Hooke Törvény Vizsgálata

Mérést végezte: Varga Bonbien
Mérőtárs neve: Megyeri Balázs
Mérés időpontja: 2008.04.22
Jegyzőkönyv Leadásának időpontja: 2008.04.29

A Mérés célja:

Hooke törvényének igazolása, két különböző rugóra, továbba a rugókra jellemző direkciós állandók meghatározása.

A Mérőeszközök:

- Állvány melyen plexi lapok vannak rögzítve
- Két különböző rugó
- Fémvonalzó
- digitális Stopper

A Mérés rövid leírása:

Kétféleképpen kellett megmérni a rugóállandót.
Először egy sztatikus módszerrel. Az állvány olyan volt, hogy a tetején egy vízszintes rúd volt elhelyezve amire tudtuk akasztani a rugókat, és az állvány oldalain, két párhuzamos plexi lap volt rögzítve. Az első módszernél, a rugókat először csak felakasztottuk, és megmértük a nyugalmi terheletlen hosszukat. Itt a rugón végén található vízszintes jelölést a plexi lapon látható vonalhoz igazítottuk. Ezután rá akasztottunk súlyokat a rugókra és megmértük a rúgó megnyúlását. A legkisebb súly amit ráraktam az 100g volt. Majd eztán 50g-val növeltem a terhelést egészen 500g-ig. Ezt mindkét rugóra elvégeztem.
A második módszer egy dinamikai mérés volt. Ezen mérés során a megterhelt rugót kicsit kitérítettük, majd vizsgáltuk a rugó kis rezgéseit. A különböző terheléseknél mindig három-három mérést végeztem, és egy alkalommal 10 periódus időtartalmát mértem, majd írtam le. itt is 100g-mal kezdtem majd, 50g-jával mentem felfelé. Az egyik rugónál csak 350g-ig mértem, mivel ha többet raktam volna rá akkor már túlságosan megnyúlt volna.

Mérési adatok:

A rezgés periódusidejére ismert az alábbi összefüggés:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{D}}$$

Tehát a rugó m terhelése a D rugóállandó függvényében:

$$m = \frac{T^2}{4\pi^2}D - m_{eff}$$

Ahol $m_{eff} \sim m_{rugo}/3$ a rugó effektív tömege. Tehát bevezetve a $\eta = m$ és $\xi = T^2/4\pi^2$ jelöléseket ezt kapjuk:

$$\eta = \xi D - m_{eff}$$

A mérési adatokat a továbbiakban megadom és a későbbiek számálosához szükséges ξ értékeket is kiszámolom.

mérési adatok az első rugóra

terhelés(g)	100	150	200	250	300	350	400	450	500
megnyúlás(cm)	3,6	5,3	6,9	8,7	10,4	12,2	13,7	15,5	17,1
1.periódusidő(s)	0,381	0,461	0,538	0,599	0,648	0,7	0,751	0,787	0,831
2.periódusidő(s)	0,377	0,462	0,534	0,594	0,652	0,703	0,753	0,787	0,836
3.periódusidő(s)	0,373	0,456	0,531	0,599	0,645	0,697	0,747	0,784	0,827
átlag(s)	0,377	0,459	0,534	0,597	0,648	0,700	0,750	0,786	0,831
$\xi(s^2)$	0,0036	0,0053	0,0072	0,009	0,0106	0,0124	0,0142	0,0156	0,0175

mérési adatok a második rugóra

terhelés(g)	100	150	200	250	300	350	400
megnyúlás(cm)	9,1	13,6	18,1	22,5	26,9	31,2	35,6
1.periódusidő(s)	0,609	0,745	0,866	0,952	1,037	1,121	-
2.periódusidő(s)	0,616	0,746	0,878	0,963	1,026	1,111	-
3.periódusidő(s)	0,614	0,756	0,861	0,956	1,045	1,120	-
átlag(s)	0,613	0,749	0,868	0,957	1,036	1,117	-
$\xi(s^2)$	0,0095	0,0142	0,0191	0,0232	0,0272	0,0316	-

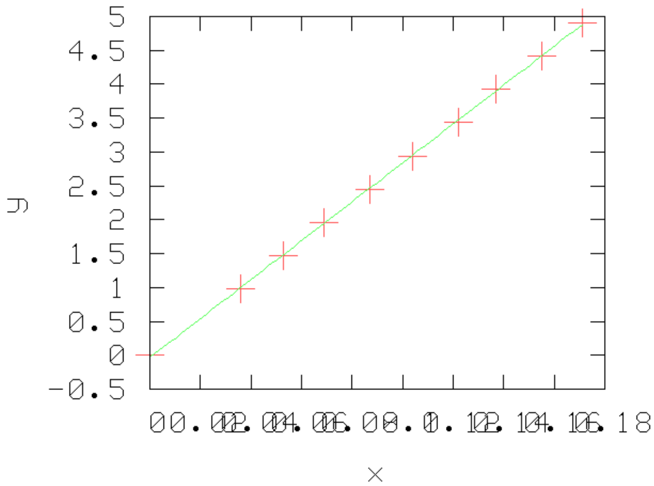
A mérési adatok értékelése:

Először vizsgáljuk az első rugóra mért adatokat. A statikus terhelés esetén, az F_i terhelésre ismert, hogy $F_i = m_i \cdot g$, ahol m a terhelősúly tömege. Foglaljuk táblázatba tehát az (x_i, F_i) pontpárokat. Itt x_i a rugó megnyúlása az egyes esetekben. Továbbá a Hooke törvény $F = D \cdot x$, tehát ha a pontpárokra egyenest illesztünk, akkor annak meredeksége éppen a D rugóállandó lesz.(g értékét $9,81\,m/s^2$-nek veszem). Beleveszem a $(0,0)$ pontot is, hiszen 0 terhelés esetén vettük a megnyúlást zérusnak. Az első rugóra tehát:

az első rugó megnyúlásai

x_i(m)	F_i(N)
0	0
0,036	0,981
0,053	1,472
0,069	1,962
0,087	2,453
0,104	2,943
0,122	3,434
0,137	3,924
0,155	4,415
0,171	4,905

Ezekre az adatokra a GNUplot program által illesztett egyenes:



És ennek az egyenlete:

$$F = 28,727 \cdot x - 0,034$$

A téglalap módszerrel való hiba becsléshez táblázatba kell foglalnunk, az illesztett és mért értékek közötti eltéréseket.

illesztett és mért értékek az első rugóra

$x(m)$	F(N)	F_{ill}(m)	$F - F_{ill} = \Delta F$(N)
0	0	0	0
0,036	0,981	1,000	-0,019
0,053	1,472	1,488	-0,016
0,069	1,962	1,948	0,014
0,087	2,453	2,465	-0,012
0,104	2,943	2,954	-0,011
0,122	3,434	3,471	-0,037
0,137	3,924	3,901	0,022
0,155	4,415	4,419	-0.004
0,171	4,905	4,878	0,026

A milliméter papíron ábrázolt grafikonról letudjuk olvasni a meredekség hibáját. Az ábra alapján $\mathrm{tg}_{1s} = 0,433$. Az illesztett egyenes meredeksége: $28,727 \pm 0,433$. Vagyis az első rugó direkciós ereje a sztatikus mérés alapján:

$$D_{1s} = 28,73 \pm 0,43 \ \frac{N}{m}$$

A relatív hiba:

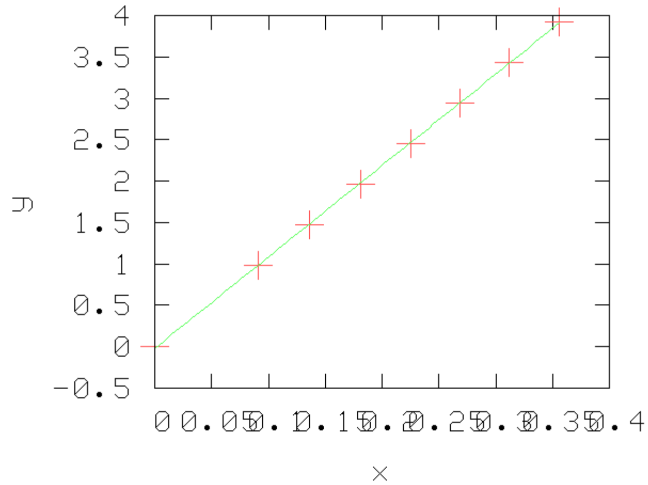
$$\left| \frac{\Delta D_{1s}}{D_{1s}} \right| = \frac{0,43}{28,73} \approx 1,5\%$$

Most ugyanez a második rugóra a statikus mérés esetén:

a második rugó megnyúlásai

x_i(m)	F_i(N)
0	0
0,091	0,981
0,136	1,472
0,181	1,962
0,225	2,453
0,269	2,943
0,312	3,434
0,356	3,924

Ezekre az adatokra a GNUplot program által illesztett egyenes:



És ennek az egyenlete:

$$F = 11,04 \cdot x - 0,02$$

A téglalap módszerrel való hiba becsléshez táblázatba kell foglalnunk, az illesztett és mért értékek közötti eltéréseket.

illesztett és mért értékek a második rugóra

$x(m)$	F(N)	F_{ill}(m)	$F - F_{ill} = \Delta F$(N)
0	0	0	0
0,091	0,981	0,984	-0,004
0,136	1,472	1,481	-0,009
0,181	1,962	1,978	-0,016
0,225	2,453	2,464	-0,011
0,269	2,943	2,949	-0,007
0,312	3,434	3,424	0,009
0,356	3,924	3,910	0,014

A milliméter papíron ábrázolt grafikonról letudjuk olvasni a meredekség hibáját. Az ábra alapján $\mathrm{tg}_{2s} = 0,0898$. Az illesztett egyenes meredeksége: $11,04 \pm 0,0898$. Vagyis a második rugó direkciós ereje a sztatikus mérés alapján:

$$D_{2s} = 11,04 \pm 0,09\ \frac{N}{m}$$

A relatív hiba:

$$\left|\frac{\Delta D_{2s}}{D_{2s}}\right| = \frac{0,09}{11,04} \approx 0,8\%$$

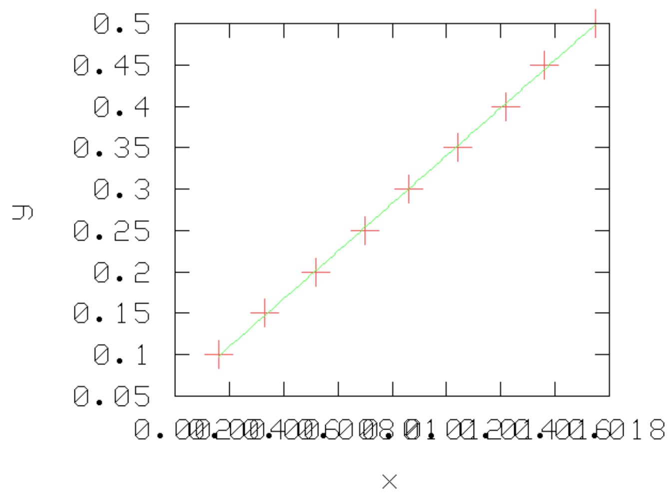
A dinamikai mérés során az (ξ_i, η_i) pontpárokat, ha ábrázoljuk és ezen pontpárokra egyenest illesztünk akkor annak a meredeksége éppen a D rugóállandó lesz, hiszen az előzőekben láttuk, hogy $\eta = D\xi - m_{eff}$. És ahol az egyenes metszi az η tengelyt, akkor ott megkaphatjuk a mérés során használt rugó tömegét.

Tehát az adatpárok az első rugóra:

az első rugó rezgése

$\xi_i(s^2)$	η_i(kg)
0,0036	0,1
0,0053	0,15
0,0072	0,2
0,009	0,25
0,0106	0,3
0,0124	0,35
0,0142	0,4
0,0156	0,45
0,0175	0,5

Ezekre az adatokra a GNUplot program által illesztett egyenes:



És ennek az egyenlete:

$$\eta = 28,8579 \cdot \xi - 0,0059$$

Innen megtudjuk határozni a rugó tömegét. A fentiek szerint: $m_{rugo} = \frac{m_{eff}}{3}$, vagyis a mi esetünkben:

$$m_{r1} = \frac{0,0059}{3} \approx 2\text{g}$$

A téglalap módszerrel való hiba becsléshez táblázatba kell foglalnunk, az illesztett és mért értékek közötti eltéréseket.

illesztett és mért értékek az első rugóra

$\xi(s^2)$	η(kg)	η_{ill}(kg)	$\eta - \eta_{ill} = \Delta\eta$(kg)
0,0036	0,10	0,098	0,002
0,0053	0,15	0,147	0,003
0,0072	0,20	0,202	-0,002
0,0090	0,25	0,254	-0,004
0,0106	0,30	0,300	0,000
0,0124	0,35	0,352	-0,002
0,0142	0,40	0,404	-0,004
0,0156	0,45	0,445	0,005
0,0175	0,50	0,500	0,000

A milliméter papíron ábrázolt grafikonról letudjuk olvasni a meredekség hibáját. Az ábra alapján $\mathrm{tg}_{1d} = 0,7194$. Az illesztett egyenes meredeksége: $28,8579 \pm 0,7194$. Vagyis a második rugó direkciós ereje a dinamikai mérés alapján:

$$D_{1d} = 28,86 \pm 0,72\ \frac{N}{m}$$

A relatív hiba:

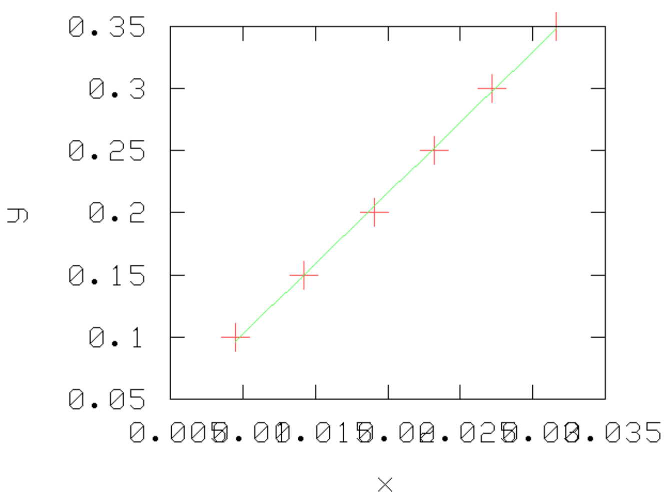
$$\left|\frac{\Delta D_{1d}}{D_{1d}}\right| = \frac{0,72}{28,86} \approx 2,5\%$$

Most nézzük a második rugónak a rezgései során mérteket:

a második rugó rezgése

$\xi_i(s^2)$	η_i(kg)
0,0095	0,1
0,0142	0,15
0,0191	0,2
0,0232	0,25
0,0272	0,3
0,0316	0,35

Ezekre az adatokra a GNUplot program által illesztett egyenes:



És ennek az egyenlete:

$$\eta = 11,3778 \cdot \xi - 0,0116$$

Innen megtudjuk határozni a rugó tömegét. A fentiek szerint: $m_{rugo} = \frac{m_{eff}}{3}$, vagyis a mi esetünkben:

$$m_{r1} = \frac{0,0116}{3} \approx 4\mathrm{g}$$

A téglalap módszerrel való hiba becsléshez táblázatba kell foglalnunk, az illesztett és mért értékek közötti eltéréseket.

illesztett és mért értékek az első rugóra

$\xi(s^2)$	η(kg)	η_{ill}(kg)	$\eta - \eta_{ill} = \Delta\eta$(kg)
0,0095	0,1	0,096	0,003
0,0142	0,15	0,15	0,000
0,0191	0,2	0,206	-0,006
0,0232	0,25	0,252	-0,002
0,0272	0,3	0,298	0,002
0,0316	0,35	0,348	0,002

A milliméter papíron ábrázolt grafikonról letudjuk olvasni a meredekség hibáját. Az ábra alapján $\text{tg}_{2d} = 0,5429$. Az illesztett egyenes meredeksége: $11,3778 \pm 0,5429$. Vagyis a második rugó direkciós ereje a dinamikus mérés alapján:

$$D_{2d} = 11,38 \pm 0,54\ \frac{N}{m}$$

A relatív hiba:

$$\left|\frac{\Delta D_{2d}}{D_{2d}}\right| = \frac{0,54}{11,38} \approx 4,7\%$$

Hibaforrások:

- A sztatikus mérésnél, a rugónak még volt egy kicsiny rezgése, így nem tudtuk pontosan meghatározni a megnyúlást. Ezenkívül a fémvonalzó használata is kényelmetlen volt, mivel a szemnek a pontos szintbe hozásához, erősen el kellett hajolnunk, amely során hibásan olvashatunk le.
- A testeket kis kitérésű rezgésekbe kellett hozni. Ezt meg is tettem, csakhogy ekkor nagyon gyorsan rezgett a rugó, így nehéz volt számolni a periódusokat, és előfordulhat, hogy eltévesztettem egy-kettőt.
- A rezgések vizsgálatánál a legsúlyosabb hibalehetőség az az emberi reakcióđő, hiszen a stoppert nem tudjuk pontosan indítani valamint megállítani. Ez mint tudjuk kb. 0,15s, és láthatóan összemérhető a periódusidővel. Éppen ezért mértem 10 periódusidőt egyszerre, hogy az ebből adódó hibát valamennyire kiküszöböljem.
- A megnyújtott rugó sajnos nem fog pontosan a függőleges irányban mozogni, hanem lesz oldalirányú kitérése is. Sőt a mozgás csak akkor tekinthető harmonikus rezgőmozgásnak, hogy ha a rugóra akasztott testnek csak kicsik a kitérései, és előfordulhatott, hogy a megengedettnél jobban is kitért a test.

Diszkusszió:

Amint láttuk a méréseink elég pontosak voltak, és a hibahatáron belül tudtuk igazolni a Hooke törvényt, valamint megtudtuk határozni a vizsgált rugók direkciós állandóját. Láthatjuk továbbá, hogy a direkciós erőkre a két különböző mérés során kapott értékek a hibahatáron belül megegyeznek. Én a sztatikus mérést tartottam ebben az esetben pontosabbnak. Bár növelhettük volna a dinamikus mérés pontosságát úgy, hogy több periódust mérünk, mondjuk a 10 helyet 60-70-et. Többet már valószínűleg nem érdemes, mivel a rugónak van azért csillapodása, és ekkor már belejátszik az eredménybe az oldalirányú kitérés is.