte.hu/fiz_lab` címen megtalálható *GNUPLOT* nevű programot ismertetjük. A jegyzőkönyv készítésekor természetesen más illesztőprogram is használható.

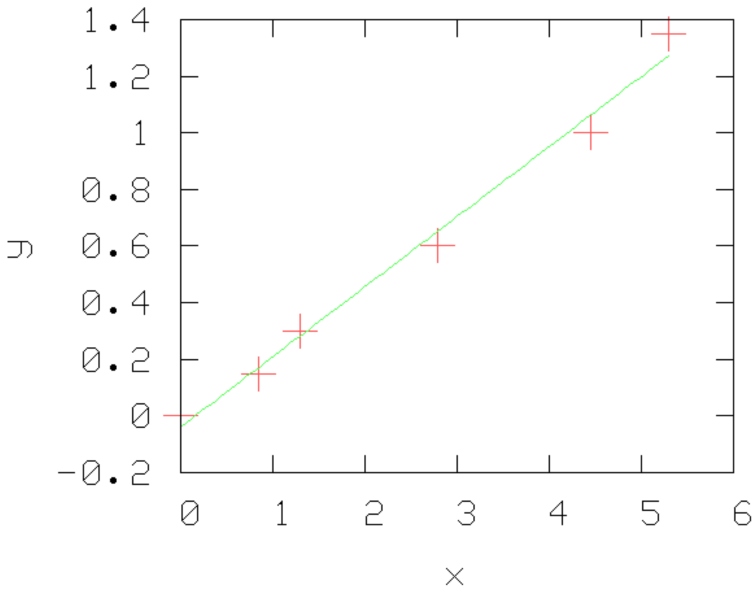
A programba írjuk be *tizedesponttal* az első oszlopba az x, a második oszlopba az y értékeket. Jelen esetben az

$$l = \frac{g}{4\pi^2} T^2.$$

egyenletet használjuk, így az x értékek a táblázatban kiszámolt T_i^2 értékek, míg az y-ok az ezekhez tartozó l_i értékek. Az adatok beírása után kattintsunk az *Illesztés megkezdése* gombra. A program által kiírt paraméterekből nekünk csak az alábbi részletre lesz szükség:

```
Final set of parameters            Asymptotic Standard Error
=======================            ==========================

a               = -0.038812       +/- 0.04075       (105%)
b               = 0.247521        +/- 0.01311       (5.296%)
```



A *GNUPLOT* program $a + b \cdot x$ alakban illeszti az egyenest, ez azt jelenti, hogy az illesztett egyenes egyenlete jelen esetben

$$y = 0,247521x - 0,038812.$$

A jegyzőkönyvbe írjuk fel az illesztett egyenes egyenletét, valamint azt is, hogy milyen programmal illesztettünk. (Különböző programokkal a numerikus hibáknak köszönhetően különböző illesztett egyenesekhez juthatunk, bár az eltérés többnyire nem jelentős.)

Ellenőrizzük, hogy a kapott illesztett egyenes megfelel-e várakozásainknak és számítsuk ki a nehézségi gyorsulás értékét. A (2) egyenlet $y = b \cdot x$ alakú, ahol $y = l$, $x = T^2$ és $b = \frac{g}{4\pi^2}$. Így az illesztett egyenestől azt várjuk, hogy a tengelymetszete, azaz a körülbelül nulla legyen. A kapott b értékből számíthatjuk ki g-t: $g = b4\pi^2$. Így jelen esetben $g = 9,76\frac{m}{s^2}$ adódik. Mivel mindent SI-ben számoltunk, így g értékét is SI-ben kapjuk meg.

Fontos, hogy g-t nem számolhatjuk ki a táblázatban soronként a $g = 4\pi^2\frac{l}{T^2}$ képlet segítségével. Ekkor ugyanis még nem igazoltuk, hogy az (1) összefüggés teljesül, így természetesen g kiszámítására sem használhatjuk azt.

Mit ronthattunk el, ha a várttól nagyon különböző értéket kaptunk? Ha $g \approx 10\frac{m}{s^2}$-től nagyon eltér a nehézségi gyorsulás értéke, érdemes ellenőrizni a következőket. SI-ben számoltunk-e mindent? Illesztésnél az x értékekhez a T^2 értékeit írtuk-e? (x és y értékeit felcserélve az eredmény nagyon más lesz!) Nem írtunk-e el valamit az illesztésnél? (Például nem írtunk-e akár csak egyetlenegy értéknél tizedespont helyett tizedesvesszőt?) A táblázatban mindent jól számoltunk-e ki?

Ha ezeknél a részeknél minden rendben van, akkor már csak egy dolgot tehetünk: ellenőrizzük, hogy jól mértük-e le az adatokat, illetve megnézzük, hogy a felvett adatok reálisak-e. Ilyenkor feltételezzük, hogy az eredeti (jelen esetben az (1)) összefüggés jó, és kiszámoljuk, hogy $g = 9,81\frac{m}{s}^2$ értékkel számolva milyen időadatot kellett volna mérni. Ha az adatok jók, akkor valószínűleg elszámoltunk valamit. Ha nem, célszerű újramérni, vagy felderíteni, hogy mi okozhatott ekkora eltérést.

Hibaszámítás

A hibaszámításhoz az elméleti tudnivalók a `http://metal.elte.hu/fiz_lab` webcímen megtalálhatók. Itt csak azt mutatjuk meg, hogyan alkalmazhatók egyszerűen az ott leírtak.

A grafikus hibaszámítás során meg kell határozni, hogy a mért értékek mennyire térnek el az illesztett értékektől. Ezért először kiszámoljuk az illesztett értékeket, azaz kiszámoljuk azt, hogy az egyenes az általunk mért $x_i = T_i^2$ pontokban milyen értékeket vesz fel.

$T^2(s^2)$	$l_{ill.}(m)$	$l_{ill.}(m)$
0	$0,247521 \cdot 0 - 0,038812$	$-0,038812$
0,8464	$0,247521 \cdot 0,8464 - 0,038812$	0,17069
1,2996	$0,247521 \cdot 1,2996 - 0,038812$	0,28287
2,7889	$0,247521 \cdot 2,7889 - 0,038812$	0,65150
4,4521	$0,247521 \cdot 4,4521 - 0,038812$	1,06318
5,29	$0,247521 \cdot 5,29 - 0,038812$	1,27057

Következő lépésként ki kell számítani a $\Delta l = l - l_{ill.}$ értékeket. Vigyázzunk, ez előjeles mennyiség. Az eredeti táblázatunk így a következő alakot ölti:

$l(m)$	$10 \cdot T(s)$	$T(s)$	$T^2(s^2)$	$l_{ill.}(m)$	$l - l_{ill.} = \Delta l(m)$
0	0	0	0	-0,038812	0,038812
0,15	9,2	0,92	0,8464	0,17069	-0,02069
0,3	11,4	1,14	1,2996	0,28287	0,01713
0,6	16,7	1,67	2,7889	0,65150	-0,0515
1,0	21,1	2,11	4,4521	1,06318	-0,06318
1,35	23,0	2,3	5,29	1,27057	0,07943

Az b meredekség hibájának meghatározásához a $T^2 - \Delta l$ grafikonon be kell rajzolni az x tengelyre szimmetrikus bennfoglaló téglalapot. E téglalap átlójának a meredeksége adja meg az egyenes meredekségének hibáját. A meredekség a

$$\text{tg}\alpha = \frac{\textit{szöggel szemközti oldal}}{\textit{szög melletti oldal}}$$

képlettel számítható. Esetünkben a szöggel szemközti oldal hossza 0,15886, míg a szög melletti oldal hossza 5,29. A bennfoglaló téglalap átlójának meredeksége így 0,003003. Az illesztett egyenes b meredeksége tehát az alábbi formában írható fel: $b = 0,247521 \pm 0,003003 \frac{m}{s^2}$. Látható, hogy felesleges ennyi tizedesjegyet használni, elég a $b = 0,247 \pm 0,003 \frac{m}{s^2}$ felírás.

Ebből a nehézségi gyorsulás és a hibája a $g = b \cdot 4\pi^2$ képlet alapján $g = 0,247 \cdot 4\pi^2 = 9,76 \frac{m}{s^2}$, míg $\Delta g = 0,003 \cdot 4\pi^2 = 0,12 \frac{m}{s^2}$. Így $g = 9,76 \pm 0,12 \frac{m}{s^2}$ alakban írható.

4. Jegyzőkönyv

A MATEMATIKAI INGA VIZSGÁLATA

Mérést végezte:
Mérőtárs neve[1]:
Mérés időpontja:
Jegyzőkönyv leadásának időpontja:

[1]Ez csak abban az esetben nem szükséges, ha az illetőnek nincs mérőpárja.

A mérés célja

Azt szeretnénk igazolni, hogy matematikai inga esetében igaz a $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ összefüggés, ha az ingát csak kis szögben térítjük ki. Szeretnénk emellett meghatározni a g nehézségi gyorsulás értékét. (A képletben T a lengésidő, l az inga hossza, g pedig a nehézségi gyorsulás.)

A jegyzőkönyvet úgy kell elkészíteni, hogy azok számára is érthető legyen, akik nem ismerik a mérést. Ezért ha képletet írunk a jegyzőkönyvbe, akkor meg kell nevezni, hogy mit jelölnek az egyes betűk. Kérjük, hogy a jegyzőkönyvet saját szavaikkal írják meg, és ne vegyenek át mondatokat, mondatrészeket az interneten is megtalálható segédanyagból.

A mérőeszközök

- Fonálinga golyóval,
- stopperóra,
- mérőszalag.

A mérés rövid leírása

Mérőszalag segítségével beállítjuk a fonalinga hosszát először 15 cm-re, majd felakasztjuk a mérőállványra és (egyben) lemérünk tíz lengésidőt. Ezután változtatjuk az inga hosszát 30, 60, 100, végül 135 cm-re. Minden esetben tíz lengésidőt mérünk.

Csak a lényeges elemeket kell itt megemlíteni, ilyen például, hogy tíz lengésidőt mértünk. Számítógépes méréseknél a mérés rövid leírásába nem tartozik bele, hogy a programot hogyan kell használni, csak az, hogy a program mit mér és hogyan értékeli azt ki.

Mérési adatok

$l(m)$	$10 \cdot T(s)$
0,15	9,2
0,30	11,4
0,60	16,7
1,00	21,1
1,35	23,0

Itt l a fonálinga hossza, és T a fonálinga lengésideje.

Figyeljünk arra, hogy a jegyzőkönyvben már a mérési adatok is csak SI-ben lehetnek! Mivel A mérés célja *fejezetben már definiáluk l-et és T-t, ezért most nem kell feltétlenül újra definiálnunk a táblázatban használt jelöléseket.*

Hibaforrások

1. A fonálinga hosszát csak 2-3 mm pontosan lehetett beállítani.
2. A lengésdő mérésekor a reakcióidő is szerepet játszott, ez becslésem szerint körülbelül 0,2s-ot jelenthetett.

Kiértékelés

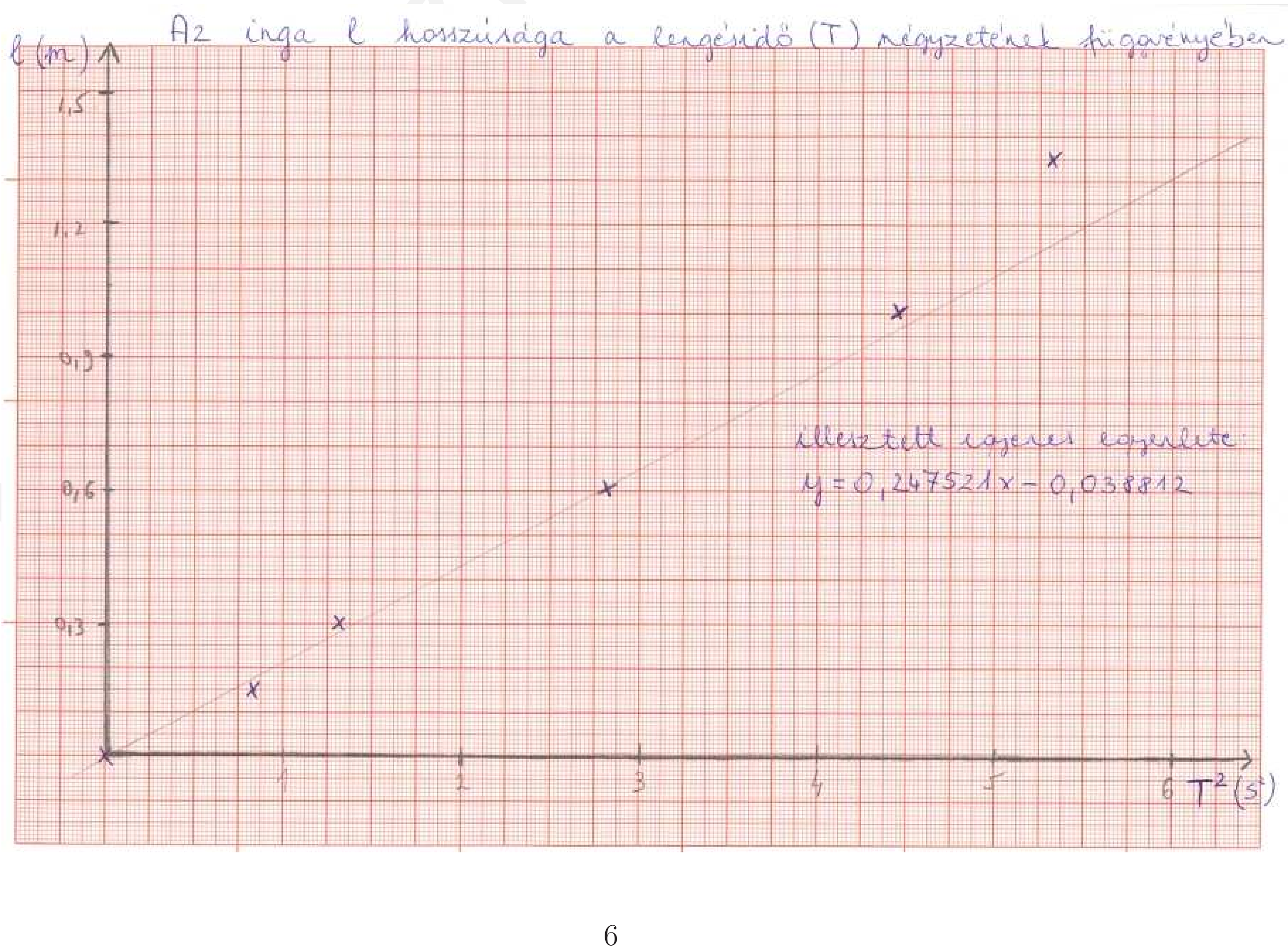
A $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ összefüggés egyszerű algebrai átalakításokkal az $l = \frac{g}{4\pi^2}T^2$ alakra hozható. A táblázatban megtalálható l és T^2 értéke is. Ezekre az adatokra a GNUPLOT program segítségével egyenest illesztettem. Az egyenes egyenlete:

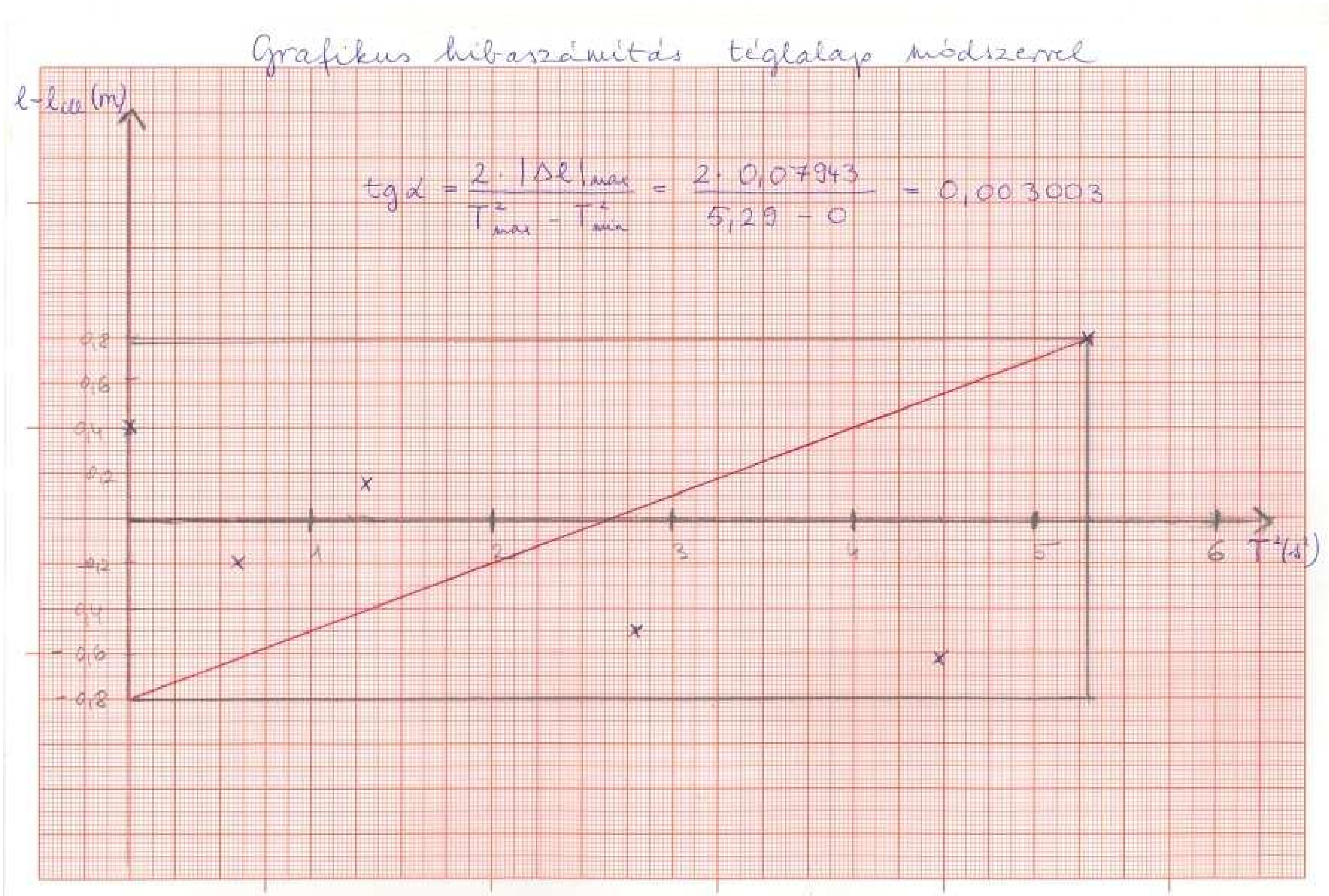
$$y = 0,247521x - 0,038812,$$

ahol $y = l$ és $x = T^2$.
l_{ill} az illesztett egyenes különböző T_i^2 helyeken felvett értéke. A hibaszámításhoz a $l - l_{ill.} = \Delta l$ értékeket is kiszámítottam.

$l(m)$	$10 \cdot T(s)$	$T(s)$	$T^2(s^2)$	$l_{ill.}(m)$	$l - l_{ill.} = \Delta l(m)$
0	0	0	0	-0,038812	0,038812
0,15	9,2	0,92	0,8464	0,17069	-0,02069
0,3	11,4	1,14	1,2996	0,28287	0,01713
0,6	16,7	1,67	2,7889	0,65150	-0,0515
1,0	21,1	2,11	4,4521	1,06318	-0,06318
1,35	23,0	2,3	5,29	1,27057	0,07943

Az (1) grafikon mutatja l-et a T^2 függvényében, míg a (2) grafikonon $l - l_{ill.} = \Delta l(m)$-et ábrázoltuk T^2 függvényében. Ez utóbbi grafikonról leolvasható, hogy az illesztett egyenes meredekségének hibája $\frac{0,15886}{5,29} = 0,003003$. Így a b meredekség az alábbi alakot ölti: $b = 0,247521 \pm 0,003003\frac{m}{s^2}$, azaz $b = 0,247 \pm 0,003\frac{m}{s^2}$. Ebből a $g = 9,76 \pm 0,12\frac{m}{s^2}$ érték adódik.





Az ábrakészítésre vonatkozó tudnivalók a `http://metal.elte.hu/fiz_lab/1234.pdf` *weboldalon találhatók (9. oldal).*

Eredmények/Eredménytáblázat

$g \pm \Delta g(\frac{m}{s^2})$	$g_{irodalmi}(\frac{m}{s^2})$
$9,76 \pm 0,12$	9,81

Diszkusszió

Az $l - T^2$ grafikon pontjaira jól illeszkedik az illesztett egyenes, így azt mondhatjuk, hogy sikerült igazolni a $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ összefüggést. Az illesztett egyenes meredekségéből számolt nehézségi gyorsulás értéke hibán belül megegyezik a Budapesten mérhető nehézségi gyorsulás értékével $(9,81\frac{m}{s^2})$.