

Jegyzőkönyv

Forgómozgás vizsgálata

Mérési adatok:

Mérést végezte: Takács Roxána
Mérőtárs neve: Graning Sára (1. mérőpár)
Mérés időpontja: 2019.03.14.
Jegyzőkönyv leadásának dátuma: 2019.03.21.

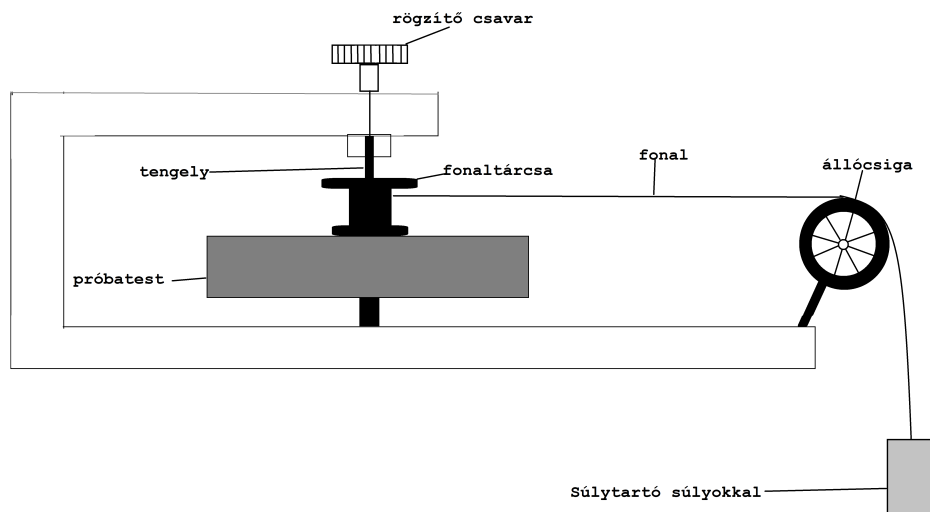
A mérés célja

Két testnek (korong és henger alakú rúd) bizonyos tengelyre (rájuk merőleges tengelyre) vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékának kiszámítása és ellenőrzése az elméleti modell alapján. Ennek segítségével a forgómozgás egyenletének igazolása.

Mérési eszközök

- Állvány
- Korong
- Henger alakú rúd
- Fonaltárcsák
- Csigás mérőeszköz
- a fonál végére akasztható 50 g-os hitelesített súlyok
- Táramérleg
- Tolómérő
- Vonalzó
- Számítógép

Az eszköz összeállítása:



A mérés rövid leírása

Miután a forgástengelyt, és a hozzá tartozó korongot rögzítettük a mérőberendezéshez, feltekertem a kis tárcsára a fonalat. A tekerésnél törekedtem arra, hogy egy rétegben legyen feltekerve. Ezután a fonál végére súlyokat akasztottam, majd elengedtem azokat. Ennek hatására a korong elkezdett gyorsulva forogni. Először 150 g-mal mértem, majd 50 g-onként növeltem a tömeget 350 g-ig. A mérést már a mozgás elindítása után kezdtem, és mielőtt a fonál teljesen letekeredett volna a tárcsáról megállítottam az adatfelvételt. Minden egyes mérés után a kapott pontokra számítógép segítségével egyenest illesztettem, aminek a meredeksége adta meg a test gyorsulását. Minden súlynál háromszor végeztem el ezt a folyamatot, hogy pontosabb eredményeket kapjak. A korong után a méréseket elvégeztem a henger alakú rúdra is. Miután elvégeztem ezeket a méréseket, táramérleggel és súlyokkal állapítottam meg a testek és a fonaltárcsa tömegét. Tolómérőt használva pedig lemértem a fonaltárcsák és a rúd átmérőjét, valamint vonalzóval a korong átmérőjét és a rúd hosszát.

Mért adatok

Referencia fonaltárcsa	
Tömege [g]:	8,5

Korong

Korong adatai	
Fonaltárcsa átmérője [mm]:	7,5
Korong átmérője [cm]:	22,4
Tömege [g]:	923

A fonaltárcsa átmérőjét tolómérővel, a korong átmérőjét fém vonalzóval, a korong tömegét pedig táramérleggel mértem.

Gyorsulás				
Tömeg [g]	a_1 [$\frac{m}{s^2}$]	a_2 [$\frac{m}{s^2}$]	a_3 [$\frac{m}{s^2}$]	átlag [$\frac{m}{s^2}$]
150	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025
200	0,0037	0,0037	0,0037	0,0037
250	0,0048	0,0048	0,0048	0,0048
300	0,0059	0,0059	0,0059	0,0059
350	0,0071	0,0071	0,0071	0,0071

A gyorsulásokat a számítógép által illesztett egyenesek meredeksége adta. A három mérés eredményét átlagoltam, hogy pontosabb eredményt kapjak.

Rúd

Rúd adatai	
Fonaltárcsa átmérője [mm]:	5,5
Rúd átmérője [mm]:	10
Rúd hossza [cm]:	36,1
Tömege [g]:	223,5

A fonaltárcsa átmérőjét és a rúd átmérőjét tolómérővel, a rúd hosszát fém vonalzóval, a rúd tömegét pedig táramérleggel mértem.

Gyorsulás				
Tömeg [g]	a_1 [$\frac{m}{s^2}$]	a_2 [$\frac{m}{s^2}$]	a_3 [$\frac{m}{s^2}$]	átlag [$\frac{m}{s^2}$]
150	0,0038	0,0038	0,0039	0,0038
200	0,0053	0,0059	0,0054	0,0055
250	0,0060	0,0065	0,0067	0,0064
300	0,0079	0,0080	0,0081	0,0080
350	0,0096	0,0095	0,0096	0,0096

A gyorsulásokat a számítógép által illesztett egyenesek meredeksége adta. A három mérés eredményét átlagoltam, hogy pontosabb eredményt kapjak.

Kiértékelés

A rendszer mozgását leíró egyenletek:

$$\Theta\beta = Kr - M_s$$

$$ma = mg - K$$

Ahol Θ a tehetetlenségi nyomatékot, r a fonaltárcsa sugara, m a súly tömege, K a kötélerő β a szöggyorsulás, és M_s a súrlódásból adódó fékezőnyomaték. Az egyenleteket átrendeztem és bevezettem a $x = \beta$ és $y = mr(g - r\beta)$ változókat és a következő formához jutottam:

$$\Theta\beta + M_s = mr(g - r\beta)$$

$$y = \Theta x + M_s$$

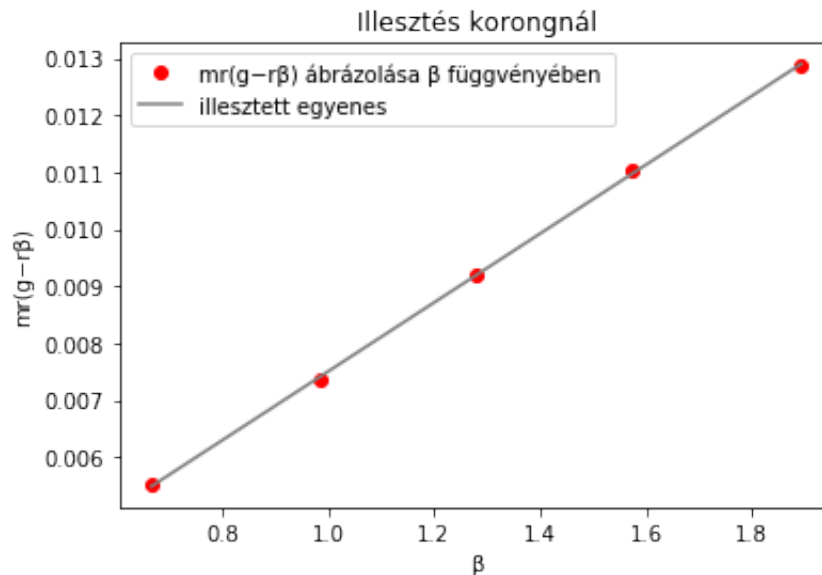
Az x és y között lineáris összefüggés fedezhető fel, ezért ábrázoltam a $y = \Theta x + M_s$ egyenletet. Az ezen pontokra illesztett egyenes meredeksége lett Θ , az y tengelyének a metszete pedig M_s .

Korong

A $\beta = \frac{a}{R}$ összefüggésből (ahol a a szöggyorsulás, R pedig a fonaltárcsa sugara) kiszámoltam a szöggyorsulást, ebből pedig az $y = mr(g - R\beta)$ értékét.

Tömeg [g]	Átlagos gyorsulás [$\frac{m}{s^2}$]	Szöggyorsulás [$\frac{1}{s^2}$]	$y = mr(g - r\beta)$ [$kg \frac{m^2}{s^2}$]
150	0,0025	0,667	0,005516
200	0,0037	0,986	0,007355
250	0,0048	1,280	0,009192
300	0,0059	1,573	0,011030
350	0,0071	1,893	0,012867

Ábrázoltam az $y = mr(g - r\beta)$ értékeket az $x = \beta$ értékek függvényében, és egyenest illesztettem ezekre a pontokra.



Az illesztett egyenes egyenlete:

$$y = 0.00604529x + 0.00145524$$

A kapott egyenes meredeksége a tehetetlenségi nyomaték, és a súrlódási erő az y tengely és az egyenes metszete, tehát leolvastva az egyenletből:

$$\Theta = 0.00604529 \text{ kgm}^2$$

és

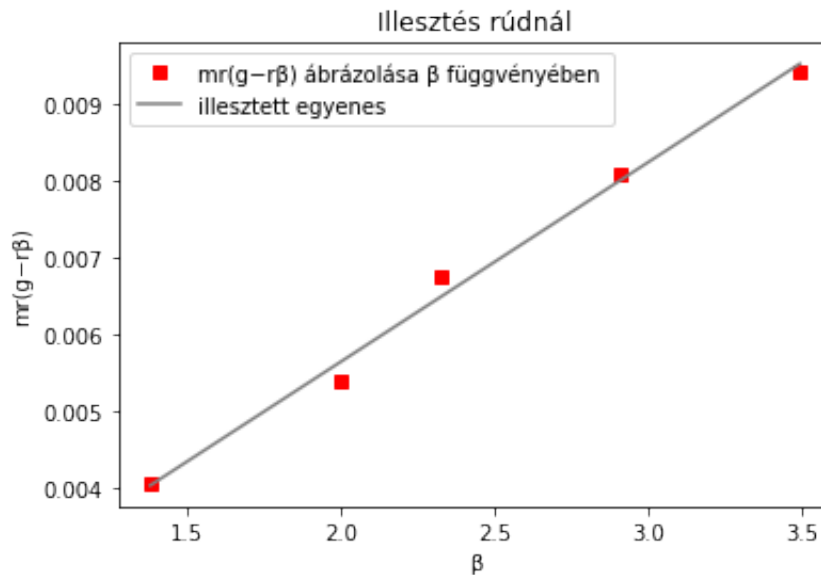
$$M_s = 0.00145524 \text{ Nm}$$

Rúd

A $\beta = \frac{a}{R}$ összefüggésből itt is kiszámoltam a szöggyorsulást, ebből pedig az $y = mr(g - R\beta)$ értékét.

Tömeg [g]	Átlagos gyorsulás [$\frac{m}{s^2}$]	Szöggyorsulás [$\frac{1}{s^2}$]	$y = mr(g - r\beta)$ [$kg \frac{m^2}{s^2}$]
150	0,0038	1,3818	0,004045
200	0,0055	2,0000	0,005392
250	0,0064	2,3272	0,006739
300	0,0080	2,9090	0,008086
350	0,0096	3,4909	0,009432

Ábrázoltam itt is az $y = mr(g - r\beta)$ értékeket az $x = \beta$ értékek függvényében, és a pontokra egyenest illeszttem.



Az illesztett egyenes egyenlete:

$$y = 0.00260694x + 0.00260694$$

A kapott egyenes meredeksége a tehetetlenségi nyomaték, és a súrlódási erő az y tengely és az egyenes metszete, tehát leolvassa az egyenletből:

$$\Theta = 0.00260694 \text{ kgm}^2$$

és

$$M_s = 0.00042537 \text{ Nm}$$

Hibaforrások, Hibaszámítás

Hibaforrások:

- A hiba a rúdnál lényegesen nagyobb, mint a korongnál. Ez azért lehetett, mert a rúd esetében vigyázni kellett, mert nagyon gyorsan lement a fonál és el kellett találni a megfelelő mérési pontokat.
- Emberi hiba, hogy nem biztos, hogy időben indítottam el és állítottam le a stopperórát (reakcióidő)
- A súly kilengése is okozhatott hibát.
- Pontatlan súlymérés

Hibaszámítás:

A mért és az egyenes illesztéssel kapott értékek közti különbségek:

Korong			
x	y	y_{ill}	$ \Delta y $
0,667	0,005516	0,005487	0,000029
0,986	0,007355	0,007415	0,000060
1,280	0,009192	0,009193	0,000001
1,573	0,011030	0,010964	0,000066
1,893	0,012867	0,012898	0,000031

Rúd			
x	y	y_{ill}	$ \Delta y $
1,3818	0,004045	0,004027	0,000018
2,0000	0,005392	0,005639	0,000247
2,3272	0,006739	0,0064922	0,000246
2,9090	0,008086	0,008008	0,000078
3,4909	0,009432	0,009525	0,000093

A hibaszámítást téglalap módszerrel végeztem. A kiszámolt y értékekből, kivontam az illesztett y értékeket. Ezt jelöltem Δy -al (a kapott értékeket beírtam a táblázatba). Ezek közül kiválasztottam a legnagyobb eltérést es megszoroztam 2-vel. Ez lett a "téglalap" magassága. Ezután az utoljára mért pont x koordinátájából kivontam az első mért pont x koordinátáját. E lett a "téglalap" hossza. A kapott magasságot elosztottam a kapott szélességgel. Ezzel megkaptam a meredekség hibáját.

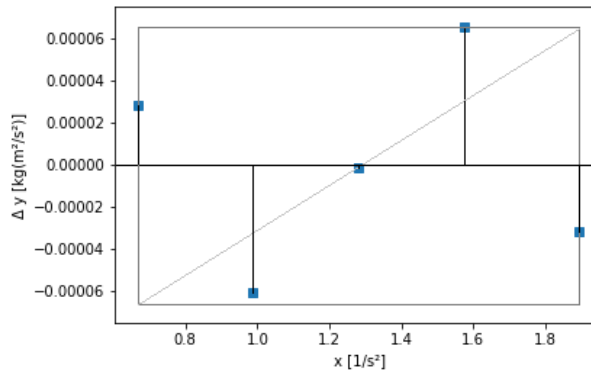
Korong

A kapott legnagyobb Δy értéke: $0,000066 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$

Az utoljára mért pont x koordinátájából kivonva az első mért pont x koordinátáját: $1,226 \frac{1}{\text{s}^2}$

Ebből a hiba:

$$\frac{2 \cdot M_{\text{teglalap}}}{S_{\text{teglalap}}} = \frac{2 \cdot 0,000066 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{1,226 \frac{1}{\text{s}^2}} = 0,0001076672 \text{ kgm}^2$$



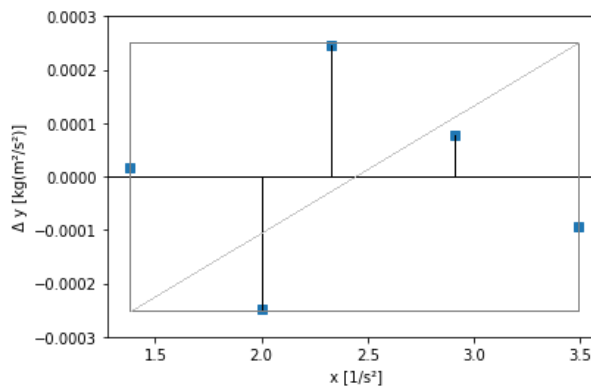
Rúd

A kapott legnagyobb Δy értéke: $0,000247 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$

Az utoljára mért pont x koordinátájából kivonva az első mért pont x koordinátáját: $2,1091 \frac{1}{\text{s}^2}$

Ebből a hiba:

$$\frac{2 \cdot M_{teglalap}}{S_{zteglalap}} = \frac{2 \cdot 0,000247 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2,1091 \frac{1}{\text{s}^2}} = 0,0002342231 \text{ kgm}^2$$



A pontos meredekségek és értékek figyelembe véve a hibát:

$$\Theta_{korong} = 0,00604529 \pm 0,0001076672 \text{ kgm}^2$$

$$\Theta_{rud} = 0,00260694 \pm 0,0002342231 \text{ kgm}^2$$

Kiszámolhatjuk a relatív hibákat is:

$$\frac{\Delta \Theta_{korong}}{\Theta_{korong}} = \frac{0,0001076672}{0,00604529} = 0,0178 = 1,78\%$$

$$\frac{\Delta \Theta_{rud}}{\Theta_{rud}} = \frac{0,0002342231}{0,00260694} = 0,0898 = 8,98\%$$

Számított értékek

A korong tehetetlenségi nyomatékának számolása:

$$\Theta_{korong} = \frac{1}{2} m R^2 = \frac{1}{2} 0,923 \text{ kg} \cdot 0,112^2 \text{ m}^2 = 0,005789 \text{ kgm}^2$$

A rúd tehetetlenségi nyomatékának számolása:

$$\Theta_{rud} = \frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{12} m L^2 = \frac{1}{4} 0,2235 \text{ kg} \cdot 0,005^2 \text{ m}^2 + \frac{1}{12} 0,2235 \text{ kg} \cdot 0,361^2 \text{ m}^2 = 0,002428 \text{ kgm}^2$$

A tömegmérés bizonytalanságát a leírás szerint a tengely és a fonaltárcsa együttes tömegével kell azonosnak venni.

fonaltárcsa tömege:

$$m_{tarcsa} = 0,0085 \text{ kg}$$

Itt is kiszámolhatjuk a relatív hibákat:

Korong:

$$\Delta\Theta = \frac{\Delta m}{m}\Theta = \frac{0,0085}{0,923}0,005789 \text{ kgm}^2 = 0,000053311 \text{ kgm}^2$$

Rúd:

$$\Delta\Theta = \frac{\Delta m}{m}\Theta = \frac{0,0085}{0,2235}0,002428 \text{ kgm}^2 = 0,00009234 \text{ kgm}^2$$

Eredmények összehasonlítás

A mért és a számolt tehetetlenségi nyomaték hányadosa korongnál:

$$\frac{0,00604529}{0,005789} = 1,044$$

azaz az eltérés itt mindössze 4% a két érték között.

Ugyanezt kiszámolva rúdnál:

$$\frac{0,00260694}{0,002428} = 1,0736$$

azaz itt a két érték eltérése (7 %) kicsivel több, mint a korong esetében.

Diszkusszió

A mérés során igazoltam a lineáris összefüggést a szöggyorsulás és a forgatónyomatékok között, így igazoltam a forgómozgás egyenletét is. Továbbá meghatároztam a mérési eredményekből a minták tehetetlenségi nyomatékait, majd ezt számolással is ellenőriztem, és a mérési hibákon belül elfogadható eredményeket kaptam.

(Megjegyzés: Az illesztésekhez a számításokat a Python 3 `scipy.optimize` moduljának `curve_fit` függvényével végeztem, és az ábrákat a Python 3 `matplotlib` moduljával készítettem.)