

Lineáris erőtvény vizsgálata

Dávid Attila

2023. augusztus 17.

Mérést végezte: Dávid Attila

Mérőtárs neve:

Mérés időpontja: 2023.05.09.

Jegyzőkönyv leadásának időpontja: 2023.05.16.

A mérés célja

A mérés egyik célja a rugókra jellemző lineáris erőtvény, vagyis az $F = -D \cdot \Delta x$ összefüggés kísérleti igazolása. A másik cél az erőtvényben D -vel jelölt rugóállandó meghatározása két rugó esetén.

Mérőeszközök

- ismert tömegű súlyok (50 g)
- stopperóra
- fémvonalzó
- mérőállvány
- két különböző rugóállandójú rugó

A mérés rövid leírása

A mérés elején a felakasztott rugó saját súlya alatti megnyúlását olvastam le, hogy később ehhez a megnyúláshoz viszonyíthassam a többi, valamint meghatározhassam Δx -t. A súlyokat egyesével akasztottam a rugóra és gondosan ügyeltem arra, hogy a megnyúlás leolvasásakor a rugó nyugalomban legyen. Miután az összes súly felkerült, elkezdtem az lengésidők mérését. Minden adott terhelő súly esetén háromszor mértem meg a stopperórával tíz lengés idejét, ezzel csökkentve a mérések bizonytalanságát. A súlyokat ebben a mérésben egyesével pakoltam le a rugóról. Miután az összes súly lekerült, kicseréltem a rugókat és megismételtem a teljes mérést.

A lengések során sokszor előfordult, hogy kis terhelés esetén a rugó kilengett és elfordult a tengelye mentén, ami nagyban módosítja a helyes adatokat. Ilyenkor újratekinttem a mérést és próbáltam ezeket a hibaforrásokat csökkenteni.

A lineáris erőtvényt úgy láthatjuk be, ha később tárgyalandó egyeneseket tudunk illeszteni az adatpontokra, sőt az egyenes paramétereiből meghatározhatjuk a rugóállandókat.



1. ábra. A mérés során használt állvány

Mérési adatok

1. rugó					
m [g]	Δx [cm]	$10 T_1$ [s]	$10 T_2$ [s]	$10 T_3$ [s]	\bar{T} [s]
50	1,6	2,38	2,68	2,72	0,259
100	3,4	3,65	3,6	3,65	0,363
150	5,1	4,4	4,4	4,34	0,438
200	6,4	5,03	5,06	5,15	0,508
250	8,5	5,6	5,72	5,78	0,57
300	10,15	6,28	6,31	6,16	0,625

1. táblázat. 1. rugó mérési adatai

2. rugó					
m [g]	Δx [cm]	$10 T_1$ [s]	$10 T_2$ [s]	$10 T_3$ [s]	\bar{T} [s]
50	4,3	4,04	4,28	4,07	0,413
100	8,9	5,96	5,87	5,94	0,592
150	13,2	7,35	7,22	7,28	0,728
200	17,6	8,15	8,34	8,31	0,826
250	22	9,37	9,29	9,38	0,934
300	26,3	10	10,16	9,87	1,001

2. táblázat. 2. rugó mérési adatai

Kiértékelés

$$g \left[\frac{m}{s^2} \right] \quad 9,81$$

3. táblázat. Egyéb szükséges adatok

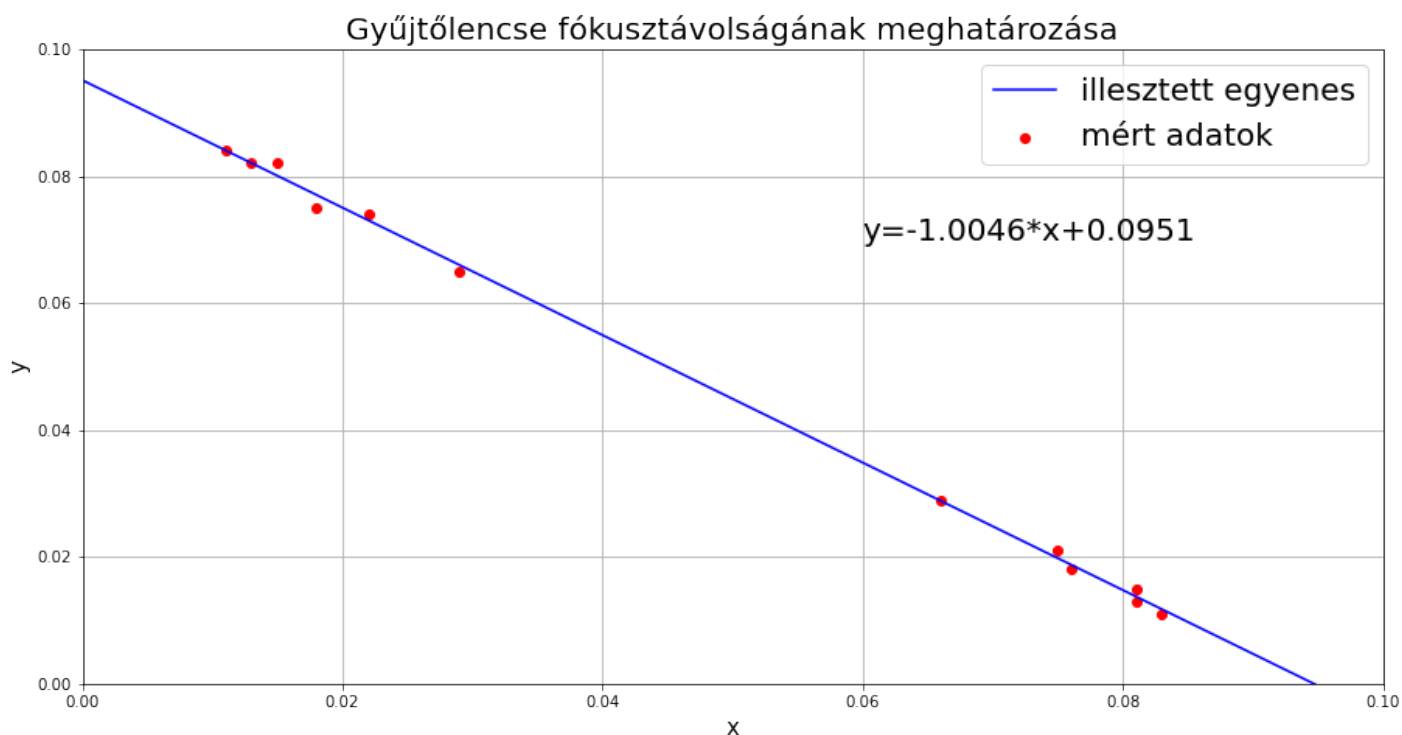
Statikus mérés

Az egyensúlyban lévő rugóra ható erőket felírva:

$$\sum F = m \cdot g - D \cdot \Delta x = 0 \quad (1)$$

$$m \cdot g = D \cdot \Delta x = F_{\text{rugó}} \quad (2)$$

Az erőtvény alapján tehát lineáris függvényt várunk $F_{\text{rugó}}(\Delta x)$ -re.



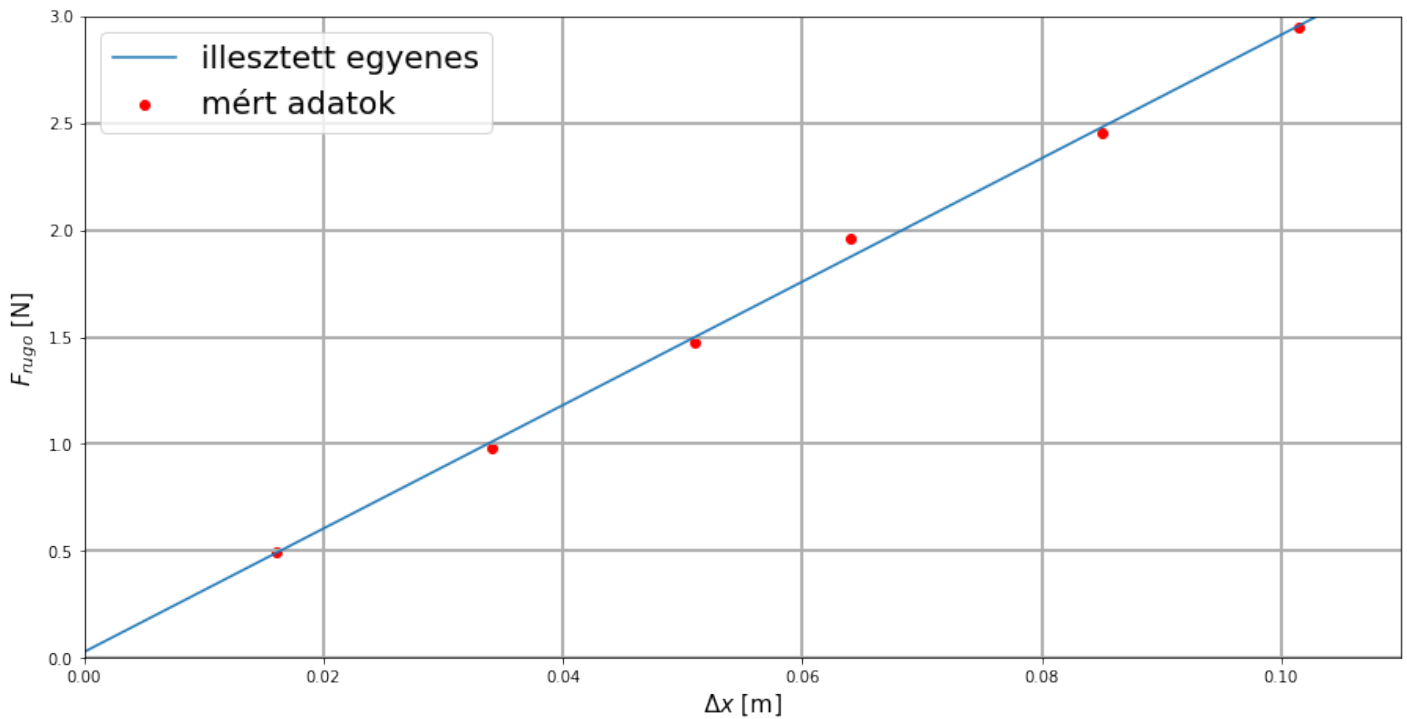
m_i [kg]	Δx_i [m]	$F_{\text{rugó},i}$ [N]
0,05	0,016	0,4905
0,1	0,034	0,981
0,15	0,051	1,4715
0,2	0,064	1,962
0,25	0,085	2,4525
0,3	0,1015	2,943

2. ábra. 1. rugó adataira illesztett egyenes

Egyenes paraméterei:

- $F_0 = 0.0292 \text{ N}$
- $D_{1,stat} = 28.818 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

A tengelymetszetből látható, hogy a rugó saját súlya alatt való megnyúlása elhanyagolhatóan kicsi. Az adatokra tényleg egyenes illeszkedik, a lineáris erőtvény ezzel igazolva lett.



m_i [kg]	Δx_i [m]	$F_{rugó,i}$ [N]
0,05	0,043	0,4905
0,1	0,089	0,981
0,15	0,132	1,4715
0,2	0,176	1,962
0,25	0,22	2,4525
0,3	0,263	2,943

3. ábra. 2. rugó adataira illesztett egyenes

Egyenes paraméterei:

- $F_0 = 0.001 \text{ N}$
- $D_{2,stat} = 11.153 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

A tengelymetszetből látható, hogy a rugó saját súlya alatt való megnyúlása elhanyagolhatóan kicsi. Az adatokra tényleg egyenes illeszkedik, a lineáris erőtvény ezzel igazolva lett ismét.

Dinamikus mérés

A rugóra akasztott test kitérítés után harmonikus rezgőmozgást végez, melynek periódusideje:

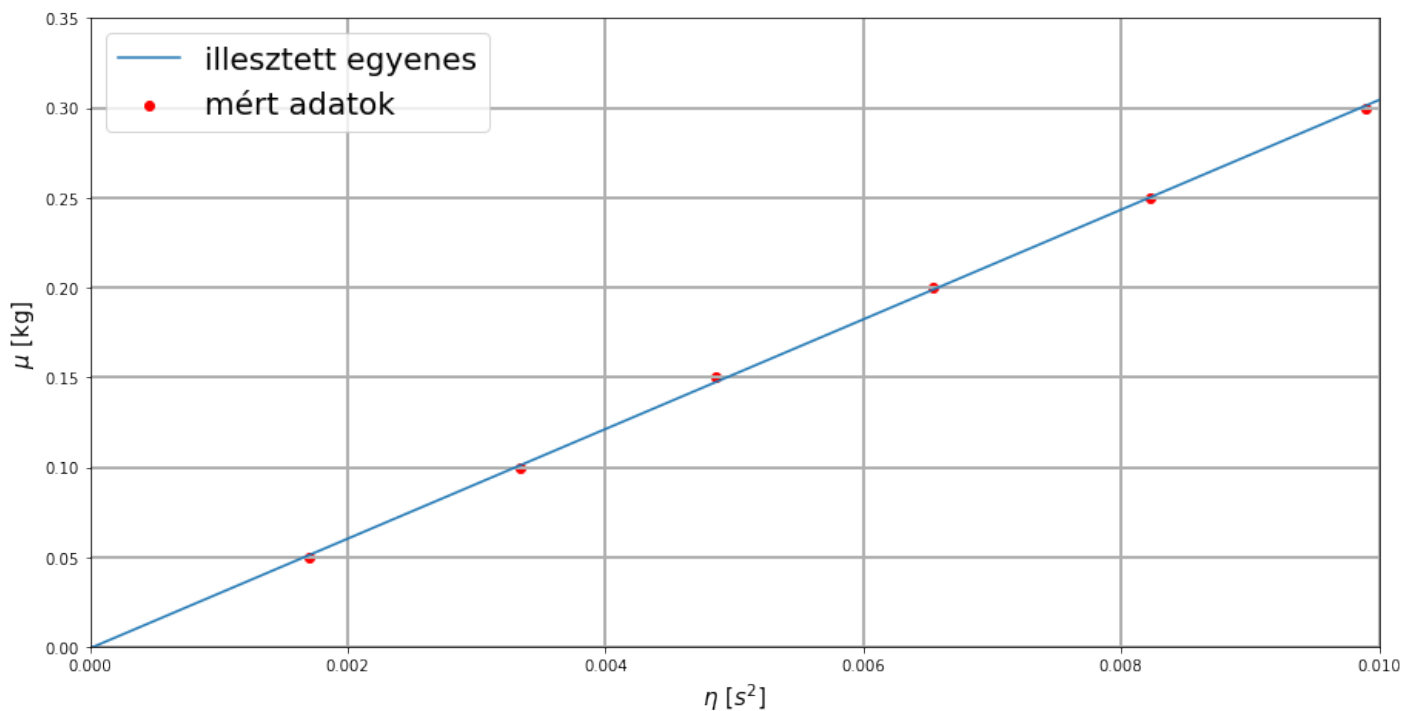
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{D}} \quad (3)$$

A képletben μ azt fejezi ki, hogy a rugó a saját súlya alatt is megnyúlik: $\mu = m + m_{eff}$, $m_{eff} \approx \frac{m_r}{3}$. A képletet átalakítva és új változók bevezetésével új lineáris függvényt kaphatunk, melynek egyik paramétere szintén a rugóállandó lesz.

$$m = D \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} - m_{eff} \quad (4)$$

Új változók: $m = \eta$, $\frac{T^2}{4\pi^2} = \xi$

$$\eta = D \cdot \xi - m_{eff} \quad (5)$$



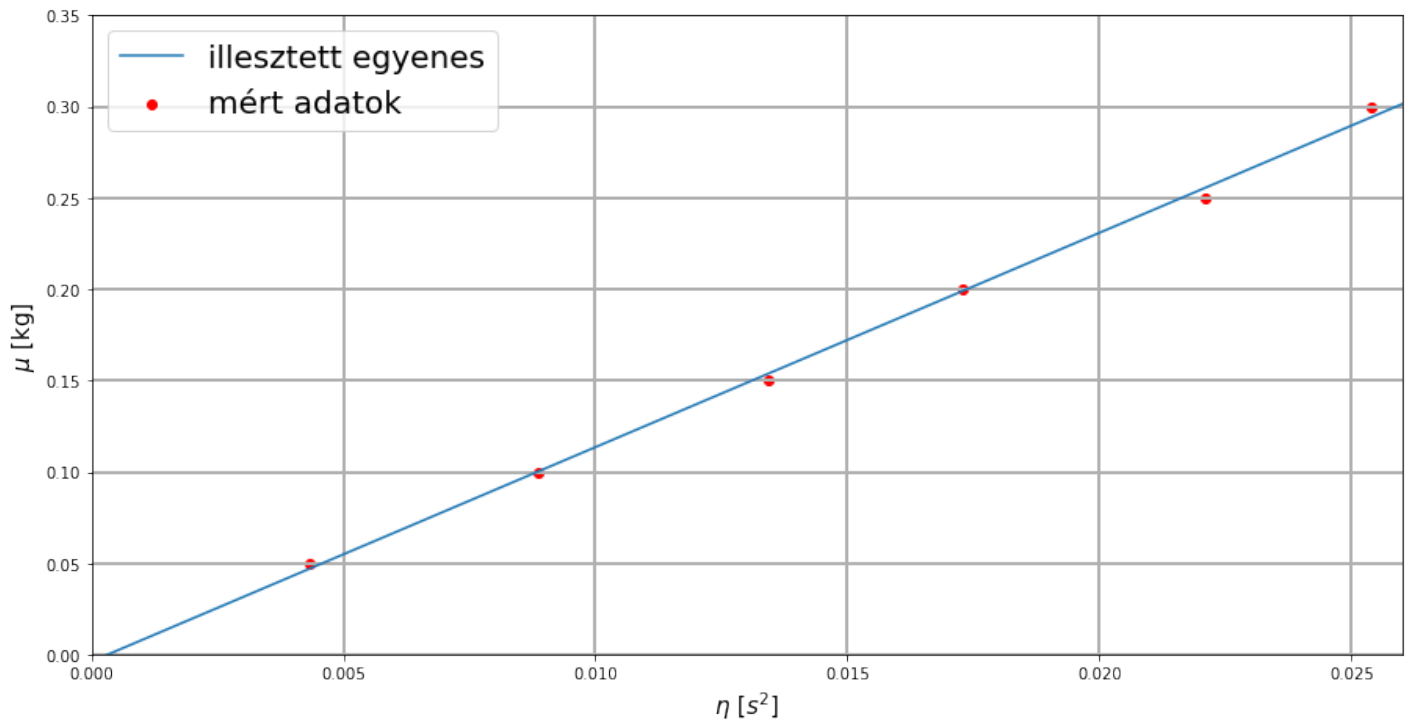
μ_i [kg]	T_i [s]	η_i [s ²]
0,05	0,259	0,0017
0,1	0,363	0,0033
0,15	0,438	0,0049
0,2	0,508	0,0065
0,25	0,57	0,0082
0,3	0,625	0,0099

4. ábra. 1. rugó rezgéseire illesztett egyenes

Egyenes paramétereit:

- $m_{eff} = 0,0007 \text{ kg}$
- $D_{1,din} = 30,516 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

A tengelymetszetből látható, hogy a rugó effektív tömege valóban kicsi. Az adatokra tényleg egyenes illeszkedik, a lineáris erőtvény ezzel igazolva lett dinamikus úton is.



μ_i [kg]	T_i [s]	η_i [s ²]
0,05	0,413	0,0043
0,1	0,592	0,0089
0,15	0,728	0,0134
0,2	0,826	0,0173
0,25	0,934	0,0221
0,3	1,001	0,0254

5. ábra. 2. rugó rezgéseire illesztett egyenes

Egyenes paramétereit:

- $m_{eff} = 0,0037 \text{ kg}$
- $D_{2,din} = 11,734 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

A tengelymetszetből látható, hogy a rugó effektív tömege valóban kicsi. Az adatokra tényleg egyenes illeszkedik, a lineáris erő-törvény ezzel igazolva lett dinamikus úton ismét.

Hibaszámítás

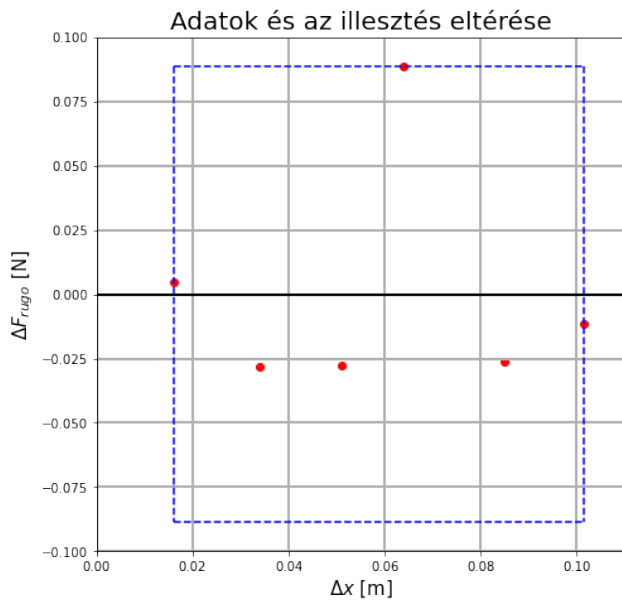
Hibaforrások

- mérőműszerek, leolvasás pontatlansága
- stopperóra megállításának pontatlansága
- rugó kilengése, elcsavarodása rezgés közben

Hibaszámítás téglalap módszerrel

Téglalap módszert fogom használni a merekségek, vagyis a kimért rugóállandók hibáinak meghatározásához.

$$\Delta = \frac{2 \cdot M_{teglalap}}{S_{teglalap}}$$

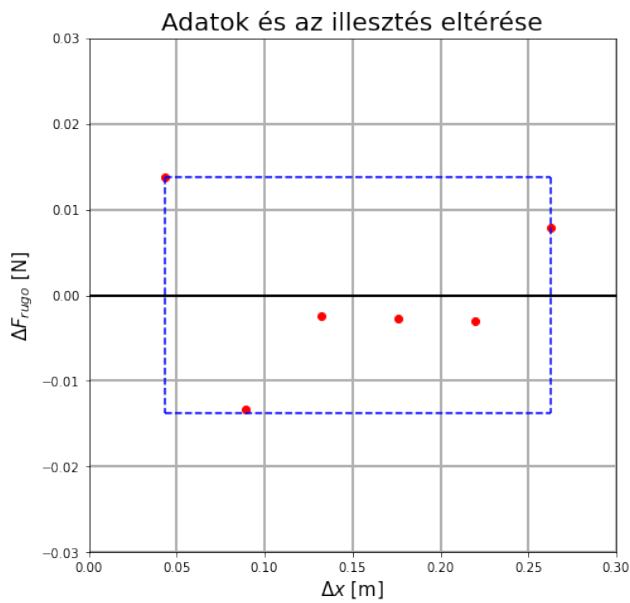


Δx_i [m]	$F_{rugo,i}$ [N]	$F_{ill,i}$ [N]	ΔF_i [N]
0,016	0,495	0,4903	0,0047
0,034	0,981	1,0091	-0,0281
0,051	1,4715	1,499	-0,0275
0,064	1,962	1,8736	0,0884
0,085	2,4525	2,4788	-0,0263
0,1015	2,943	2,9543	-0,0113

6. ábra. $D_{1,stat}$ hibája

$$\Delta D_{1,stat} = \frac{2 \cdot 0,0884N}{0,0855m} = 2,068 \frac{N}{m}$$

$$\delta D_{1,stat} = \frac{\Delta D_{1,stat}}{D_{1,stat}} \approx 0,0717 = 7,17\%$$

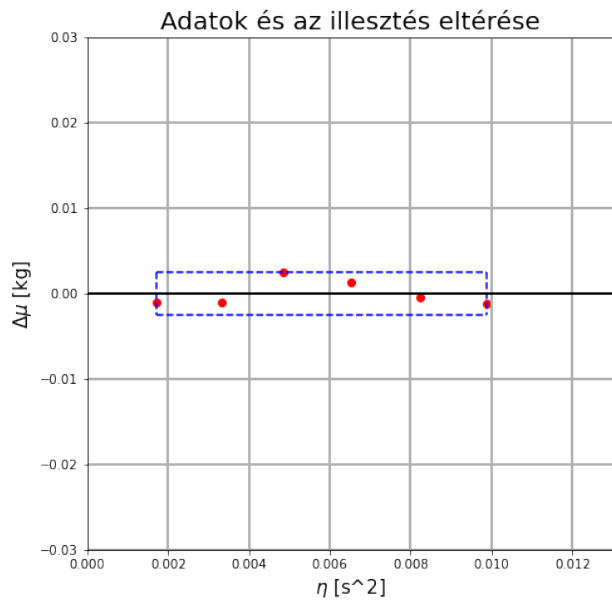


Δx_i [m]	$F_{rugo,i}$ [N]	$F_{ill,i}$ [N]	ΔF_i [N]
0,043	0,495	0,4813	0,0137
0,089	0,981	0,9944	-0,0134
0,132	1,4715	1,474	-0,0025
0,176	1,962	1,9647	-0,0027
0,22	2,4525	2,4555	-0,003
0,263	2,943	2,9351	0,0079

7. ábra. $D_{2,stat}$ hibája

$$\Delta D_{2,stat} = \frac{2 \cdot 0,0137N}{0,22m} = 0,1245 \frac{N}{m}$$

$$\delta D_{2,stat} = \frac{\Delta D_{2,stat}}{D_{2,stat}} \approx 0,011 = 1,1\%$$

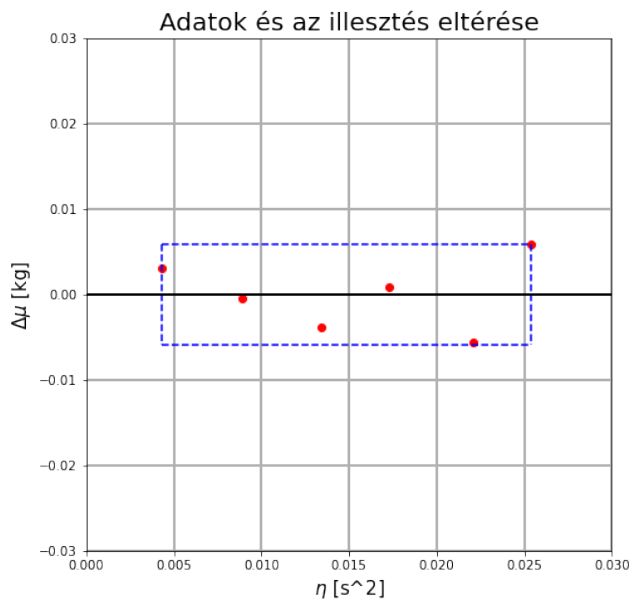


η_i [s ²]	μ [kg]	$\mu_{ill,i}$ [kg]	$\Delta\mu_i$ [kg]
0,0017	0,05	0,0511	-0,0011
0,0033	0,1	0,1011	-0,0011
0,0049	0,15	0,1475	0,0025
0,0065	0,2	0,1987	0,0013
0,0082	0,25	0,2504	-0,0004
0,0099	0,3	0,3012	-0,0012

8. ábra. $D_{1,din}$ hibája

$$\Delta D_{1,din} = \frac{2 \cdot 0,0025N}{0,0082m} = 0,6098 \frac{N}{m}$$

$$\delta D_{1,din} = \frac{\Delta D_{1,din}}{D_{1,din}} \approx 0,019 = 1,9\%$$



η_i [s ²]	μ [kg]	$\mu_{ill,i}$ [kg]	$\Delta\mu_i$ [kg]
0,0043	0,05	0,047	0,003
0,0089	0,1	0,1004	-0,0004
0,0134	0,15	0,1538	-0,0038
0,0173	0,2	0,1991	0,0009
0,0221	0,25	0,2556	-0,0056
0,0254	0,3	0,2941	0,0059

9. ábra. $D_{2,din}$ hibája

$$\Delta D_{2,din} = \frac{2 \cdot 0,0059N}{0,021m} = 0,562 \frac{N}{m}$$

$$\delta D_{2,din} = \frac{\Delta D_{2,din}}{D_{2,din}} \approx 0,047 = 4,7\%$$

Eredmények

	$D_{stat} \left[\frac{N}{m} \right]$	$D_{din} \left[\frac{N}{m} \right]$
1. rugó	$28.818 \pm 2,068$	$30,516 \pm 0,6098$
2. rugó	$11.153 \pm 0,1245$	$11,734 \pm 0,562$

4. táblázat. Eredmények összehasonlítása

Diszkusszió

Mindkét rugó esetén hibahatáron belül egyeznek a mért értékek, ami arra enged következtetni, hogy pontos volt a mérés.

Érdemes kiemelni, hogy a nagyobb rugóállandójú rugó esetén a statikus mérésnek nagyobb a relatív hibája. Ez valószínűleg a megnyúlás pontatlan leolvasására vezethető vissza.

A kisebb rugóállandójú rugó esetén pedig pont a dinamikus mérés relatív hibája a nagyobb. Ennek az lehet az oka, hogy hosszabb lengésideje van, ezért a mérést eltorzító tényezők (kilengés, csavarodás) jobban érvényesültek.