

Állóhullám kötélen

Mérést végezte: Enyingi Vera Atala
Mérőtárs neve: Fábíán Gábor (7. mérőpár)
Mérés időpontja: 2010. október 8. (12:00-14:00)
Jegyzőkönyv leadásának időpontja: 2010. október 15.

A mérés célja:

Az állóhullámok jellemzése és megfigyelése, a terjedés jellemzőinek (sebesség, hullámhossz, frekvencia stb.) kimérése, és az ezekre vonatkozó törvények igazolása, mérési bizonytalanság meghatározása. Különböző átmérőjű (vastagabb, vékonyabb) kötelek sajátfrekvenciájának mérése. Az egyik fonál egységnyi hosszúságú tömegének meghatározása.

A mérőeszközök:

- Vastag és vékony kötelek
- Változtatható amplitúdójú és frekvenciájú rezgéseket létrehozó szinuszhullám-generátor, vibrátor
- Mérőszalag
- Analitikai mérleg
- Súlyok

A mérés rövid leírása:

A mérés két fő részre bontható.

A mérés első részében a vastagabb kötéllal, és állandó feszítőerővel (amit a csigán átvett súly (90 g) állandóságával érünk el) vizsgáljuk a hullám sajátfrekvenciáját különböző számú csomópont esetén, $n = 2$ -től $n = 6$ -ig, ahol n a duzzadó helyek száma. Megállapítottuk a mérési bizonytalanságot.

A második részben a kötelet feszítő súly 50g-ról 20 g-onkénti 170 g-ig való emelésével meghatároztuk a sajátfrekvenciát $n = 3$ módus esetén. Ekkor minden esetben három párhuzamos mérést végeztünk.

Kiegészítő mérésként megmértük a második részben használt kötéllal azonos anyagi minőségű és átmérőjű kötélen pontos hosszát és tömegét (utóbbit analitikai mérleggel). Ez a második esettel való összehasonlításhoz szükséges.

Mérési adatok:

1. mérési rész:

Súly:	90 g = 0,09 kg	
Kötélhossz:	1.55m	
fél hullámhossz n	sajátfrekvencia [Hz]	mérési bizonytalanság* [Hz]
2	9,7	0,2
3	14,6	0,2
4	19,6	0,2
5	24,2	0,2
6	29,2	0,2

*a mérési bizonytalanság lefelé és felfelé vett értékek abszolút értéke

2. mérési rész:

tömeg [g]	tömeg [kg]	F [N]	f [Hz]		
			1	2	3
50	0,05	0,5	74,6	74,5	74,5
70	0,07	0,7	88,1	88,3	88,0
90	0,09	0,9	100,0	100,0	100,0
110	0,11	1,1	111,1	110,9	110,8
130	0,13	1,3	120,6	120,7	120,6
150	0,15	1,5	129,8	129,5	129,6
170	0,17	1,7	137,8	138,0	138,0

Egyéb adatok:

Hosszú kötél hossza:	4,04m
Hosszú kötél tömege:	363,9mg = 0,0003639 kg

Kiértékelés:

Rugalmas kötélen állóhullám jön létre két azonos hullámhosszú (λ) és amplitúdójú, de ellentétes irányban haladó hullám találkozásakor. Erre a megállapításra alapul a mérés. A vizsgálat során a kötél egyik vége rögzített (csigán átvettük), a másik végét egy vibrátor segítségével rezgettük. A hullámok a rögzített végről visszaverődtek. Ezzel a módszerrel azonos feszítőerő esetén a frekvenciákat változtatva különböző csomópontú állóhullámokat hoztunk létre, illetve különböző feszítőerő, és azonos csomópont szám esetén különböző frekvenciájú állóhullámok jelentek meg. Fontos, hogy a csomópontok pontszerűek legyenek, illetve a kötél végein lévők ténylegesen a kötél végein helyezkedjenek el.

Az 1. méréssorozat alatt a csigán átvett kötél végén lévő húzóúlllyal (90 g), a frekvencia változtatásával megkerestük az állóhullámok sajátfrekvenciáját. A mérési bizonytalanságot úgy állapítottuk meg, hogy pozitív és negatív irányban is megkerestük azt az értéket, ahol az amplitúdó nem változik meg még jelentősen.

Ez alapján a méréssorozat alapján kiszámíthatjuk a terjedési sebességet a $v = \lambda_n f_n$ összefüggéssel, ahol $\lambda_n = \frac{2L}{n}$, azaz $v = \frac{2L}{n} f_n$ (L a kötél hossza, n a félhullámhosszak száma, λ a hullámhossz). Erre minden esetben közel azonos értékek adódnak. Ennek az a magyarázata, hogy azok az értékek (feszítőerő, anyagi minőség, átmérő stb.), melyektől a terjedési sebesség függ, a mérés során nem változtak. Az eltérések a mérési bizonytalanságból adódnak. A csomópontok száma mindig egyenlő $n + 1$ -gyel.

n	f [Hz]	mérési bizonytalanság [Hz]	λ_n [m]	v [$\frac{m}{s}$]	mért $f_n/$ f_{n+1}	várt f_n/f_{n+1}
2	9,7	0,2	1,5500	15,0350	0,664384	0,666667
3	14,6	0,2	1,0333	15,0867	0,744898	0,75
4	19,6	0,2	0,7750	15,1900	0,809917	0,8
5	24,2	0,2	0,6200	15,0040	0,828767	0,833333
6	29,2	0,2	0,5167	15,0867		

A 2. méréssorozat során a félhullámhosszak száma állandó $n = 3$. A húzóúlllyal változtatásával (50 – 170 g, 20g-onként növelve), ugyanolyan L hosszúságú, de vékonyabb kötél esetén vizsgáljuk, hogyan változik a sajátfrekvencia a húzóúlllyal függvényében. Minden esetben három mérést végzünk, amikből átlagot számolunk, majd $f^2 - m$ függvényt ábrázoljuk. Ez alapján gnuplot segítségével az egyenes meredekségéből meghatározhatjuk az arányossági tényezőt, ami jelent esetben a kötél egységnyi hosszúságának tömegét (μ lineáris sűrűséget).

Felhasznált összefüggések:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$F = mg$$

$$v = \lambda f$$

$$\lambda = \frac{2L}{n}$$

ahol:

v a hullám terjedési sebessége [m/s],

F a kötelet feszítő erő [N],

ρ a kötélsűrűsége [kg/m^3],

A a keresztmetszete [m^2],

μ a lineáris sűrűség,

A fentiekből kifejezhető, hogy

m a kötéltre függesztett test tömege [kg],

$g = 9,81m/s^2$ a nehézségi gyorsulás [m/s^2],

λ a hullámhossz [m],

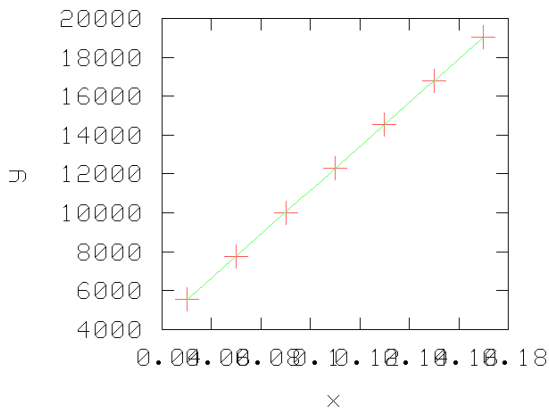
n a félhullámhosszak száma.

$$f^2 = \frac{n^2 g}{4L^2 \mu} m = am$$

A grafikon meredekségéből a μ lineáris sűrűség meghatározható:

$$\mu = \frac{n^2 g}{4L^2 a}$$

tömeg [g]	tömeg [kg]	F [N]	f [Hz]				f^2 [Hz ²]
			1	2	3	átlag	
50	0,05	0,5	74,6	74,5	74,5	74,533	5555,218
70	0,07	0,7	88,1	88,3	88,0	88,133	7767,484
90	0,09	0,9	100,0	100,0	100,0	100,000	10000
110	0,11	1,1	111,1	110,9	110,8	110,933	12306,204
130	0,13	1,3	120,6	120,7	120,6	120,633	14552,401
150	0,15	1,5	129,8	129,5	129,6	129,633	16804,801
170	0,17	1,7	137,8	138,0	138,0	137,933	19025,604



A gnuplot által illesztett egyenes képlete:

$$f^2(m) = -95,1148 + 112568x$$

azaz

$$a = 112568$$

Így tehát

$$\mu_1 = 8,16156 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{m^2}$$

Az így kapott eredmény ellenőrzésére megmértünk egy ugyanilyen minőségű, $l = 4,04 m$ hosszú, $m_{kötél} = 363,9mg = 0,0003639kg$ tömegű kötelet. Amennyiben a fenti számítások helyesek, a két értéknek közel

ugyanannyinak kell lennie.

$$\mu_2 = \frac{m_{kötél}}{l} = 9,00743 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{m^2}$$

A két érték közel azonos, az eltérések a mérés hibájából származnak.

Hibaszámítás:

Hibaforrások a mérés során több helyen is fellépnek. Elsőként említeném meg, hogy a kötélszögölésekor a vibrátornál is, illetve a csigánál is fellép a rögzítés hibája. Fellép továbbá a frekvenciamérés bizonytalansága.

A második mérésnél a frekvenciák megállapításának hibáján kívül figyelembe kell vennünk, hogy az illesztett egyenes nem megy át az origón.

Diszkusszió:

A kapott értékek a hibahatáron belül vannak, így elfogadhatóak. Beláttuk, hogy a terjedési sebesség független a frekvenciától, a feszítőerőtől viszont függ.

A második mérésorozatban pedig többek között ezt is felhasználva megállapítottuk továbbá a kötélsűrűségét, ezzel igazolva, hogy az összeállítás ilyen célra is alkalmas.