

FIZIKAI ALAPMÉRÉSEK LABORATÓRIUM



Elméleti előadás – Bővített kiadás

Készítette: Boldizsár Zoltán Attila

(Felhasználtam Jenei Péter hasonló témájú prezentációját, a munkáját még nyomokban tartalmazza.)

1. Jegyzőkönyv-készítés: általános elvárások

- A jegyzőkönyveknek **meghatározott tartalmú részei** vannak.
- A **részek sorrendjét tartani kell** (számozott fejezetekre bontásuk nem szükséges)
- Egy **jegyzőkönyveknek önmagában is értelmesnek kell lenniük:**

A JK alapján bármely - az alapfogalmakkal tisztában lévő - ember számára egyértelmű kell legyen, hogy kik, milyen céllal végeztek méréseket, hogy végezték el azt és mi lett a mérés eredménye, valamint hogy mennyire megbízható a kapott eredmény.

- Az **egyenleteket, matematikai összefüggéseket külön sorba írjuk**

Pl.: Ismeretes, hogy a matematikai inga lengési ideje kis szögek esetén:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1)$$

Ahol l az inga hossza, g pedig a gravitációs állandó értéke.



1. Jegyzőkönyv-készítés: általános elvárások

- **Fizikai mennyiségek** megadása minden esetben **mértékegységgel együtt** történjen
 - Táblázatoknál a **felső sorban zárójelben** adjuk meg a mértékegységet, **ennek megfelelőek** legyenek az értékek **a táblázat minden sorában!**

Az alábbi táblázatban egy matematikai inga lengési idejének mérési eredményei vannak összefoglalva és részben kiértékelve. Az inga hosszát l -el jelöljük, a periódusidőt pedig T -vel.

l (m)	$10 T$ (s)	T (s)	T^2 (s²)
0,15	2,15	0,215	0,046225
0,45	5,53	0,553	0,305809
0,75	8,92	0,892	0,795664
1,05	10,45	1,045	1,092025

(Az itt feltüntetett adatok nem mérési eredmények, csupán a szemléltetést szolgálják!)



1. Jegyzőkönyv-készítés: általános elvárások

- **Jelmagyarázatok és hivatkozások:**

- Az egyenletekben, illetve ábrákon szereplő **szimbólumok** mindegyikéről meg kell mondani, hogy **milyen mennyiségeket jelölnek**.
- A **képletekre** történő **hivatkozás** lehetőleg **azonosító alapján** történjen
- Az **ábrák** esetében a **képaláírásban** szerepeljen **azonosító**, az egyes ábrákra ennek segítségével hivatkozzunk

- Mondatrészeket sem szabad a segédanyagból másolni, **önálló megfogalmazás kell**

- **Állandók és paraméterek megadása:**

- Több mérés esetén is előfordul, hogy valamilyen mások által mért, vagy meghatározott paramétert kell használni a számítások során (pl. a gravitációs állandó értéke).
- Minden esetben adjuk meg, hogy pontosan milyen értékekkel számoltunk!
- Eredmények irodalmi értékkel való összevetésekor nevezzük meg az irodalmi érték forrását!



1. Jegyzőkönyv-készítés: a jegyzőkönyv részei

0. Minden jegyzőkönyv elején kell, hogy szerepeljenek a következők:

- A mérés címe
- A mérést végző személy neve
- A mérőpár neve (ha volt)
- Mérés végzésének időpontja
- Jegyzőkönyv leadásának időpontja (leadáskor kitöltendő)

1. A mérés célja:

Rövid megfogalmazása annak, hogy **mit mértünk vagy vizsgáltunk** és hogy **milyen céllal** tettük ezt. A módszert itt ne részletezzük, se az elméleti háttérrel.

Pl.: Egy matematikai inga lengési idejét vizsgáltuk különböző ingahosszak esetén, hogy meghatározzuk a gravitációs állandó értékét.

Vagy: A matematikai inga lengési ideje, valamint az inga hossza közt fennálló elméleti kapcsolat igazolása, továbbá az elmélethez tartozó szabad paraméterek meghatározása.

2. Mérőeszközök (felsorolás)

Itt **minden, a mérés során használt eszközt fel kell sorolni**. Nem csak a műszereket, hanem mindent, amire szükség volt a mérések elvégzéséhez. Amennyiben a használt eszközöknek van azonosítószáma, azt is fel kell jegyezni!



1. Jegyzőkönyv-készítés: a jegyzőkönyv részei

3. A mérés rövid leírása

Ebben a részben le lehet írni a **mérés elvének elméleti háttérét**, valamint a **mérés végzésének lépéseit**. Nincs szükség se az elmélet alapjainak levezetésére, sem a mérés folyamatának túlrészletezésére.

Pl.: Ismeretes, hogy a matematikai inga lengési ideje kis szögek esetén:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Ahol l az inga hossza, g pedig a gravitációs állandó értéke. A mérést úgy végeztük, hogy először beállítottuk az első hosszúságot a mérőszalag segítségével. Az ingát kitérítettük, majd miután kellően szabályosnak ítéltük a mozgását, lemértük 10 periódus idejét, hogy ezáltal csökkentsük a reakcióidőből származó hibát. Ezt a folyamatot további 4 ingahossz mellett ismételtük meg.

Ami nem kell: az ingahossz beállításához először megengedtem az állvány tetején található szorítószerkezetet, majd miután a kívánt pozícióba helyeztem a fonalat, visszaszorítottam azt. Ez igencsak nehézkes volt, mert a mérőszalagot nem tudtam pontosan a fonál menete mellé tenni, inkább csak „besaccoltam” az értékeket. Az ingát végül kitérítettem hozzávetőlegesen $7,5^\circ$ -al, majd óvatosan elengedtem, hogy lehetőleg az indítás módja a lehető legszabályosabb legyen az inga mozgása szempontjából, de valamit elronthattam, mert egyrészt billegett a test, másrészt oldalra is kilengett kicsit. Mikor másodjára próbálkoztam, akkor már nem volt kúpingás a mozgás, de a billegés még mindig megvolt. Aztán a laborvezető tanácsára úgy engedtem el, hogy finoman, óvatosan és lassan csúszttam ki a tömeget az ujjaim közül. Ezzel megvolt az első mérés. A másodiknál meg az volt, hogy nem húztam meg eléggé a szorítószerkezetet, emiatt meg lengés közben elkezdett kicsúszni az egész. Szóval kezdhettem az egészet előlről. Szóval ismét kiengedtem a szorítót, beállítottam a kívánt hosszát. Na és ekkor jutott eszembe, hogy nem számítottam bele az előbbi mérésbe, hogy az inga tömegközéppontjáig kell mérni az ingahosszt. Tanácsot kértem a laborvezetőtől, hogy mitévő legyek. Kezdem újra az egészet, vagy csináljam végig így és csak a hibaforrásokba említsem meg a dolgot? Erre a laborvezető azt mondta, hogy mindegy melyiket csinálom, csak minden mérés hasonló körülmények közt menjen végbe, mert akkor a szisztematikus hosszúságelcsúszás amúgy is kiesik. Csak említsem meg a jegyzőkönyvben, hogy melyiket csináltam.



1. Jegyzőkönyv-készítés: a jegyzőkönyv részei

4. Mérési adatok

Itt még ne kezdjük el a kiértékelést. **Csupán** azokat az információkat szedjük össze, **amiket mértünk**. Legtöbbször **célravezető a táblázatos forma**, ügyelni kell a **mértékegységekre**!

5. Hibaforrások

A mérés szempontjából fontos hibák és azok nagyságának felsorolása. Vannak olyan mérések, amelyeknél nem szükséges hibaszámítást végezni, viszont **a potenciális hibaforrások felsorolása mindig kötelező feladat!**

6. Kiértékelés

Itt kell részletezni, hogy az eredményekhez való eljutáshoz milyen számításokat kell végezni, pl:

Az matematikai inga lengési idejét megadó képletet megfelelően transzformálva a következő összefüggésre jutunk:

$$l = \frac{g}{4\pi^2} T^2$$

Így tehát, ha T^2 -et tekintjük változónak, akkor egy lineáris kapcsolatot kapunk. Vagyis ha az ingahosszakat ábrázoljuk a periódusidők négyzetének függvényében és az így kapott pontokra egyenest illesztünk, akkor az illesztett egyenes meredekségének segítségével meghatározható a gravitációs állandó értéke.



1. Jegyzőkönyv-készítés: a jegyzőkönyv részei

6. Kiértékelés (folytatás)

- **Számolt adatok közlése!** Lehetőség szerint lépésről lépésre.
- Illesztések esetén itt kell megadni az **illesztések eredményét**.
- Az illesztésekről **ábrákat** kell készíteni (melyen a mérési pontok is látszanak)

7. Hibaszámítás

Miután megkaptuk az eredményeket, ki kell számítani azok hibáját, hogy tudjunk valamit mondani az eredmények megbízhatóságáról.

A Fizikai alapmérések laborban **illesztések** esetén általában **szimmetrikus téglalap-módszerrel** kell számolni. **Képletes számítások** esetén pedig a **hibák terjedését** kell számítani.

8. Eredmények

Eredmények összefoglalása hibával együtt (eredménytáblázat).



1. Jegyzőkönyv-készítés: a jegyzőkönyv részei

9. Diskusszió

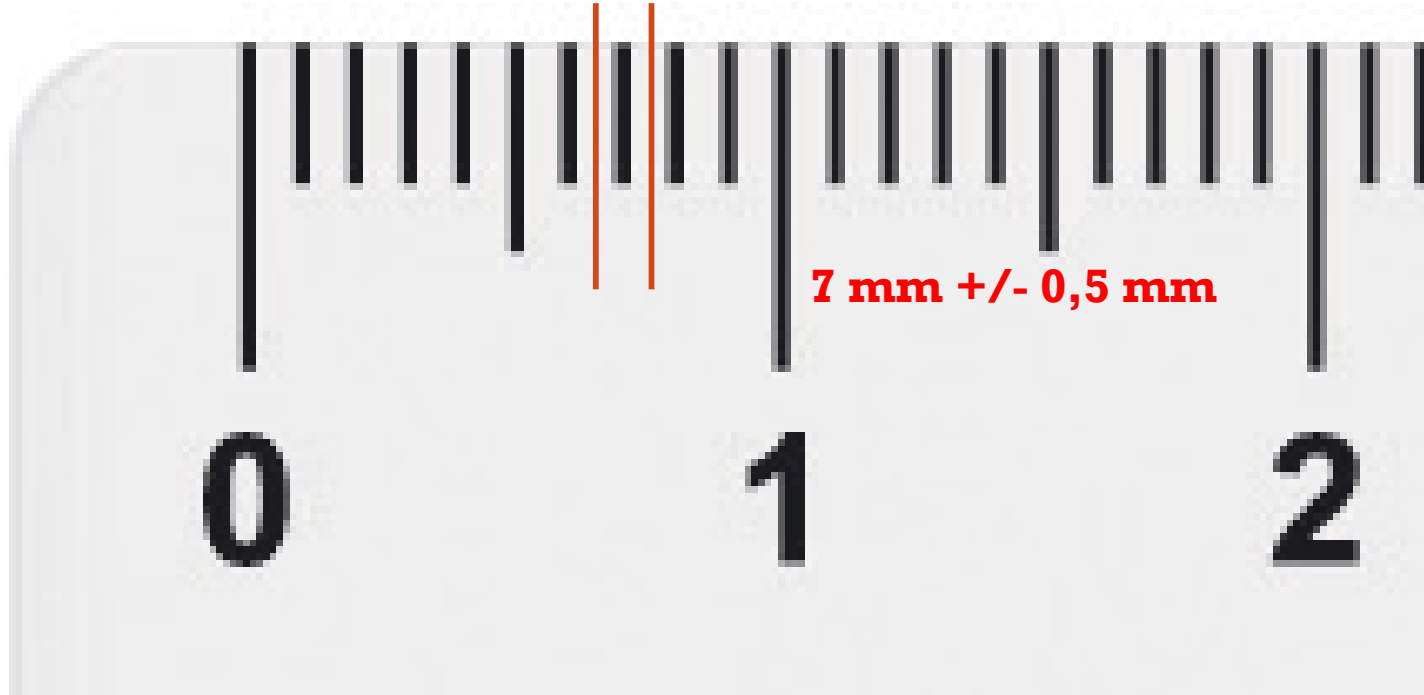
- **Mérési tapasztalatok összefoglalása**
- **Kapott eredmények összehasonlítása irodalmi értékekkel (hibán belül egyeznek-e?)**
(Irodalmi értékek esetén **hivatkozás a forrásra**)
- **Ha különböző módszereket is alkalmaztunk ugyanazon paraméterek meghatározására, akkor ezek összevetése (hibán belül egyeznek-e?)**
- **Az eredmény megbízhatóságának megítélése**
- **A várttól nagy mértékben eltérő értékeket is meg kell tudni magyarázni**
(A laborban nem az a cél, hogy az irodalmi, vagy várt értékhez minél közelebbi értéket mérjünk ki „valahogy”. **A mérési eredményeket nem szabad „kozmetikázni”**. Csak olyan adatokat lehet felhasználni, amiket a mérést végző személy valóban kimért. **Amennyiben nem a várt értéket kaptuk, azt is meg kell tudni magyarázni, hogy mi lehetett ennek az oka.**)



2. Mérési eredmények és hibaforrások

Műszer hibája:

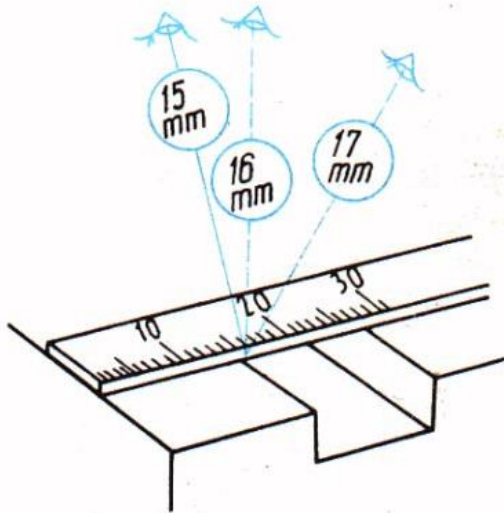
- Tipikusan a legkisebb osztás fele: leolvasási hibának is szokás nevezni. Sokszor ezt tekintik a „műszer hibájának”.
- Vannak kalibrálást, hitelesítést igénylő műszerek (sok berendezés által mért mennyiség akár 10% hibát is tartalmazhat!)
- „Holt játék” és „offset” (a 0 helyzet nem 0)



2. Mérési eredmények és hibaforrások

Mérést végző/előkészítő személy hibái és azok minimalizálása:

- **Nézőszög-hiba:** amennyiben lehetséges, igyekezzünk merőlegesen tekinteni a skálára, ezt sokszor tükröződő háttér, vagy kettős vonal segíti
- **Pontatlan beállítás:** elképzelhető, hogy pl. a 0 helyzet nincs megfelelően beállítva, vagy nem azt tekinti 0 helyzetnek a mérést végző, ami valójából a 0 helyzet
- **„Ferde” mérés:** esetfüggő (megjegyzés: felületre merőlegesen körív)
- **Reakcióidő:** mérjünk több periódust, nagyobb időt (ha lehetséges)



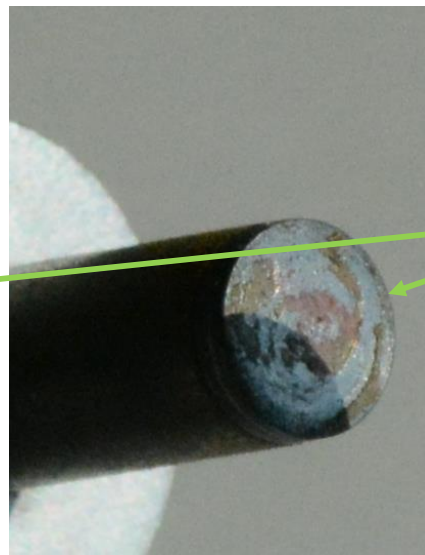
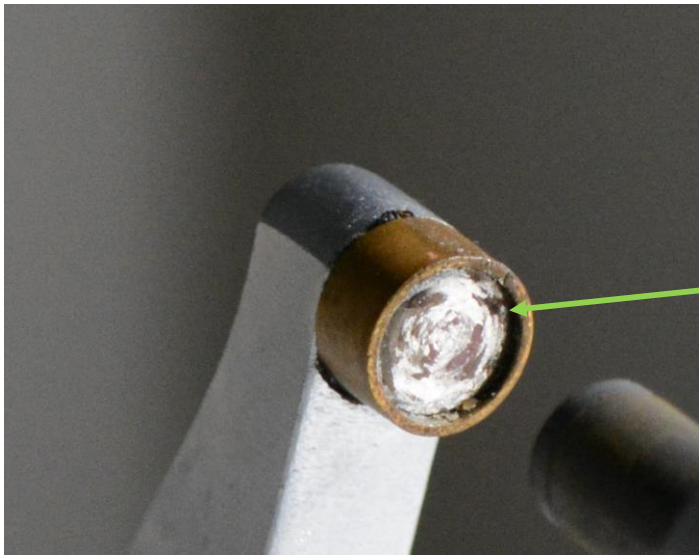
Képek: <http://furdancs.reblog.hu/fem01-femipari-alapok-nem-allithato-meroeszkozok>



2. Mérési eredmények és hibaforrások

Mérést végző/előkészítő személy hibái és azok minimalizálása:

- **Nézőszög-hiba:** amennyiben lehetséges, igyekezzünk merőlegesen tekinteni a skálára, ezt sokszor tükröződő háttér, vagy kettős vonal segíti
- **Pontatlan beállítás:** elképzelhető, hogy pl. a 0 helyzet nincs megfelelően beállítva, vagy nem azt tekinti 0 helyzetnek a mérést végző, ami valójából a 0 helyzet
- **„Ferde” mérés:** esetfüggő (megjegyzés: felületre merőlegesen körív)
- **Reakcióidő:** mérjünk több periódust, nagyobb időt (ha lehetséges)



0-helyzeti hibát
szennyeződések
is okozhatnak.



2. Mérési eredmények és hibaforrások

„Statisztikus” hiba – egy mérés nem mérés:

- **Ugyanazon mennyiség többszöri mérése:** a mérések körülményei változnak. Nem pont ugyanott történik a mérés (odateszem, visszateszem), nem azonos mechanikus feszültség (a mérést végző hol jobban, hol kevésbé szorítja meg a mintát, pl. csavarmikrométer, vagy tolómérő esetén), a minta nem tökéletesen szabályos (több helyen kell mérni és inkább az átlagot érdemes figyelembe venni)
- **Átlag / legjobb érték:**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

- **Szórás:** a mért érték hibája, ha csak a szórást vesszük figyelembe, akkor $\Delta x = 3\sigma$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

- **Kiugró pontok:** a kiugró pontokat esetenként ki szokás hagyni. Ha ilyet teszünk, azt jeleznünk kell, illetve megmagyarázni, hogy mi okozhatta a nagy eltérést)



2. Mérési eredmények és hibaforrások

Az „eredő” hiba:

Mérési hiba/bizonytalanság (abszolút hiba) általános formában a következő módon összegződik:

$$\Delta x = \sqrt{\Delta_{Stat}^2 x + \Delta_{m\u00faszer}^2 x + \Delta_{egy\u00e9b}^2 x}$$

A fizikai alapm\u00e9r\u00e9sek laborban alapvet\u0151en csak a **m\u00faszer hib\u00e1j\u00e1t** (legkisebb oszt\u00e1s / kijelzett egys\u00e9g fele), valamint **a m\u00e9r\u00e9st v\u00e9gz\u0151 szem\u00e9ly hib\u00e1j\u00e1t** (reakci\u00f3id\u0151) vessz\u00fcnk figyelembe:

$$\Delta x = \sqrt{\cancel{\Delta_{Stat}^2 x} + \Delta_{m\u00faszer}^2 x + \cancel{\Delta_{egy\u00e9b}^2 x}}$$

(A fenti k\u00e9pletben a reakci\u00f3id\u0151t a m\u00faszer hib\u00e1j\u00e1ba tudjuk be, mivel a legt\u0151bbszor az id\u0151m\u00e9r\u0151 m\u00faszer legkisebb oszt\u00e1s\u00e1nak / egys\u00e9g\u00e9nek fel\u00e9n\u00e9l nagyobb a reakci\u00f3id\u0151b\u0151l sz\u00e1rmaz\u00f3 hiba.)



3. Mért értékek kezelése

Az értékek megadása hibával:

Amikor egy mérési eredményt közlünk, akkor meg kell adnunk annak hibáját is, a hibának megfelelő precízióval.

A hibát legfeljebb 2 értékes (0-tól különböző) jegy pontossággal adjuk meg.

Legyen egy mérés eredménye és annak hibája:

$$x = 19.24483 \pm 0.02631 \text{ cm}$$

Ennek megfelelő megadása (kerekítés!):

$$x = 19.245 \pm 0.026 \text{ cm}$$

vagy

$$x = 19.24 \pm 0.03 \text{ cm}$$

Ha 0 érték szerepel a tizedesjegyek helyén, azt is ki kell írni!

$$x = 1 \pm 0.02 \text{ cm}$$

→

$$1.00 \pm 0.02 \text{ cm}$$

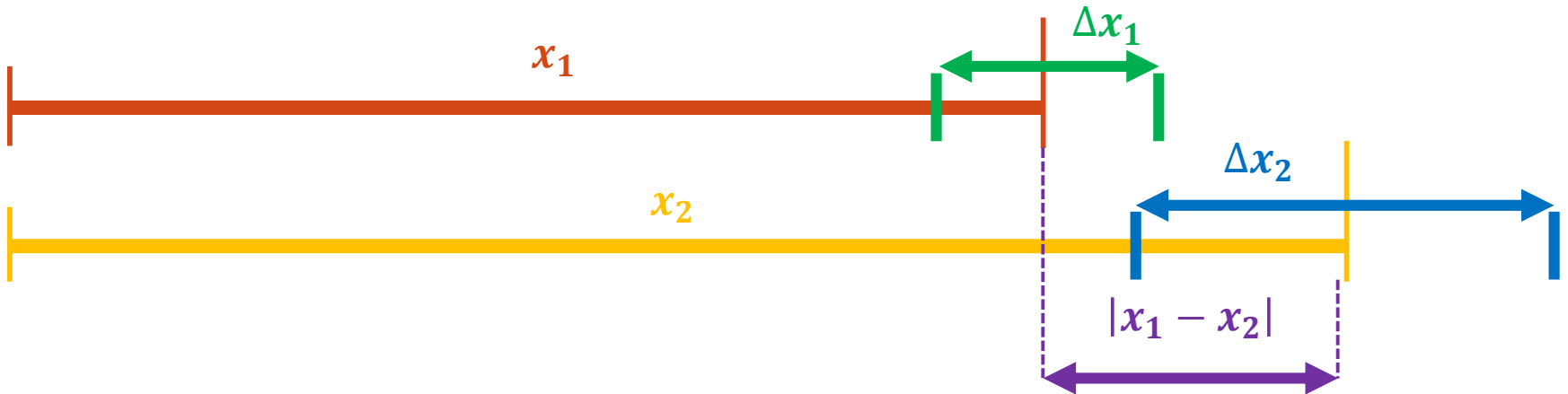


3. Mért értékek kezelése

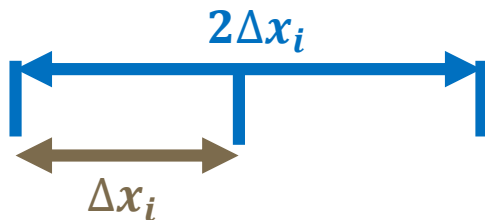
Mikor mondjuk, hogy két mérési eredmény hibán belül egyezik?

Az x_1 és x_2 érték hibán belül azonos, ha $|x_1 - x_2| \leq \Delta x_1 + \Delta x_2$

(mondhatjuk úgy is, hogy „ha a hibatartományok „metszik” egymást”)



A Δx_i érték a mért értéktől való legnagyobb eltérés:



3. Mért értékek kezelése

Hibaterjedés: abszolút és relatív hiba

Az eddig is használt (szimplán „hibának” nevezett) mennyiséget **abszolút hibának** is nevezik.

$$x \pm \Delta x$$

Δx : abszolút hiba

Sokszor beszédesebb, valamint a hibaterjedéskor használatos az ún. **relatív hiba**, amely azt mondja meg, hogy mekkora a hiba a mért értékhez képest:

$$\delta x = \left| \frac{\Delta x}{x} \right|$$

δx : relatív hiba

Természetesen a relatív hibából meg lehet határozni az abszolút hibát:

$$\Delta x = x \cdot \delta x$$



3. Mért értékek kezelése

Hibaterjedés: általánosan

A hibaterjedés vizsgálatának lényege: a mért mennyiségek sokszor nem azok a mennyiségek, amiket meg szeretnénk határozni. Sokszor fordul elő, hogy **a meghatározandó mennyiség valamilyen függvénykapcsolatban áll a mért érték(ek)kel**. Mivel a meghatározandó érték a mért érték(ek) által adódik meg, **a mért érték(ek) hibája határozza meg a származtatott mennyiség hibáját**.

Tegyük fel, hogy van egy $f(x, y, z)$ függvény segítségével meghatározandó érték, mely függ az x, y, z mért mennyiségektől. Ekkor az $f(x, y, z)$ függvénnyel meghatározandó paraméter abszolút hibája:

$$\Delta f(x, y, z) = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \Delta z$$



3. Mért értékek kezelése

Hibaterjedés: speciális esetekben (eredmények)

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{c \cdot \Delta x}{c \cdot x} = \frac{\Delta x}{x} = \delta x !!!$$

Konstanssal szorzás:

$$y(x) = c \cdot x$$

$$\Delta y = |c| \cdot \Delta x$$

$$k = 2\pi r$$

Összeadás/kivonás:

$$X(x_1, x_2) = x_1 \pm x_2$$

$$\Delta X = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

Szorzás:

$$V(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$$

$$\delta V = \delta x + \delta y + \delta z$$

Osztás:

$$Q(x, y) = \frac{x}{y}$$

$$\delta Q = \delta x + \delta y$$

Hatványozás:

$$V(a) = a^n$$

$$\delta V = |n| \cdot \delta a$$

$$\sqrt{x} = x^{1/2} !!!$$



3. Mért értékek kezelése

Hibaterjedés: speciális esetekben (levezetések I.)

Konstanssal szorzás: $y(x) = c \cdot x$ $\Delta y = |c| \cdot \Delta x$

$$\Delta y = \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| \cdot \Delta x = \left| \frac{\partial (c \cdot x)}{\partial x} \right| \cdot \Delta x = |c| \cdot \Delta x$$

Összeadás/kivonás: $X(x_1, x_2) = x_1 \pm x_2$ $\Delta X = \Delta x_1 + \Delta x_2$

$$\Delta X = \left| \frac{\partial X}{\partial x_1} \right| \cdot \Delta x_1 + \left| \frac{\partial X}{\partial x_2} \right| \cdot \Delta x_2 = \left| \frac{\partial (x_1 \pm x_2)}{\partial x_1} \right| \cdot \Delta x_1 + \left| \frac{\partial (x_1 \pm x_2)}{\partial x_2} \right| \cdot \Delta x_2 = |1| \cdot \Delta x_1 + |\pm 1| \cdot \Delta x_2 = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

Szorzás: $V(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$ $\delta V = \delta x + \delta y + \delta z$

$$\begin{aligned} \Delta V &= \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right| \cdot \Delta x + \left| \frac{\partial V}{\partial y} \right| \cdot \Delta y + \left| \frac{\partial V}{\partial z} \right| \cdot \Delta z = \left| \frac{\partial (x \cdot y \cdot z)}{\partial x} \right| \cdot \Delta x + \left| \frac{\partial (x \cdot y \cdot z)}{\partial y} \right| \cdot \Delta y + \left| \frac{\partial (x \cdot y \cdot z)}{\partial z} \right| \cdot \Delta z = \\ &= |y \cdot z| \cdot \Delta x + |x \cdot z| \cdot \Delta y + |x \cdot y| \cdot \Delta z \end{aligned}$$

$$\delta V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{|y \cdot z|}{x \cdot y \cdot z} \cdot \Delta x + \frac{|x \cdot z|}{x \cdot y \cdot z} \cdot \Delta y + \frac{|x \cdot y|}{x \cdot y \cdot z} \cdot \Delta z = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z} = \delta x + \delta y + \delta z$$



3. Mért értékek kezelése

Hibaterjedés: speciális esetekben (levezetések II.)

Osztás: $Q(x, y) = \frac{x}{y}$ $\delta Q = \delta x + \delta y$

$$\Delta Q = \left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right| \cdot \Delta x + \left| \frac{\partial Q}{\partial y} \right| \cdot \Delta y = \left| \frac{\partial (x/y)}{\partial x} \right| \cdot \Delta x + \left| \frac{\partial (x/y)}{\partial y} \right| \cdot \Delta y = \left| \frac{1}{y} \right| \cdot \Delta x + \left| -\frac{x}{y^2} \right| \cdot \Delta y$$

$$\delta Q = \frac{\Delta Q}{Q} = \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \Delta x + \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y^2} \cdot \Delta y = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} = \delta x + \delta y$$

Hatványozás: $V(a) = a^n$ $\delta V = |n| \cdot \delta a$

$$\Delta V = \left| \frac{\partial V}{\partial a} \right| \cdot \Delta a = \left| \frac{\partial (a^n)}{\partial a} \right| \cdot \Delta a = |n \cdot a^{n-1}| \cdot \Delta a$$

$$\delta V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{|n \cdot a^{n-1}|}{a^n} \cdot \Delta a = \frac{|n| \cdot \Delta a}{a} = |n| \cdot \delta a$$



3. Mért értékek kezelése

Hibaterjedés: további, összetettebb példák (csak szimbolikus eredmény)

$$f(x, y) = ax + by \longrightarrow \Delta f(x, y) = |a|\Delta x + |b|\Delta y$$

$$f(x, y, z) = d \cdot x^a \cdot y^b \cdot z^c \longrightarrow \frac{\Delta f(x, y, z)}{f(x, y, z)} = \left| a \frac{\Delta x}{x} \right| + \left| b \frac{\Delta y}{y} \right| + \left| c \frac{\Delta z}{z} \right|$$

Gyakorló feladatok:

- 1) Egy téglalap méreteit tolómérővel mértük. Az oldalak hossza: 5 mm és 0,8 mm. Mekkora a kerület és terület, valamint a kerület és terület abszolút és relatív hibája?
- 2) Egy lövedék tömege $m = 10 \pm 0,5$ g, torkolati sebessége $v = 500 \pm 5$ m/s. Mekkora a lendületének és mozgási energiájának abszolút és relatív hibája abban a pillanatban, amikor a fegyver csövét elhagyja?



4. Függvényillesztés

Miért illesztünk függvényeket?

- Mért mennyiségek valamilyen eloszlást, tendenciát mutatnak.
- Az eredményekkel kapcsolatban elméleti feltevés: mi mitől milyen függvény szerint függhet.
- Az elmélet részét képező szabad/kérdéses paraméterek meghatározása.
- Általában bonyolultabb függvénykapcsolatok is előfordulhatnak, a **Fizikai alpmérés laborban** csak lineáris függvények illesztésével foglalkozunk (2 szabad paraméter).
- Az **illesztéssel** történő **paramétermeghatározás bizonyos** jellegű **szisztematikus hibákat** teljesen **ki tud védeni**.
- (Sok bonyolultabb függvénykapcsolat is átírható lineárisra, ha valamely változó helyett annak egy függvényét használjuk új változóként. Ez időnként becsapós lehet, ha a paraméterek hibája nincs kellő módon figyelembe véve.)



4. Függvényillesztés – (egyenesillesztés, levezetés I.)

Hogyan történik az illesztés, mennyire jó az eredmény?

- Szabad paraméterek meghatározása: iteráció, a legkisebb négyzetes eltérést figyelve. Lineáris függvény esetén egzakt eredmény kapható!

$$y(x) = m \cdot x + y_0 \quad \text{A négyzetes eltérés:} \quad \Delta^2 = \sum_{i=1}^N [y_i - y(x_i)]^2$$

- Ahol y_i -k az x_i helyeken mért y értékek.
- A négyzetes eltérés minimuma ott van, ahol ezen érték meredekség, illetve tengelymetszet szerinti deriváltja zérus:

$$\frac{d\Delta^2}{dm} = \frac{d}{dm} \sum_{i=1}^N [y_i - m \cdot x_i - y_0]^2 = \sum_{i=1}^N 2 \cdot (y_i - m \cdot x_i - y_0) \cdot (-x_i) = 0$$

$$\frac{d\Delta^2}{dy_0} = \frac{d}{dy_0} \sum_{i=1}^N [y_i - m \cdot x_i - y_0]^2 = \sum_{i=1}^N 2 \cdot (y_i - m \cdot x_i - y_0) \cdot (-1) = 0$$



4. Függvényillesztés – (egyenesislesztés, levezetés II.)

Hogyan történik az illesztés, mennyire jó az eredmény?

$$\sum_{i=1}^N y_0 = N \cdot y_0$$

$$\frac{d\Delta^2}{dy_0} = \sum_{i=1}^N 2 \cdot (y_i - m \cdot x_i - y_0) \cdot (-1) = 0 \implies \boxed{\sum_{i=1}^N (y_i - m \cdot x_i) = N \cdot y_0}$$

$$y_0 = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - m \cdot x_i)}{N} = \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{N} - m \cdot \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N} = \bar{y} - m \cdot \bar{x} \quad \boxed{y_0 = \bar{y} - m \cdot \bar{x}}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta^2}{dm} &= \sum_{i=1}^N (y_i - m \cdot x_i - y_0) \cdot (-x_i) = - \sum_{i=1}^N y_i \cdot x_i + m \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 + y_0 \sum_{i=1}^N x_i = \\ &= - \sum_{i=1}^N y_i \cdot x_i + m \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 + (\bar{y} - m \cdot \bar{x}) \cdot \sum_{i=1}^N x_i = 0 \end{aligned}$$



4. Függvényillesztés – (egyenesisillesztés, levezetés III.)

Hogyan történik az illesztés, mennyire jó az eredmény?

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta^2}{dm} &= -\sum_{i=1}^N y_i \cdot x_i + m \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 + (\bar{y} - m \cdot \bar{x}) \cdot \sum_{i=1}^N x_i = \\ &= -\sum_{i=1}^N y_i \cdot x_i + m \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 + \bar{y} \cdot \sum_{i=1}^N x_i - m \cdot \bar{x} \cdot \sum_{i=1}^N x_i = \\ &= m \cdot \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 - \bar{x} \cdot \sum_{i=1}^N x_i \right) + \bar{y} \cdot \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N y_i \cdot x_i = 0\end{aligned}$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \cdot x_i - \bar{y} \cdot \sum_{i=1}^N x_i}{\left(\sum_{i=1}^N x_i^2 - \bar{x} \cdot \sum_{i=1}^N x_i \right)}$$



4. Függvényillesztés – (az eredmény)

Hogy történik az illesztés, mennyire jó az eredmény?

Lineáris függvény esetében tehát a tengelymetszet és a meredekség:

$$y_0 = \bar{y} - m \cdot \bar{x}$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \cdot x_i - \bar{y} \cdot \sum_{i=1}^N x_i}{\left(\sum_{i=1}^N x_i^2 - \bar{x} \cdot \sum_{i=1}^N x_i\right)}$$

- Nemlineáris függvények esetén az általános eljárás: az illesztési paraméterek változtatása, olyan „irányban”, hogy a négyzetes eltérést minimalizáljuk (iterálás).
- **Az eredmények jóságának mérőszámai:**
 - R^2 (az ideális érték 1, a 0,9999 nagyon jó, már 0,999 is elfogadható)
 - **Szimmetrikus téglalap hiba**
 - Nem szimmetrikus téglalap hiba
 - És még sok egyéb módon is lehetne...

$$R^2 \equiv 1 - \frac{\sum_{i=1}^N [y_i - y(x_i)]^2}{\sum_{i=1}^N [y_i - \bar{y}]^2}$$



4. Függvényillesztés

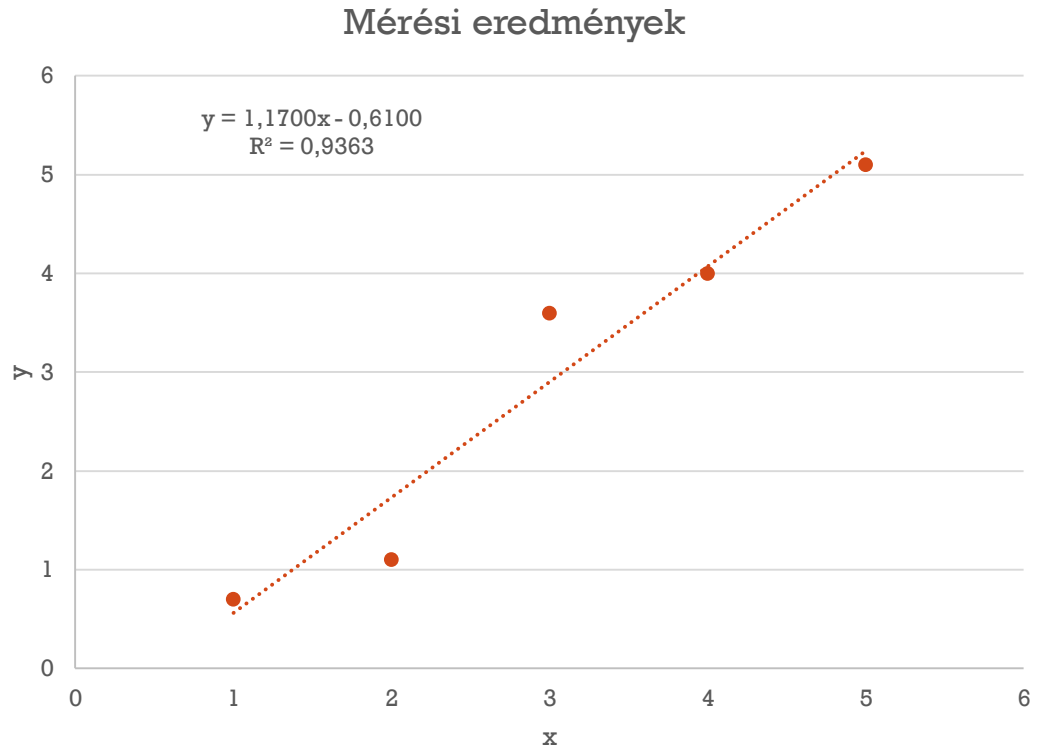
A szimmetrikus téglalap módszerrel számolt hiba

Először is végezzük el az adatainkra az illesztést:

x	y
1	0,7
2	1,1
3	3,6
4	4,0
5	5,1

$$y(x) = m \cdot x + y_0$$

$$y(x) = 1,17 \cdot x + 0,61$$



4. Függvényillesztés

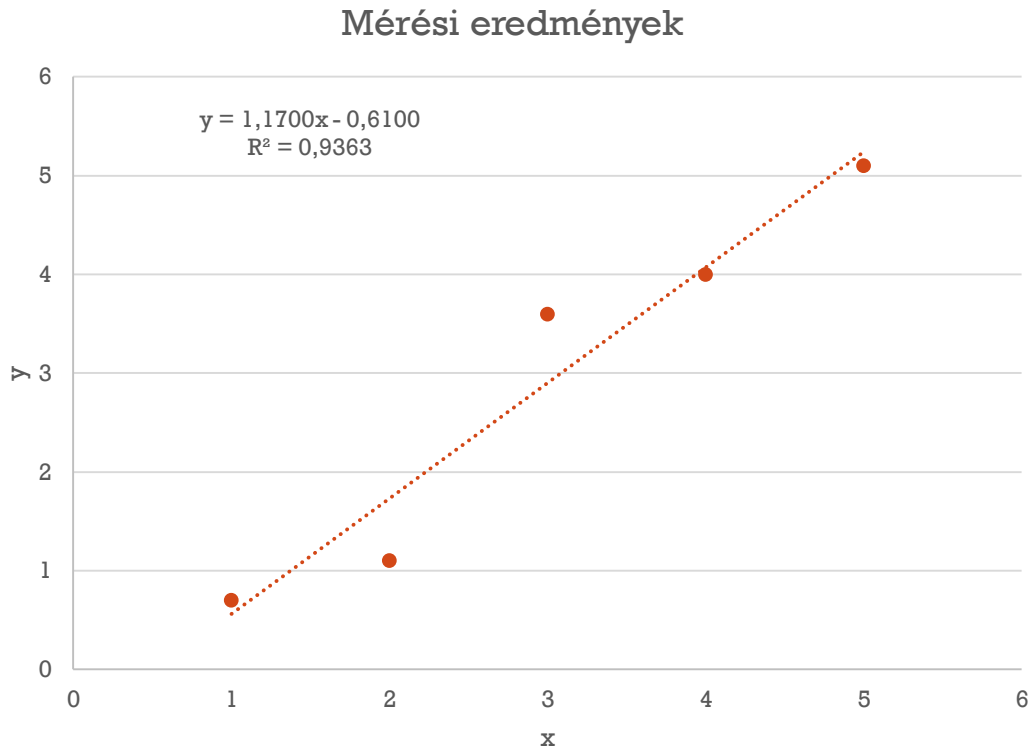
A szimmetrikus téglalap módszerrel számolt hiba

Következő lépésben határozzuk meg, hogy az x mérési pontokban milyen értéket vesz fel az illesztett egyenes. Ez lesz y_{ill} .

x	y	y_{ill}
1	0,7	0,56
2	1,1	1,73
3	3,6	2,90
4	4,0	4,07
5	5,1	5,24

$$y(x) = m \cdot x + y_0$$

$$y(x) = 1,17 \cdot x + 0,61$$



4. Függvényillesztés

A szimmetrikus téglalap módszerrel számolt hiba

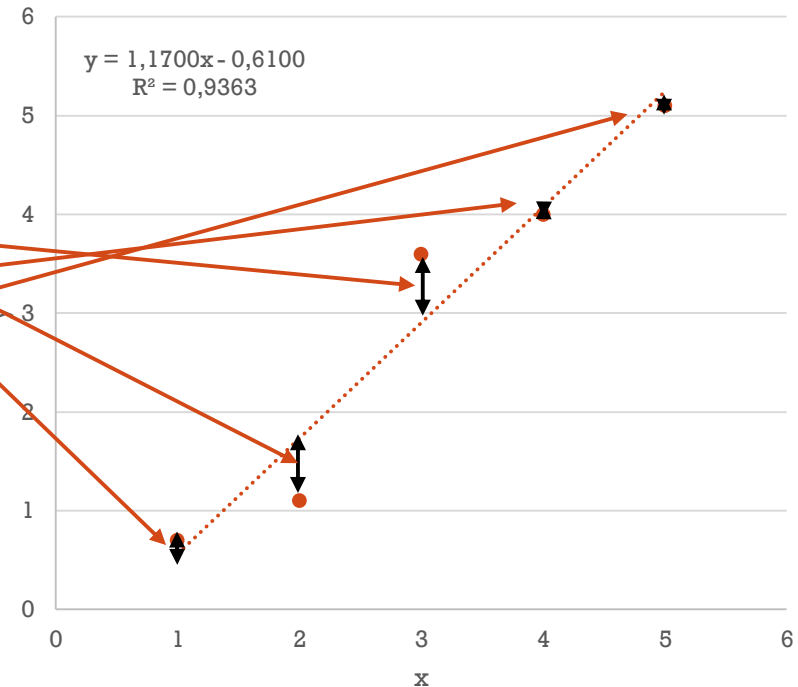
Ha kivonjuk egymásból y -t és a függvény által felvett értéket, akkor minden pont esetében megkapjuk, hogy az mekkora távolságra van az egyenestől

x	y	y_{ill}	$y - y_{\text{ill}}$
1	0,7	0,56	0,14
2	1,1	1,73	-0,63
3	3,6	2,90	0,70
4	4,0	4,07	-0,07
5	5,1	5,24	-0,14

$$y(x) = m \cdot x + y_0$$

$$y(x) = 1,17 \cdot x + 0,61$$

Mérési eredmények

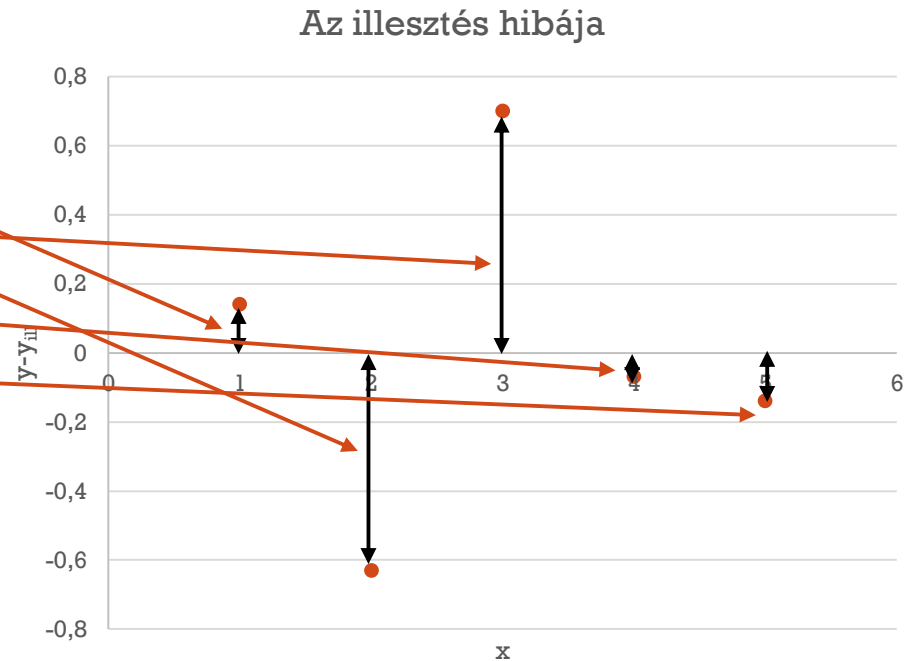


4. Függvényillesztés

A szimmetrikus téglalap módszerrel számolt hiba

Ábrázoljuk ezt a különbséget az x függvényében. Így egy olyan ábrát kapunk, ami megmondja, hogy mely mérési pontokban mekkora az eltérés a valós adatok, valamint az illesztettek között.

x	$y - y_{\text{ill}}$
1	0,14
2	-0,63
3	0,70
4	-0,07
5	-0,14



$$y(x) = m \cdot x + y_0$$

$$y(x) = 1,17 \cdot x + 0,61$$



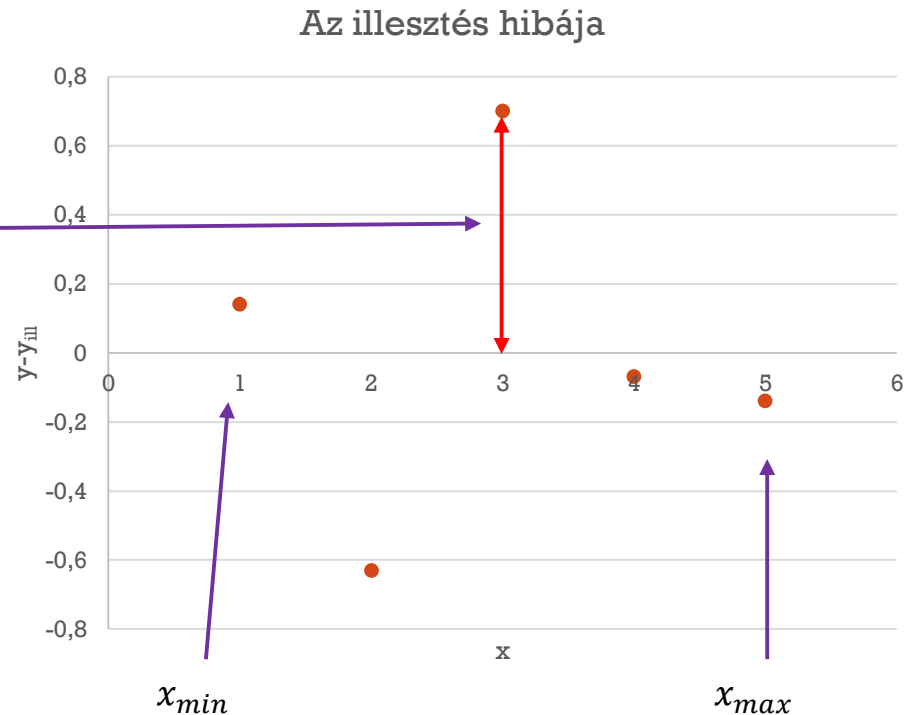
4. Függvényillesztés

A szimmetrikus téglalap módszerrel számolt hiba

A szimmetrikus téglalap módszer alapján a legnagyobb eltérés, valamint a minimális és maximális x érték segítségével határozzuk meg az illesztés meredekségének hibáját.

	x	y-y _{ill}
x_{min} →	1	0,14
	2	-0,63
	3	0,70
	4	-0,07
x_{max} →	5	-0,14

$|y - y_{ill}|_{max}$



$$y(x) = m \cdot x + y_0$$

$$\Delta m = \frac{2 \cdot |y - y_{ill}|_{max}}{x_{max} - x_{min}}$$



4. Függvényillesztés

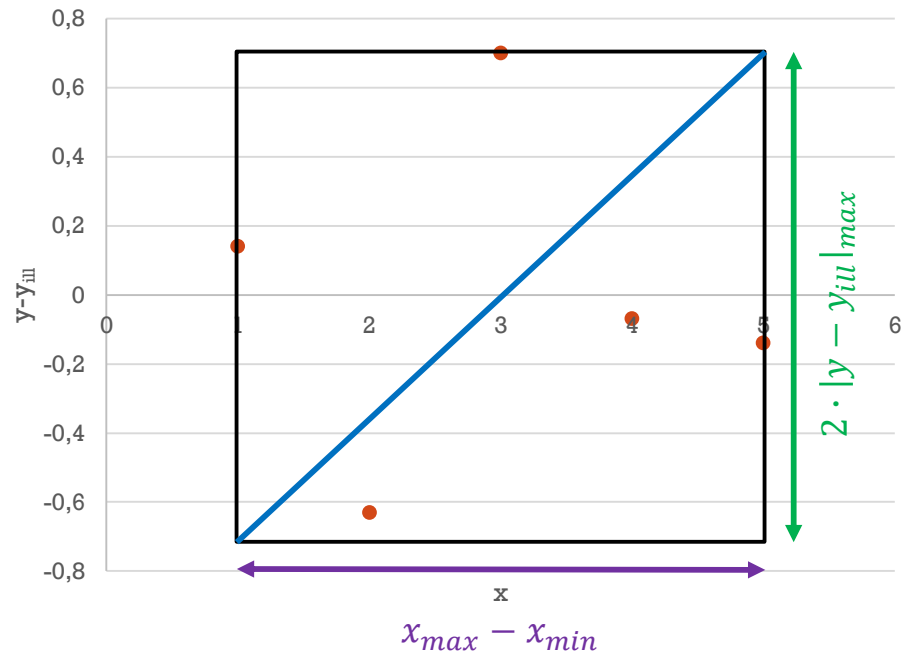
A szimmetrikus téglalap módszerrel számolt hiba

A hiba ezen módon való meghatározásának geometriai jelentése: a mért adatok eltérését a vízszintes 0-tengelyre szimmetrikusan felvett, az összes eltérést éppen magába foglaló négyzet átlójának meredeksége.

x	y-y _{ill}
1	0,14
2	-0,63
3	0,70
4	-0,07
5	-0,14

$$\Delta m = \frac{2 \cdot |y - y_{ill}|_{\max}}{x_{\max} - x_{\min}} = \frac{2 \cdot 0,70}{5 - 1} = \frac{1,40}{4} = 0,35$$

Az illesztés hibája



4. Függvényillesztés

A szimmetrikus téglalap módszerrel számolt hiba

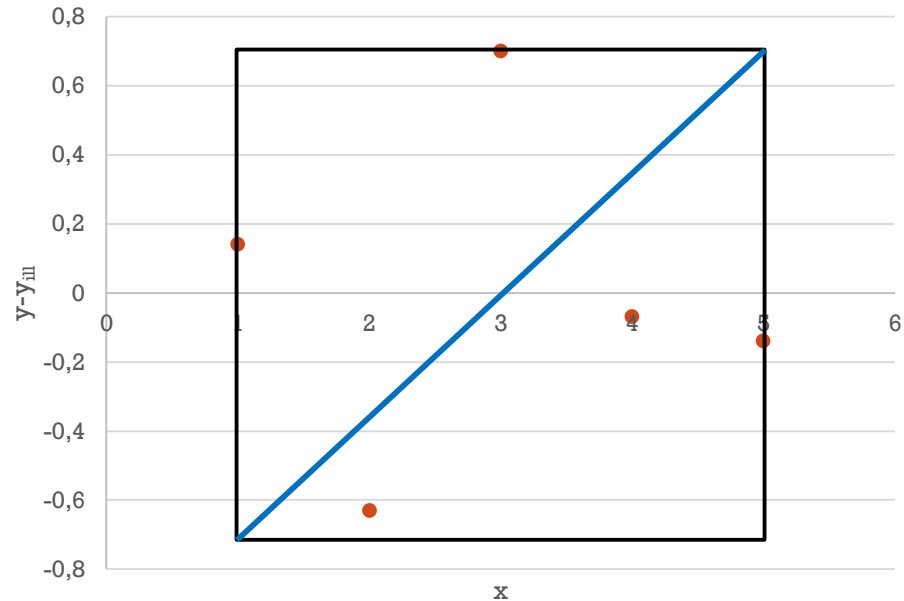
Tehát az illesztett egyenes meredeksége így hibával együtt:

$$m = 1,17 \pm 0,35$$

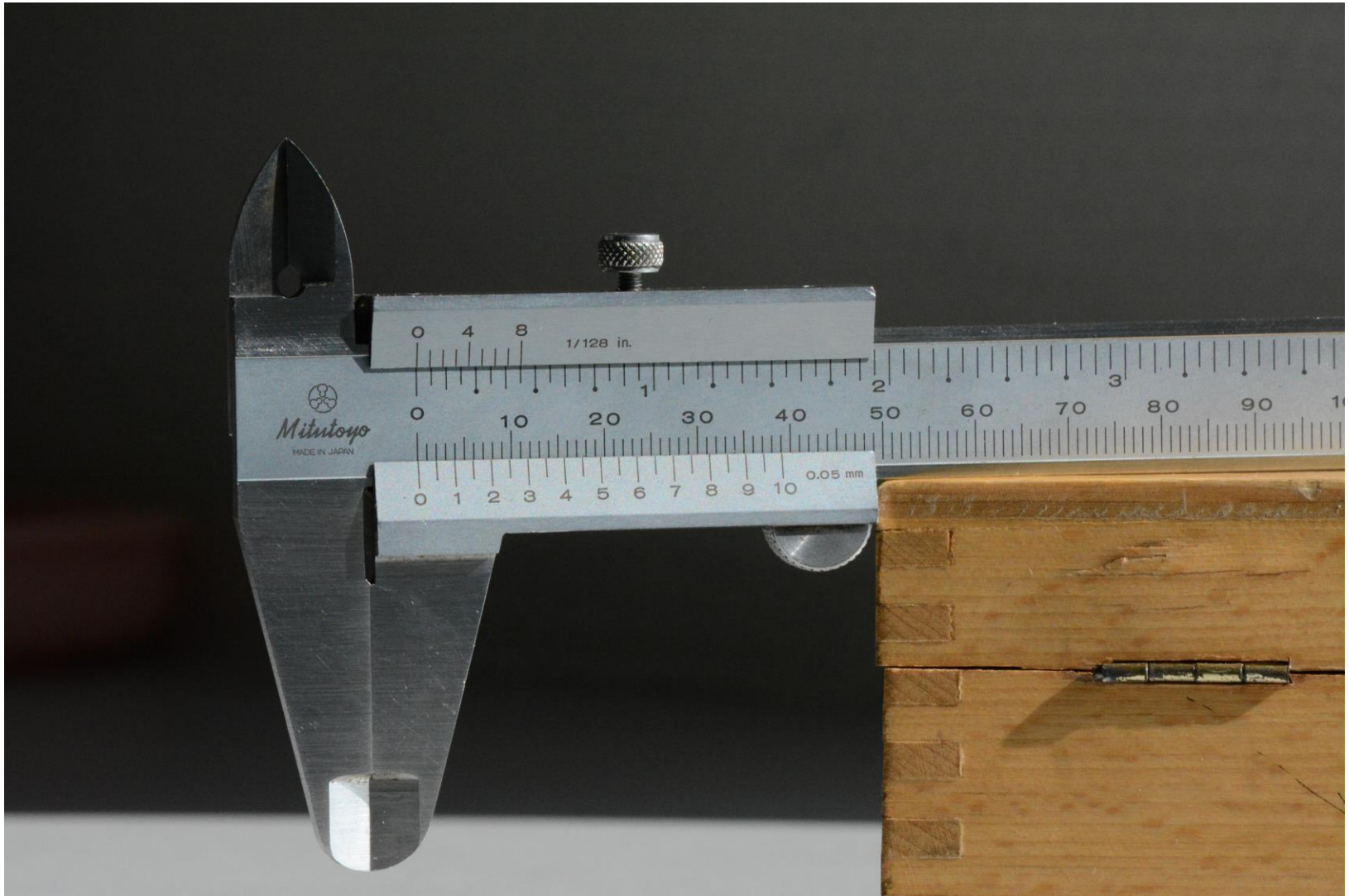
x	y-y _{ill}
1	0,14
2	-0,63
3	0,70
4	-0,07
5	-0,14

$$\Delta m = \frac{2 \cdot |y - y_{ill}|_{\max}}{x_{\max} - x_{\min}} = \frac{2 \cdot 0,70}{5 - 1} = \frac{1,40}{4} = 0,35$$

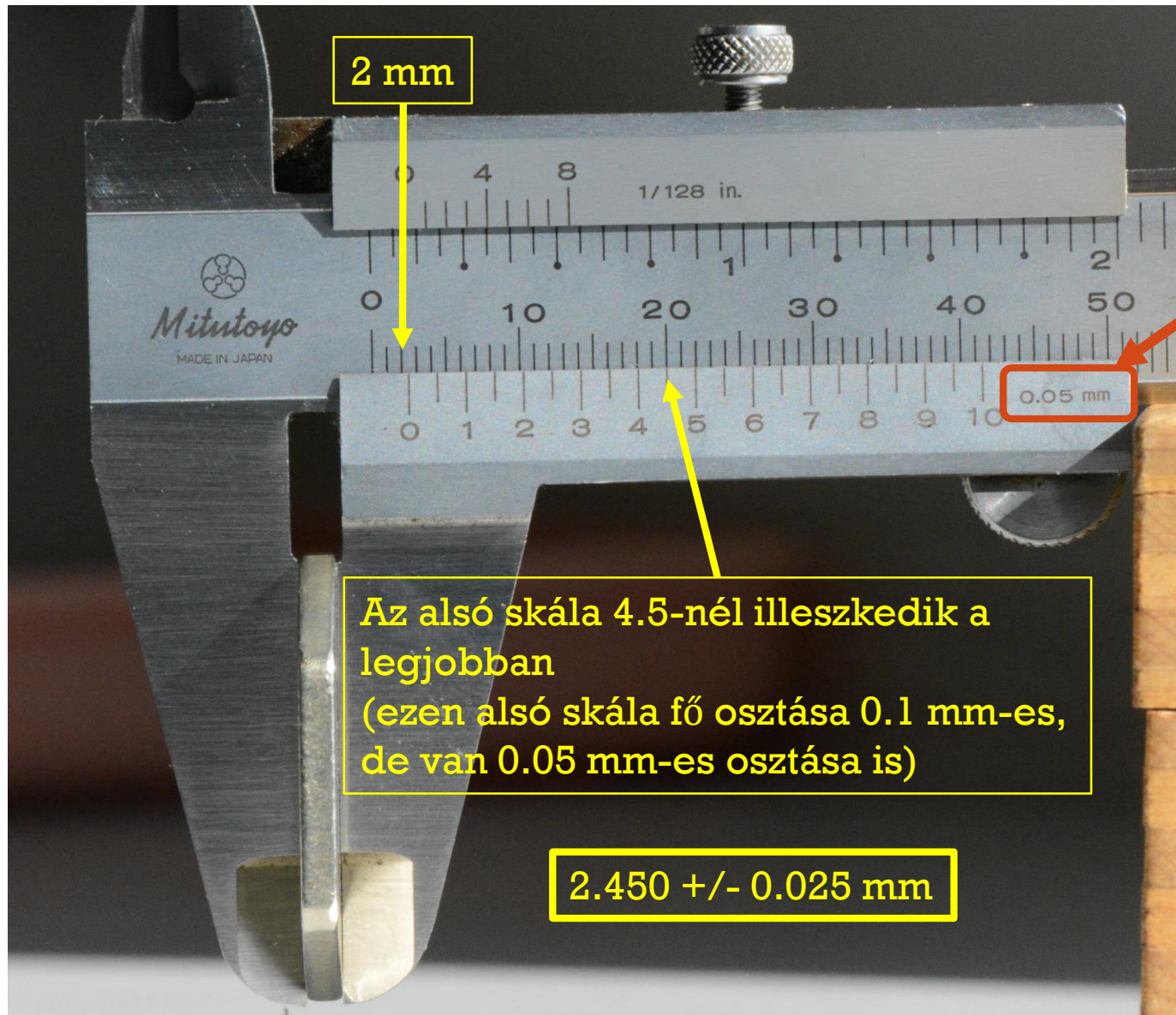
Az illesztés hibája



Tolómérő – 0 helyzetben



Tolómérő – Leolvasás 1



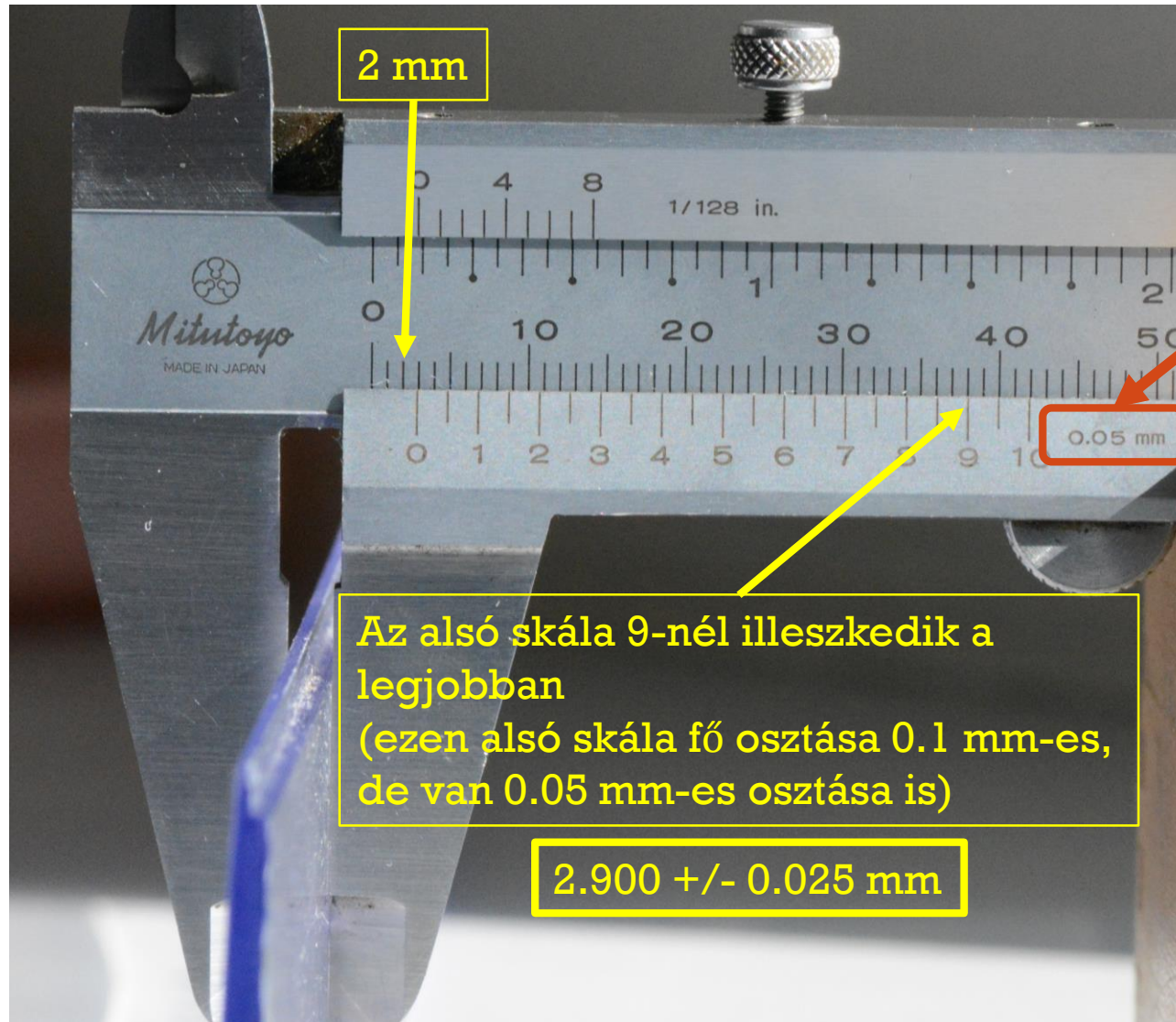
Legkisebb osztás

Az alsó skála 4.5-nél illeszkedik a legjobban
(ezen alsó skála fő osztása 0.1 mm-es,
de van 0.05 mm-es osztása is)

$2.450 \pm 0.025 \text{ mm}$



Tolómérő – Leolvasás 2



Legkisebb osztás



Csavarmikrométer I. – „0 helyzetben”

Ne legyünk erőszakosak a műszerrel!!!

Előfordulhat, hogy a teljesen betekert állapot nem 0-nak felel meg. Ilyen esetekben ezt figyelembe kell venni a további mérések során. Ennek oka a legtöbb esetben legfeljebb némi szennyeződés.



Mérési tartomány

0.01 mm

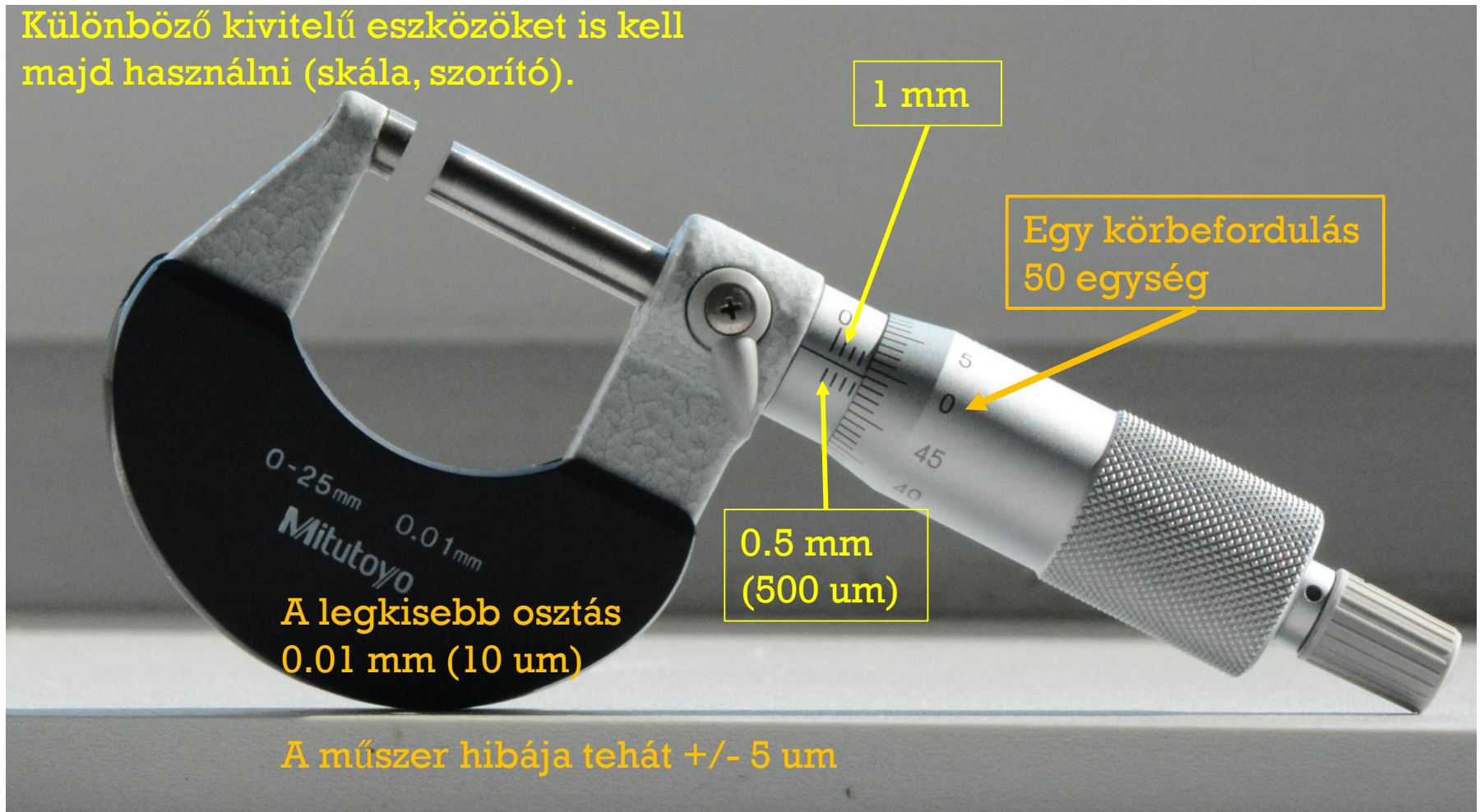
0 - 25 mm

Legkisebb osztás



Csavarmikrométer II.

Különböző kivitelű eszközöket is kell majd használni (skála, szorító).



Csavarmikrométer I. – Leolvasás

Úgy tűnhet, hogy már elérte a 4 mm-t, de a
finom osztás alapján épp egy fő osztást közelít
Tehát a fő osztás alapján:
 $3.5 \text{ mm} + \text{a finom skála értéke}$

A finom skála 41. osztása,
tehát $+0.41 \text{ mm}$

$3.910 \pm 0.005 \text{ mm}$



Csavarmikrométer II.

