

Folyadék belső súrlódásának mérése

Mérés célja:

Ha egy áramlás áramvonalai párhuzamosak, a folyadék különböző sebességű, egymással párhuzamos rétegekre bontható, lamináris áramlásról beszélünk. Lamináris áramlás esetén a folyadék belső súrlódási erejét az

$$F = \eta A \frac{v}{d}$$

képlet adja meg, ahol F a belső súrlódási erő, A a súrlódó felületek felszínét, v a felületek egymáshoz viszonyított sebességét, d a rétegek szélessége, η pedig a folyadék ún. *belső súrlódási* vagy *viszkózitási együtthatója*. Általánosabb esetben, ha a rétegeket minden határon túl közelítjük egymáshoz, az

$$F = \eta A \frac{dv}{dd}$$

képlethez jutunk (a dv/dd hányadost sebességgradiensnek is szokták nevezni). r sugarú gömbre a viszkózitást a Stokes féle törvény alapján számolhatjuk ki:

$$F = 6\pi\eta r v.$$

A képletek alkalmazhatóságának határa, hogy mennyire tekinthető az áramlás laminárisnak. Ezt jellemző adat az ún. Reynolds-szám:

$$R = \frac{rv\rho}{\eta}.$$

Egy áramlást akkor tekinthetünk laminárisnak, ha a Reynolds-száma 0,1 alatt van, ellenkező esetben *turbulens* vagy *kavargó áramlás lép* jelenik meg.

Mérésünk során szeretnénk a glicerin viszkózitását különböző módszerekkel megmérni. A mérést elvégezzük Höppler-féle viszkoziméterrel (nem lamináris áramlás), és egy hengeres csőbe dobott, süllyedő műanyag golyó sebességét mérve, majd kiszámítjuk mindkét esetben a viszkózitást és a Reynolds-számot. Összehasonlítjuk a különböző mérésekből származó adatokat, és megbecsüljük, mennyire voltak adekvátak az alkalmazott megfontolásaink.

Mérőeszközök:

- kis műanyag golyók (kétféle méret)
- csavaros mikrométer
- csipeszek
- piknométer

- kétkarú mérleg súlysorozattal
- állólombikok
- szűrőpapír
- üvegtölcsérek
- csipeszek
- műanyag edény (a sűrűségméréshez használt golyók tárolására)
- mérőszalag
- stopperóra
- mérőhenger
- Bunsen-állvány helyzetjelzőkkel
- hőmérő
- aerométer
- Höppler-féle viszkoziméter

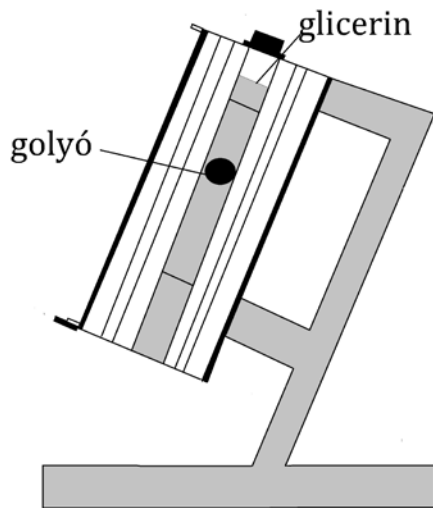
Mérés leírása

A viszkozitás mérését először Höppler-féle viszkoziméterrel végezzük el. A mérés során stopperórával megmérjük, mennyi t idő alatt teszi meg az utat a készülék csövében lévő vasgolyó a cső két jelölése között.

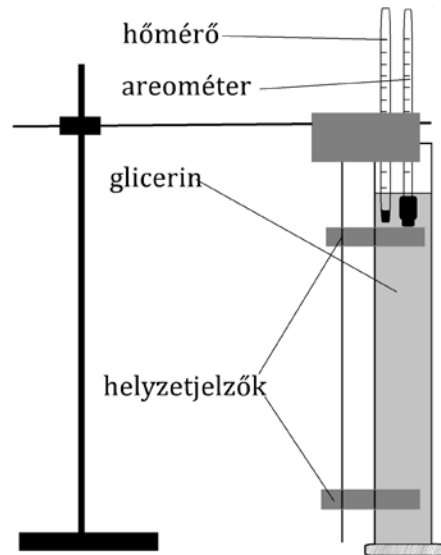
Ezután a mérést elvégezzük egy hengeres csőbe dobott, süllyedő műanyag golyó sebességét mérve. Ehhez először megmérjük a mérőhengerben (függőleges hengeres cső) lévő glicerin T hőmérsékletét, hiszen az η súrlódási együttható a hőmérséklettől (és a glicerin nedvességtartalmától). A glicerinben lebegő areométer segítségével lemérjük a glicerin ρ_f sűrűségét a mérés során. Az areométer a glicerinbe helyezve addig merül, míg az általa kiszorított folyadék súlya a saját súlyával egyensúlyt nem tart. Ekkor leolvassuk a glicerin sűrűségét az areométer skáláján. Lemérjük a mérőhenger a két helyzetjelző közötti L távolságot is.

Lemérjük egy golyó d átmérőjét is. Ezt a mérést csavaros mikrométerrel végezzük, és minden golyót háromszor mérünk meg (d_1, d_2, d_3 , leolvasása után kicsavarjuk a mikrométert, és a golyót kicsit megmozgatva újra becsavarjuk, és újra leolvassuk). Ezután az ujjunkról egy (másik) csipesz segítségével, közelről a mérőhengerben lévő glicerinbe ejtjük, és a süllyedő golyónak a két helyzetjelző közötti út L megtételéhez szükséges t idejét stopperórával mérjük. Mindkét méretből négy golyót megmérünk. Ezután megmérjük a golyók (átlag)sűrűségét (feltettük, hogy ez független a méretüktől). Egy száraz piknométert először üresen lemérünk a kétkarú mérlegen, majd lemérjük a külön erre a célra a műanyag edénybe félretett golyókkal együtt. Ezután a golyók mellé tölcserrel desztillált vizet töltünk, úgy, hogy megtöltsa a piknométert, és lemérjük így, majd végül kiöltjük a golyókat a lombik szájára tett tölcserbe helyezett szűrőpapírra (hogy száradjanak), és desztillált vízzel teletöltött piknométerrel is megismételjük a tömegmérést.

Vázlatos rajz a mérés elrendezéséről:



*mérés Höppler-féle
viszkóziméterrel*



*mérés hengeres csőbe dobott
műanyag golyócska süllyedési
idejének mérésével*

Mérési adatok:

A helyzetjelzők távolsága: $L = 25,5\text{cm}$.

A hőmérséklet: $T = 24^\circ\text{C}$.

A glicerín sűrűsége (areométerrel mérve): $\rho_f = 1245\text{ kg/m}^3$.

mérés hengeres csőbe dobott műanyag golyócska süllyedési idejének mérésével:

kisebb golyók:

| d_1 (mm) | d_2 (mm) | d_3 (mm) | t (s) |
|------------|------------|------------|---------|
| 1,46 | 1,45 | 1,46 | 44,16 |
| 1,12 | 1,14 | 1,13 | 33,26 |
| 1,10 | 1,11 | 1,10 | 28,20 |
| 0,97 | 0,97 | 0,96 | 46,06 |

Mérést végezte: Gula Miklós
Mérőtárs: Berta Dénes
Mérés ideje: 2015. 11. 5.
Jegyzőkönyv leadásának időpontja: 2015. 11. 13.

nagyobb golyók:

| d_1 (mm) | d_2 (mm) | d_3 (mm) | t (s) |
|------------|------------|------------|-------|
| 4,47 | 4,48 | 4,46 | 3,20 |
| 3,92 | 3,95 | 3,93 | 3,53 |
| 4,17 | 3,88 | 4,36 | 3,22 |
| 3,75 | 3,96 | 3,95 | 3,43 |

golyók sűrűségének mérése piknométerrel:

$$m_{\text{üres}} = 38,95\text{g}$$

$$m_{\text{golyók}} = 76,10\text{g}$$

$$m_{\text{golyók+vz}} = 116,65\text{g}$$

$$m_{\text{víz}} = 95,55\text{g}$$

mérés Höppler-féle viszkoziméterrel:

$$t = 1 \text{ min } 46,96\text{s}$$

Lehetséges hibaforrások:

- hőmérő mérési és leolvasási hibája
- areométer mérési és leolvasási hibája
- csavaros mikrométer mérési és leolvasási hibája
- golyóknak az átmérőmérés során szenvedett alakváltozása
- golyók alakjának hibája
- golyók sűrűségeloszlása
- golyók nedvessége, szennyezettsége
- glicerin nedvességtartalma, szennyezettsége
- desztillált víz szennyezettsége
- piknométerbe töltött víz szintjének pontatlansága
- a levegő a mérlegre ható közegellenállása
- súlysorozat méréshatára
- a „határokon” áthaladó golyó megfigyelésének pontatlansága, leolvasásának nehézségei
- stopperóra mérési hibája
- reakcióidő
- Höppler-féle viszkoziméter hibája
- süllyedő golyók által keltett örvények
- kerekítésből származó hiba

Kiértékelés:

Mivel a Höppler-viszkoziméterben süllyedő golyó és a cső fala között igen kis folyadékréteg van, ezért a fellépő áramlás nem tekinthető laminárisnak, így a Stokes-törvény nem alkalmazható. A Höppler-készülékre a következő empirikus összefüggést alkalmazhatjuk:

$$\eta = K(\rho_g - \rho_f)t$$

Az alkalmazott készülékre K golyóállandó $0,13 \text{ mPa cm}^3/\text{g}$, $\rho_g = 8,1 \text{ g/cm}^3$, és az areométeres mérésünk szerint $\rho_f = 1245 \text{ kg/m}^3 = 1,245 \text{ g/cm}^3$.

Mivel $t = 1 \text{ min } 46,96 \text{ s} = 106,96 \text{ s}$, $\eta = 0,0953 \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

A glicerinbe dobott golyó a glicerinbe ejtést követően rövid idő múlva egyenletes sebességgel kellett, hogy mozogjon. Ez akkor következik be, ha a golyóra ható erők kiegyenlítik egymást, azaz a golyót felfelé gyorsító F_{felh} felhajtóerő és F_{viszk} , és a golyót lefelé gyorsító G gravitációs erő.

$$F_{\text{felh}} + F_{\text{viszk}} = G$$

$$mg - F_{\text{felh}} - F_{\text{viszk}} = 0;$$

A Stokes-féle súrlódási törvény szerint $F_{\text{viszk}} = 6\pi\eta r v$.

$$mg - V_g \rho_f g - 6\pi\eta r v = 0$$

$$V_{\text{gömb}} = \frac{4r^3\pi}{3}$$

$$\frac{4\pi(\rho_g - \rho_f)r^3}{3} - 6\pi\eta r v = 0$$

$$\eta = \frac{2(\rho_g - \rho_f)r^2 g}{9v}$$

Tehát szükségünk van a golyók a piknométeres mérésből származó ρ_g sűrűségére.

A golyók m tömege:

$$m = m_{\text{golyók}} - m_{\text{üres}}$$

A golyókkal egyenlő tömegű desztillált víz tömege:

$$\mu = (m_{\text{víz}} - m_{\text{üres}}) - (m_{\text{golyók+víz}} - m_{\text{golyók}}) = \rho_{\text{víz}} V$$

Innen:

$$\rho_g = \frac{m}{V} = \rho_{\text{víz}} \frac{m}{\mu} = \rho_{\text{víz}} \frac{m_{\text{golyók}} - m_{\text{üres}}}{(m_{\text{víz}} - m_{\text{üres}}) - (m_{\text{golyók+víz}} - m_{\text{golyók}})};$$

a desztillált víz $\rho_{\text{víz}}$ sűrűségét 1 g/cm^3 -nek vesszük.

Mérést végezte: Gula Miklós
Mérőtárs: Berta Dénes
Mérés ideje: 2015. 11. 5.
Jegyzőkönyv leadásának időpontja: 2015. 11. 13.

A Reynolds-számot a $Re = \frac{\rho_f r v}{\eta}$ képlettel határozzuk meg.

$$\rho_g = 2,315 \text{ g/cm}^3$$

kisebb golyók:

| d_1 (mm) | d_2 (mm) | d_3 (mm) | d (mm) | t (s) | v (m/s) | η (Pa·s) | Re | $\frac{Re}{0,1}$ (%) |
|------------|------------|------------|----------|---------|-----------|---------------|--------|----------------------|
| 1,46 | 1,45 | 1,46 | 1,46 | 44,16 | 0,00577 | 0,2143 | 0,0244 | 24,4355 |
| 1,12 | 1,14 | 1,13 | 1,13 | 33,26 | 0,00767 | 0,0971 | 0,0555 | 55,5286 |
| 1,10 | 1,11 | 1,10 | 1,10 | 28,20 | 0,00904 | 0,0785 | 0,0791 | 79,1106 |
| 0,97 | 0,97 | 0,96 | 0,97 | 46,06 | 0,00554 | 0,0984 | 0,0338 | 33,8466 |

$$\eta_{\text{átlag}} = 0,1221 \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$Re_{\text{átlag}} = 0,0482$$

$$\frac{Re}{0,1}_{\text{átlag}} = 48,2303\%$$

nagyobb golyók:

| d_1 (mm) | d_2 (mm) | d_3 (mm) | d (mm) | t (s) | v (m/s) | η (Pa·s) | Re | $\frac{Re}{0,1}$ (%) |
|------------|------------|------------|----------|---------|-----------|---------------|----------|----------------------|
| 4,47 | 4,48 | 4,46 | 4,470 | 3,20 | 0,07969 | 0,1462 | 1,516463 | 4,47 |
| 3,92 | 3,95 | 3,93 | 3,933 | 3,53 | 0,07224 | 0,1249 | 1,416215 | 3,92 |
| 4,17 | 3,88 | 4,36 | 4,137 | 3,22 | 0,07919 | 0,1260 | 1,618368 | 4,17 |
| 3,75 | 3,96 | 3,95 | 3,887 | 3,43 | 0,07434 | 0,1185 | 1,518007 | 3,75 |

$$\eta_{\text{átlag}} = 0,1289 \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$Re_{\text{átlag}} = 1,5173$$

$$\frac{Re}{0,1}_{\text{átlag}} = 1517,2263\%$$

A viszkozitásmérés relatív hibáját a következőképpen becsüljük:

$$\Delta\eta = \sqrt{\Delta_{\text{stat}}^2 + \Delta_{\text{műszer}}^2};$$

ahol

$$\Delta_{\text{stat}}^2 = 9\sigma^2 = \frac{9 \sum_{k=1}^{N=4} |\eta_k - \eta_{\text{átlag}}|^2}{N=4 \eta_{\text{átlag}}};$$

Mérést végezte: Gula Miklós
Mérőtárs: Berta Dénes
Mérés ideje: 2015. 11. 5.
Jegyzőkönyv leadásának időpontja: 2015. 11. 13.

$$\Delta_{m\ddot{u}szer}^2 = \Delta_{mikrom\acute{e}ter}^2 + \Delta_{m\acute{e}rleg}^2 + \Delta_{h\ddot{o}m\acute{e}r\ddot{o}}^2 + \Delta_{areom\acute{e}ter}^2 + \Delta_{stopper}^2$$

$$\Delta^2 = \left(\frac{\text{leolvasási bizonytalanság}}{x_{\text{átlag}}} \right)^2$$

Az areométer leolvasási hibája kb. 2kg/m³ volt.

$$\Delta_{areom\acute{e}ter}^2 = 0,0258\%$$

A mérleg súlysorozatának legkisebb eleme 5mg volt.

$$\Delta_{m\acute{e}rleg}^2 = \left(\frac{\text{leolvasási bizonytalanság}}{\mu} \right)^2 = 0,0097\%$$

A hőmérő leolvasási bizonytalansága 0,5°C volt.

$$\Delta_{h\ddot{o}m\acute{e}r\ddot{o}}^2 = 0,0434\%$$

kisebb golyók:

$$\Delta_{mikrom\acute{e}ter}^2 = 0,1858\%$$

$$\Delta_{stopper}^2 = 0,0174\%$$

$$\Delta_{stat}^2 = 21,3464\%$$

$$\Delta\eta = 4,6496\%$$

nagyobb golyók:

$$\Delta_{mikrom\acute{e}ter}^2 = 0,0148\%$$

$$\Delta_{stopper}^2 = 2,2276\%$$

$$\Delta_{stat}^2 = 0,7553\%$$

$$\Delta\eta = 1,5480\%$$

A Reynolds-szám relatív hibájának becslése:

$$\Delta Re = \sqrt{\Delta_{stat}^2 + \Delta_{m\ddot{u}szer}^2};$$

Mérést végezte: Gula Miklós
Mérőtárs: Berta Dénes
Mérés ideje: 2015. 11. 5.
Jegyzőkönyv leadásának időpontja: 2015. 11. 13.

ahol

$$\Delta_{\text{stat}}^2 = 9\sigma^2 = 9 \cdot \frac{\sum_{k=1}^{N=4} |Re_k - Re_{\text{átlag}}|^2}{N=4 \cdot Re_{\text{átlag}}};$$

és

$$\Delta_{\text{műszer}}^2 = \Delta_{\text{mikrométer}}^2 + \Delta_{\text{mérleg}}^2 + \Delta_{\text{hőmérő}}^2 + \Delta_{\text{areométer}}^2 + \Delta_{\text{stopper}}^2$$

kisebb golyók:

$$\Delta_{\text{műszer}}^2 = 0,0963\%$$

$$\Delta_{\text{stat}}^2 = 110,1288\%$$

$$\Delta Re = 10,4988\%$$

nagyobb golyók:

$$\Delta_{\text{műszer}}^2 = 2,3213\%$$

$$\Delta_{\text{stat}}^2 = 110,1288\%$$

$$\Delta Re = 2,3133\%$$

Höppler-készülékkel végzett viszkozitásmérés relatív hibájának becslése:

$$\Delta\eta = \sqrt{\Delta_{\text{műszer}}^2};$$

ahol

$$\Delta_{\text{műszer}}^2 = \Delta_{\text{areométer}}^2 + \Delta_{\text{stopper}}^2.$$

$$\Delta_{\text{areométer}}^2 = 0,0258\%$$

$$\Delta_{\text{stopper}}^2 = \left(\frac{\text{leolvasási bizonytalanság (reakcióidő)}}{t} \right)^2 = 0,0350\%$$

$$\Delta\eta = 0,2465\%$$

összefoglaló táblázat:

Mérést végezte: Gula Miklós
Mérőtárs: Berta Dénes
Mérés ideje: 2015. 11. 5.
Jegyzőkönyv leadásának időpontja: 2015. 11. 13.

Diszkusszió:

A nagyobb golyókkal elvégzett mérés esetében a Reynolds-szám olyan nagy lett, hogy nem tekinthető a mérés adekvátnak. A Höppler-féle viszkoziméterrel és a kisebb

| | η (Pa·s) | $\Delta\eta$ (Pa·s) | $\Delta_{rel}\eta$ (%) | Re | $\frac{Re}{0,1}$ (%) | ΔRe | $\Delta_{rel}Re$ |
|---------------------------|---------------|---------------------|------------------------|--------|----------------------|-------------|------------------|
| Höppler-féles klszülékkel | 0,0953 | 0,00023 | 0,2465 | ———— | ———— | ———— | ———— |
| kisebb golyók | 0,1221 | 0,00570 | 4,6496 | 0,0482 | 48,2303 | 0,0051 | 10,4988 |
| nagyobb golyók | 0,1289 | 0,00196 | 1,5486 | 1,5173 | 1517,2634 | 0,0350 | 2,3133 |

golyókkal folytatott mérés esetén körülbelül ugyanabba a nagyságrendbe tartozó eredményt kaptunk a glicerín viszkozitására. A Höppler-viszkoziméter kisebb hibát adott, ugyanakkor nem feledkezhetünk meg a szignifikáns hibát okozó sok kicsi, egyéb, nehezen számszerűsíthető hibaforrásról sem, amit nem vettünk számításba. Esetleg érdemes lenne ezen tényezők hatásának csökkentésével megismételni a mérést (pl. több adat, pontosabb műszerek, mérlegelésnél légüres térre való redukálás, Gauss-felcserélési módszer, illetve lineáris interpoláció alkalmazása, a hőmérséklet és a glicerín nedvességtartalmának kontrollálása, golyók gondos szárítása, szennyeződések körültekintő kivédése, stb.)

A Wikipédia glicerín viszkozitási együtthatójának 1,5Pa·s értéket ír.

Egy interneten talált cikkben

(<http://edge.rit.edu/content/P13051/public/Research%20Notes/Viscosity%20of%20Aqueous%20Glycerol%20Solutions.pdf>) közölt táblázat szerint 20°C-on a 85w%-os vizes glicerínoldat viszkozitási együtthatója 0,109Pa·s.

Mérést végezte: Gula Miklós
Mérőtárs: Berta Dénes
Mérés ideje: 2015. 11. 5.
Jegyzőkönyv leadásának időpontja: 2015. 11. 13.

TABLE V. VISCOSITY OF AQUEOUS GLYCEROL SOLUTIONS

| Glycerol, % Wt. | Temperature, ° C. | | | | | | | | | | |
|--------------------|------------------------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
| | Viscosity, Centipoises | | | | | | | | | | |
| 0 ^a | 1.792 | 1.308 | 1.005 | 0.8007 | 0.6560 | 0.5494 | 0.4688 | 0.4061 | 0.3565 | 0.3165 | 0.2838 |
| 10 | 2.44 | 1.74 | 1.31 | 1.03 | 0.826 | 0.680 | 0.575 | 0.500 | ... | ... | ... |
| 20 | 3.44 | 2.41 | 1.76 | 1.35 | 1.07 | 0.879 | 0.731 | 0.635 | ... | ... | ... |
| 30 | 5.14 | 3.49 | 2.50 | 1.87 | 1.46 | 1.16 | 0.956 | 0.816 | 0.690 | ... | ... |
| 40 | 8.25 | 5.37 | 3.72 | 2.72 | 2.07 | 1.62 | 1.30 | 1.09 | 0.918 | 0.763 | 0.668 |
| 50 | 14.6 | 9.01 | 6.00 | 4.21 | 3.10 | 2.37 | 1.86 | 1.53 | 1.25 | 1.05 | 0.910 |
| 60 | 29.9 | 17.4 | 10.8 | 7.19 | 5.08 | 3.76 | 2.85 | 2.29 | 1.84 | 1.52 | 1.28 |
| 65 | 45.7 | 25.3 | 15.2 | 9.85 | 6.80 | 4.89 | 3.66 | 2.91 | 2.28 | 1.86 | 1.55 |
| 67 | 55.5 | 29.9 | 17.7 | 11.3 | 7.73 | 5.50 | 4.09 | 3.23 | 2.50 | 2.03 | 1.68 |
| 70 | 76.0 | 38.8 | 22.5 | 14.1 | 9.40 | 6.61 | 4.86 | 3.78 | 2.90 | 2.34 | 1.93 |
| 75 | 132 | 65.2 | 35.5 | 21.2 | 13.6 | 9.25 | 6.61 | 5.01 | 3.80 | 3.00 | 2.43 |
| 80 | 255 | 116 | 60.1 | 33.9 | 20.8 | 13.6 | 9.42 | 6.94 | 5.13 | 4.03 | 3.18 |
| 85 | 540 | 223 | 109 | 58.0 | 33.5 | 21.2 | 14.2 | 10.0 | 7.28 | 5.52 | 4.24 |
| 90 | 1310 | 498 | 219 | 109 | 60.0 | 35.5 | 22.5 | 15.5 | 11.0 | 7.93 | 6.00 |
| 91 | 1560 | 592 | 259 | 126 | 68.1 | 39.8 | 25.1 | 17.1 | 11.9 | 8.62 | 6.40 |
| 92 | 1950 | 729 | 310 | 147 | 78.3 | 44.8 | 28.0 | 19.0 | 13.1 | 9.46 | 6.82 |
| 93 | 2400 | 860 | 367 | 172 | 89.0 | 51.5 | 31.6 | 21.2 | 14.4 | 10.3 | 7.54 |
| 94 | 2930 | 1040 | 437 | 202 | 105 | 58.4 | 35.4 | 23.6 | 15.8 | 11.2 | 8.19 |
| 95 | 3690 | 1270 | 523 | 237 | 121 | 67.0 | 39.9 | 26.4 | 17.5 | 12.4 | 9.08 |
| 96 | 4600 | 1585 | 624 | 281 | 142 | 77.8 | 45.4 | 29.7 | 19.6 | 13.6 | 10.1 |
| 97 | 5770 | 1950 | 765 | 340 | 166 | 88.9 | 51.9 | 33.6 | 21.9 | 15.1 | 10.9 |
| 98 | 7370 | 2460 | 939 | 409 | 196 | 104 | 59.8 | 38.5 | 24.8 | 17.0 | 12.2 |
| 99 | 9420 | 3090 | 1150 | 500 | 235 | 122 | 69.1 | 43.6 | 27.8 | 19.0 | 13.2 |
| 100 | 12070 | 3900 | 1412 | 612 | 284 | 142 | 81.3 | 50.6 | 31.9 | 21.3 | 14.8 |

^a Viscosity of water taken from Bingham and Jackson (4).

a cikkben szereplő táblázat

Ezek alapján, ha bár nem tekinthető a mérés teljesen pontosnak, valószínűleg elfogadható becslést adtunk egy 24°C-os, kb. 5-20w% nedvességtartalmú glicerin viszkozitására.